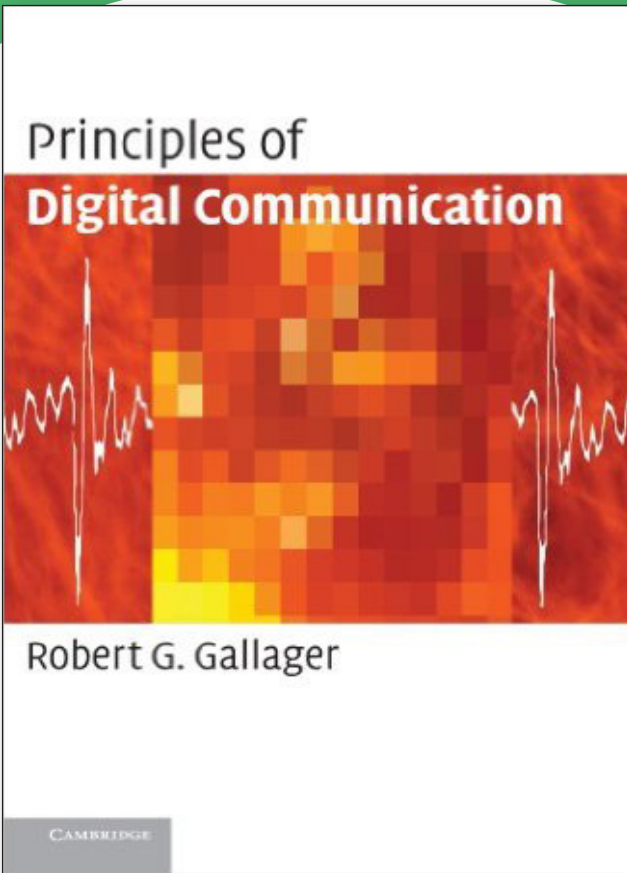




المنظمة العربية للتربية والثقافة والعلوم



Principles of Digital Communication

مبادئ الاتصالات الرقمية

مارس 2017

أصدرته إدارة العلوم والبحث العلمي
تمت الترجمة في المركز العربي للتعريب والترجمة والتأليف



المنظمة العربية للتربية والثقافة والعلوم

مبادئ الاتصالات الرقمية

Principles of Digital Communication

مارس 2017

أصدرته إدارة العلوم والبحث العلمي
تمت الترجمة في المركز العربي للتعريب والترجمة والتأليف

قلجى؁ ج. روبرت

مبادئ الاتصالات الرقمية / روبرت ج. قلجى؛ ترجمة المنظمة العربية للتربية والثقافة والعلوم. المركز العربي للتعريب والترجمة والتأليف والنشر. - تونس: المنظمة العربية للتربية والثقافة والعلوم. إدارة العلوم والبحث العلمي؁ 2017. 332 ص

العنوان الأصلي: Principles of digital communication

ISBN: 978-9973-15-3-375

ع/2017/02/001



المنظمة العربية للتربية والثقافة والعلوم

ترجمة

د. غسان فلوح

د. محمد الحسين

المراجعة العلمية

د. محمد عباسي

تصميم الغلاف

أ. طارق الدريدي

شكر وتقدير

تتقدّم المنظمة العربية للتربية والثقافة والعلوم إلى المركز العربي للتعريب والترجمة والتأليف والنشر بخالص التقدير والشكر على ترجمة الكتاب الصادر في شهر مارس 2008، عن جامعة كامبريدج بالمملكة المتحدة تحت عنوان: **Principles Of Digital Communication**. والشكر موصول إلى كافة فريق العمل الذي أشرف على الترجمة والتدقيق اللغوي والعلمي للمادّة وعلى تعاونهم الجديّ في إنجاز هذا العمل المتميّز. والمنظمة العربية للتربية والثقافة والعلوم إذ تقوم بنشر وتوزيع النسخة العربية من هذا الكتاب القيم لإثراء المكتبات والتشجيع منها على تدريس ودراسة العلوم باللغة العربية، فإنّها تلتزم بتوزيعها مجاناً، وبعدم استثمارها لأغراض تجارية.

لمن يرغب من القراء في الاطلاع على النسخة الأصلية باللغة الإنجليزية، يمكنهم استخدام الرّابط التالي:
<http://freecomputerbooks.com/Principles-of-Digital-Communication.html>
ويمكن للرّاعبين في الاتصال بالمنظمة العربية للتربية والثقافة والعلوم التواصل عبر البيانات التالية:

الهاتف: +216 70 013 900 / الفاكس: +216 71 948 668

البريد الإلكتروني: alecso@alecso.org.tn

العنوان البريدي: شارع محمّد علي عقيد-المركز العمراني الشمالي-تونس

الجمهورية التونسية

مواصلة لجهود المنظمة العربية للتربية والثقافة والعلوم الرامية إلى تعزيز دور العلوم والتقانات الحديثة في تنمية المجتمعات العربية والنهوض بها، ومواصلة لمساعيها المستمرة لإثراء المكتبات العربية بأهم وأبرز المؤلفات التربوية والثقافية والعلمية، يسرّها أن تقدّم للقراء والباحثين والمهتمين العرب، النسخة العربية من الكتاب الصادر عن جامعة كامبريدج بالمملكة المتحدة، في شهر مارس 2008، لمؤلفه "روبارت ج. قلاجي" تحت عنوان "مبادئ الاتصالات الرقمية".

وتأتي أهمية هذا الكتاب في الوقت الذي تعد فيه صناعة الاتّصالات الرقمية من الصناعات الضخمة وسريعة النمو وتقارب في حجمها صناعة تكنولوجيا المعلومات، حيث شهدت أنظمة الاتصالات الرقمية في عصرنا الحالي تطورًا كبيرًا وانتشارًا واسعًا أدى إلى زيادات غير مسبوقة في سرعة نقل البيانات والمعلومات عبر شبكات الاتصالات المختلفة.

والمنظمة العربية للتربية والثقافة والعلوم إذ تقدّم هذا الكتاب العلمي القيم، فإنّها تدعو وتشجّع الاستفادة من المفاهيم والمكونات الرئيسية في أنظمة الاتصالات الرقمية التي يسردها، والأمثلة التطبيقية الهندسية التي ضمّنها، والتي من شأنها أن تساهم بطريقة مباشرة في تطوير وصقل المعارف العلمية للمهتمين والمتخصّصين لتطوير الصناعات العربية في مجال الاتصالات الرقمية العربية.

والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته،،،

الدكتور عبدالله حمد محارب

المدير العام

جاء كتاب "مبادئ الاتصالات الرقمية"، الصادر عن جامعة كامبريدج بالمملكة المتحدة في سنة 2008، ليسأط الضوء على زاوية هامة من زوايا التطورات التكنولوجية والصناعات الرقمية التناظرية في مجال "هندسة الاتصالات"؛

وتقدّم إدارة العلوم والبحث العلمي، بالمنظمة العربية للتربية والثقافة والعلوم، هذا الكتاب العلمي القيم باللغة العربية كمرجع للقراء والمهتمين في الوطن العربي، في ظلّ التطورات والانتشار الواسع الذي حظيت به البنى التحتية لأجهزة وأنظمة الاتصالات الرقمية في عصر ثورة تكنولوجيا الاتصال، وخاصة بالدول المتقدّمة التي تسعى وبشكل جدّي إلى تطوير وتوسيع نطاق استخدام الاتصالات الرقمية في العديد من المجالات (العلمية، التجارية، العسكرية، ...).

يضمّ الكتاب تسعة فصول، تضمّن كلّ منها العديد من المبادئ العلمية النظرية والتطبيقات الهندسية التي تتيح للمهتمين والمتخصّصين والأكاديميين ومهندسي الاتصالات الرقمية، تطوير معارفهم ومهاراتهم العلمية والهندسية في التصميم والتطبيق الأمثل لنظم أجهزة وبرامج الاتصالات الرقمية والتي من شأنها أن تساهم في النهوض بالصناعات العربية في مجال هندسة الاتصالات، من خلال التعريف بمبادئ وأسس الاتصالات الرقمية الحديثة وكيفية التعامل مع الإشارات الكهربائية والكهرومغناطيسية، وطرق انتقالها ومعالجتها (الترميز وفكّ الترميز، التكميم، التشفير، والتعديل).

والله ولي التوفيق،،،

الأستاذ الدكتور أبو القاسم حسن البديري

مدير إدارة العلوم والبحث العلمي

الفهرس

13	مقدمة وأهداف
15	1. مدخل إلى الاتصالات الرقمية
16	1.1 واجهات التخاطب المعيارية والطبقات
18	2.1 منابع الاتصالات
19	1.2.1 ترميز المنبع
20	3.1 قنوات الاتصال
21	1.3.1 ترميز القناة (التعديل)
22	2.3.1 تصحيح الأخطاء
23	4.1 الواجهة الرقمية
24	1.4.1 سمات الواجهة الرقمية في الشبكات
25	5.1 قراءة متممة
26	2. ترميز المصادر المقطعة
26	1.2 مقدمة
27	2.2 الرمازات ذات الطول الثابت للمصادر المقطعة
28	3.2 الرمازات متغيرة الطول للمصادر المقطعة
29	1.3.2 قابلية فك الترميز الفريدة
29	2.3.2 رمازات البادئة الحرة للمصادر المقطعة
31	3.3.2 متراجحة كرافت لرمازات البادئة الحرة
33	4.2 النمادج الاحتمالية للمصادر المقطعة
34	1.4.2 المصادر المقطعة العديمة الذاكرة
34	5.2 أصغر L لرمازات البادئة الحرة
35	1.5.2 حل لاغرانج المضاعف من أجل L الصغرى
36	2.5.2 حدود الانتروبية لـ L
37	3.5.2 خوارزمية هوفمان لرمازات المصدر المثلى
40	6.2 الانتروبية والرمازات ثابتة إلى متغيرة الطول
42	1.6.2 الرمازات الثابتة إلى المتغيرة الطول
43	7.2 خاصية التوزع المتساوي المتقارب AEP ونظريات ترميز المصدر
43	1.7.2 قانون الأعداد الكبيرة الضعيف
44	2.7.2 خاصية التوزع المتساوي المتقارب
46	3.7.2 نظريات ترميز المنبع
47	4.7.2 حدود الانتروبية للأصناف العامة للرمازات
48	8.2 مصادر ماركوف
50	1.8.2 ترميز مصادر ماركوف

50	2.8.2 الانتروبية الشرطية
52	9.2 ضغط البيانات العالمي Lempel- Ziv
52	1.9.2 خوارزمية LZ77
54	2.9.2 لماذا يعمل LZ77
54	3.9.2 المناقشة
55	10.2 خلاصة عن ترميز المصدر المقطع
57	11.2 تمارين
65	3. التكميم
65	1.3 مقدمة في التكميم
66	2.3 التكميم السلمي
67	1.2.3 اختيار المجال من أجل نقاط تمثيل معطاة
67	2.2.3 اختيار نقاط التمثيل لمجالات محددة
68	2.3.3 خوارزمية لويد ماكس Lloyd-Max
69	3.3 التكميم الشعاعي
70	4.3 التكميم المرمرز انتروبياً
71	5.3 التكميم المرمرز انتروبياً ذات المعدل المرتفع
72	6.3 الانتروبية التفاضلية
73	7.3 أداء المكيمات السلمية المنتظمة ذات المعدل العالي
76	8.3 المكيمات ثنائية البعد ذات المعدل العالي
78	9.3 خلاصة التكميم
80	A3 الملحق A: المكيمات السلمية غير المنتظمة
82	B3 الملحق B: المكيم غير المنتظم ثنائي البعد
84	4. أشكال موجات المنبع والقناة
84	1.4 مقدمة
84	1.1.4 المنابع التماثلية
85	2.1.4 قنوات الاتصال
86	2.4 سلاسل فورييه
88	1.2.4 الإشارات المحدودة الطاقة
90	3.4 توابع L_2 وتكامل ليبسغ Lebesgue في المجال $[-T/2, T/2]$
91	1.3.4 إجراء ليبسغ لاتحاد الفترات
92	2.3.4 قياس المجموعات الأكثر عمومية
94	3.3.4 التوابع القابلة للقياس والتكامل على المجال $-T_2, T_2$
95	4.3.4 قابلية قياس التوابع المعرفة بتوابع أخرى
97	4.4 سلسلة فورييه لأشكال موجات L_2
98	1.4.4 توسع المنحني الجببي المقطوع المتباعد T-Spaced

100.....	5.4 تحويلات فورييه وأشكال موجة $\mathcal{L}2$.
102.....	1.5.4 القياس والتكامل في \mathbb{R}
103.....	2.5.4 تحويلات فورييه للتتابع $\mathcal{L}2$
105.....	6.4 تحويل فورييه في الزمن المُقطَّع ونظرية أخذ العينات
105.....	1.6.4 تحويل فورييه في الزمن المُقطَّع
106.....	2.6.4 نظرية أخذ العينات
108.....	3.6.4 ترميز المنبع باستخدام الإشارات المعتانة
109.....	4.6.4 نظرية أخذ العينات لأجل $[\Delta - W, \Delta + W]$
110.....	7.4 التزييف والنشر الجيبي المُثَقَّل
110.....	1.7.4 الامتداد الجيبي المُثَقَّل بتابع السنك (sinc) المتباعد بمقدار T
111.....	2.7.4 درجات الحرية
112.....	3.7.4 التزييف - Aliasing - مقارنة المجال الزمني
113.....	4.7.4 التزييف - مقارنة المجال الترددي
115.....	8.4 ملخص
116.....	4A ملحق: مادة إضافية وبراهين
116.....	1.A4 المجموعات القابلة للعد
118.....	2.A4 الاجتماعات المنتهية لفترات ضمن المجال $-T/2, T/2$
118.....	3.A4 الاجتماعات القابلة للعد والقياس الخارجي على المجال $[-T/2, T/2]$
121.....	4.A4 المجموعات الاعتبائية القابلة للقياس على المجال $-T/2, T/2$
124.....	4.E تمارين
132.....	5. الفضاءات الشعاعية وفضاء الإشارة
132.....	مقدمة
132.....	1.5 المبرهنات والسمات الأساسية لفضاء الأشعة
134.....	1.1.5 الفضاء الشعاعي محدود الاتجاهات
135.....	النظرية 1.1.5 (أساسيات الفضاء الشعاعي محدود الاتجاهات). بفرض أن D هو فضاء شعاعي محدود الاتجاهات وذو أهمية فإن:
135.....	2.5 فضاء الجداء الداخلي
136.....	1.2.5 فضاءات الجداء الداخلي \mathbb{R}^n و \mathbb{C}^n
136.....	2.2.5 المخططات أحادية الاتجاه
138.....	3.2.5 فضاء الجداء الداخلي لتتابع $\mathcal{L}2$
139.....	4.2.5 الفضاءات الجزئية في فضاء الجداء الداخلي
140.....	3.5 أسس التعامد المُستَنظَم ونظرية الإسقاط
140.....	1.3.5 الإسقاطات محدودة الأبعاد
141.....	2.3.5 بديهيات نظرية الإسقاط
142.....	3.3.5 تعامد غرام - شمييت المُستَنظَم Gram-Schmidt orthonormalization
143.....	4.3.5 توسعات أسس التعامد المُستَنظَمة في $\mathcal{L}2$
145.....	4.5 الملخص

145	A5 ملحق: المتممات والبراهين
145	1.A5 نظرية بلانشريل Plancherel
148	2.A5 نظريتنا أخذ العينات والتزيف Aliasing
150	3.A5 الأمواج الكروية المتطولة Prolate Spheroidal Waveforms
152	5.E تمارين
155	6. الأقتنية والتعديل وكشف التعديل
155	1.6 مقدمة
157	2.6 التعديل السعوي النبضي (PAM)
157	1.2.6 تموضع الإشارة
158	2.2.6 النقاط السلبية في القناة - نظرة أولية
160	3.2.6 اختيار التعديل النبضي
161	4.2.6 كشف تعديل PAM
162	3.6 معيار نايكويست
163	1.3.6 تناظر حافة الحزمة
164	2.3.6 اختيار $pt - kT; k \in \mathbb{Z}$ كمجموعة متعامدة معيارياً
165	3.3.6 العلاقة بين PAM وترميز المنبع التماثلي
166	4.6 التعديل: الحزمة الأساسية إلى حزمة التمرير وبالعكس
166	1.4.6 التعديل السعوي ذو عرض الحزمة المضاعفة
167	6.5 التعديل السعوي الترابعي
168	1.5.6 مجموعة إشارة QAM
169	2.5.6 تعديل وكشف تعديل الحزمة الأساسية في QAM
170	3.5.6 QAM: تحويل الحزمة الأساسية إلى حزمة تمرير وبالعكس
171	4.5.4 تنفيذ QAM
172	6.6 فضاء الإشارة ودرجات الاستقلالية
173	1.6.6 المسافة والتعامد
175	6.7 استرداد الحامل والطور في أنظمة QAM
176	1.7.6 تتبع الطور بوجود الضجيج
176	2.7.6 أخطاء الطور الكبيرة
176	8.6 ملخص التعديل وكشف التعديل
178	6.E تمارين
183	7. العمليات العشوائية والضجيج
183	1.7 مقدمة
183	2.7 العمليات العشوائية
184	1.2.7 أمثلة عن العمليات العشوائية
186	2.2.7 المتوسط والتباين المشترك للعملية العشوائية
187	3.2.7 قنوات الضجيج الجمعي

187	3.7 المتحولات العشوائية الغوصية، الأشعة، والعمليات
189	1.3.7 مصفوفة التباين المشترك للشعاع العشوائي الغوصي المشترك
190	2.3.7 الكثافة الاحتمالية للشعاع العشوائي الغوصي المشترك
192	3.3.7 حالة خاصة لشعاع عشوائي غوصي ثنائي الأبعاد وبقيمة متوسطة صفرية
192	4.3.7 $Z = A W$ حيث A متعامدة
193	5.3.7 كثافة احتمال الأشعة الغوصية وفق تعابير المحاور الأساسية
194	6.3.7 تحويل فورييه للكثافات المشتركة
195	4.7 الوظائف الخطية والمرشحات للعمليات العشوائية
196	1.4.7 العمليات الغوصية المعرفة على توسعات المتعامدة المنتظمة
196	2.4.7 الترشيح الخطي للعمليات الغوصية
197	3.4.7 التباين المشترك للتوابع الخطية والمرشحات
198	5.7 الاستقرار والمفاهيم ذات الصلة
199	1.5.7 العمليات العشوائية المستقرة بالمعنى الواسع (WSS)
200	2.5.7 الاستقرار الفعال والعمليات العشوائية المستقرة بالمعنى الواسع WSS الفعالة
201	3.5.7 التوابع الخطية للعمليات العشوائية المستقرة بالمعنى الواسع بشكل فعال
202	4.5.7 المرشحات الخطية للعمليات العشوائية المستقرة بالمعنى الواسع بشكل فعال
203	6.7 الاستقرار والعمليات المستقرة بالمعنى الواسع في المجال الترددي
205	7.7 الضجيج الغوصي الأبيض
207	1.7.7 توسع sinc كتقريب للضجيج الغوصي الأبيض
207	2.7.7 ضجيج عملية بواسون
208	8.7 إضافة الضجيج إلى الاتصالات المعدلة
209	1.8.7 المتحولات العشوائية الغوصية العقدية والأشعة
213	9.7 نسبة الإشارة إلى الضجيج
215	10.7 ملخص عن العمليات العشوائية
216	A7 ملحق: مواضيع تكميلية
216	1.A7 خواص مصفوفات التباين
217	2.A7 توسع سلسلة فورييه من عملية عشوائية مقتطعة
219	3.A7 المعاملات غير المترابطة (المستقلة) في سلسلة فورييه
222	4.A7 توسع Karhunen-Loeve
223	7.E تمارين
227	8. الكشف، الترميز، وفك الترميز
227	1.8 مقدمة
229	2.8 الكشف الإثنائي
231	3.8 الإشارات الإثنائية في الضجيج الغوصي الأبيض
231	1.3.8 كشف إشارات التعديل بمطال النبضة PAM المتعاكسة القطبية

233.....	2.3.8 كشف الإشارات الإثنائية غير المتعكسة القطبية
234.....	3.3.8 كشف الأشعة الإثنائية الحقيقية في الضجيج الغوصي الأبيض
236.....	4.3.8 كشف الأشعة الإثنائية المُقدية في الضجيج الغوصي الأبيض
237.....	5.3.8 كشف الأمواج المتعكسة القطبية الإثنائية في الضجيج الغوصي الأبيض
240.....	4.8 كشف الإشارات الرقمية متعددة القيم M-ary وكشف السلسلة
241.....	1.4.8 كشف الإشارات الرقمية المتعددة القيم M-ary
242.....	2.4.8 الإرسالات المُتعاقة لإشارات QAM في WGN
244.....	3.4.8 الكشف في نظم التعديل الكيفية
246.....	5.8 مجموعات الإشارات المتعامدة وترميز القناة
247.....	1.5.8 مجموعات الإشارة البسيطة (المفردة)
247.....	2.5.8 المجموعات ثنائية التعامد
248.....	3.5.8 احتمال الخطأ لمجموعات الإشارة المتعامدة
251.....	6.8 الترميز اللبني
251.....	1.6.8 الرمازات المتعامدة الإثنائية ومصفوفات هدامارد
253.....	2.6.8 رمازات ريد - مولر
254.....	7.8 نظرية ترميز القناة الضجيجية
255.....	1.7.8 الأقتية المقطعة عديمة الذاكرة
256.....	2.7.8 السعة
257.....	3.7.8 عكس نظرية ترميز القناة الضجيجية
258.....	4.7.8 نظرية ترميز القناة الضجيجية، جزء مُتقدّم
260.....	5.7.8 نظرية ترميز القناة الضجيجية في حال الضجيج الغوصي الأبيض
261.....	8.8 الرمازات العوديّة (التلافية)
263.....	1.8.8 فك ترميز الرمازات العوديّة
264.....	2.8.8 خوارزمية فيتربي
266.....	9.8 الخلاصة
267.....	A8 مُلحق: اختبارات العتبة لنيمان بيرسون Neyman-Pearson
271.....	8.E تمارين
277.....	9. الاتصالات اللاسلكية الرقمية
277.....	1.9 مقدمة
280.....	2.9 نمذجة أقتية الاتصالات اللاسلكية
280.....	1.2.9 هوانيات الفضاء الحرّ، والإرسال والاستقبال الثابت
282.....	2.2.9 الفراغ الحرّ، الهوائي المتحرك
283.....	3.2.9 هوائي متحرك، جدار عاكس
284.....	4.2.9 الانعكاس عن أرض مسطحة
285.....	5.2.9 التظليل

285.....	6.2.9 هوائي متحرك، عواكس متعددة
285.....	3.9 نماذج الدخل/الخرج لأقنية الاتصال اللاسلكية
287.....	1.3.9 تابع النظام والاستجابة النبضية لأنظمة LTV
288.....	2.3.9 انتشار دوبلر وتماسك الزمن
290.....	3.3.9 تأخير الخفوت وتماسك التردد
292.....	4.9 نوابح الحزمة القاعدية للنظام والاستجابات الترددية
294.....	1.4.9 نموذج حزمة قاعدية متقطع زمنياً
296.....	5.9 النماذج الإحصائية للأقنية
298.....	1.5.9 ضجيج تمرير الحزمة والحزمة القاعدية
299.....	6.9 الكشف عن البيانات
300.....	1.6.9 الكشف الإثنائي في خفوت رايلي المسطح
302.....	2.6.9 الكشف غير المتماسك بمعرفة مطال القناة
304.....	3.6.9 الكشف غير المتماسك في خفوت ريشيان المسطح (المستوي)
305.....	7.9 قياسات القناة
306.....	1.7.9 استخدام إشارات التحقق (السير) لتقدير القناة
310.....	2.7.9 مستقبلات راكي
312.....	9.8 التنوع
315.....	9.9 النفاذ المتعدد بتقسيم الرمز CDMA، نظام IC95 المعياري
316.....	1.9.9 ضغط الصوت
316.....	2.9.9 ترميز وفك ترميز القناة
317.....	3.9.9 فك ترميز فيتربي Viterbi لقنوات الخفوت
318.....	4.9.9 التعديل وفك التعديل
320.....	5.9.9 التداخل متعدد النفاذ في نظام IC95
321.....	10.9 ملخص عن الاتصالات اللاسلكية
323.....	A.9 الملحق: احتمال خطأ الكشف غير المتماسك
325.....	9.E تمارين
330.....	المراجع

مقدمة وأهداف

تُعَدُّ صناعة الاتصالات الرقمية صناعة ضخمة وسريعة النمو، تقارب في حجمها صناعة تكنولوجيا المعلومات. إن الهدف من هذا الكتاب هو دراسة تلك الجوانب من نظم الاتصالات الرقمية التي هي فريدة من نوعها في تلك الأنظمة. حيث بدلاً من التركيز على الأجهزة والبرامج لهذه النظم، والتي تشبه إلى حدٍّ بعيد الأجهزة والبرمجيات لكثير من أنواع أخرى من الأنظمة، فإن التركيز ينصبُّ على جوانب النظام الأساسية من الاتصالات الرقمية الحديثة.

كان للأفكار النظرية في حقل الاتصالات الرقمية تأثير قوي على نحو غير عادي في تصميم النظم والممارسة العملية والتطبيقية. حيث كانت الأسس النظرية قد وضعت من قبل كلود شانون، والتي يطلق عليها اسم نظرية المعلومات في عام 1948. خدمت نظرية المعلومات لأول 25 عاماً أو نحو ذلك من وجودها، كمصدر غني لمسائل البحث العلمي وكنهج يدعو للتنافس من حيث كون هذه النظم يمكن أن تكون أكثر كفاءة وموثوقية باستخدام هذه المقاربات. كان للنظرية تفاعل قليل مع الممارسة التطبيقية بعيداً عن بعض التجارب الصغيرة وبعض الأنظمة العسكرية المتخصصة للغاية. ومع ذلك، وبحلول منتصف عام 1970، بدأ تنفيذ النظم السائدة على نطاق واسع باستخدام أفكار نظرية المعلومات. كان السبب الأول وراء ذلك العدد المتزايد من المهندسين الذين فهموا كلاً من نظرية المعلومات ونظم الاتصالات. أما السبب الثاني فيعود إلى انخفاض التكلفة وزيادة قوة معالجة الأجهزة الرقمية مما جعل من الممكن تنفيذ خوارزميات متطورة تخصّ نظرية المعلومات. ويُعزى السبب الثالث إلى أن التعقيد المتزايد في نظم الاتصالات تطلب توظيف المبادئ البنوية لنظرية المعلومات.

تقع المبادئ النظرية بشكل تقريبي ضمن تصنيفين أساسيين؛ يوفّر الأول أدوات تحليلية لتقرير أداء نظم محددة، ويضع الثاني قيوداً أساسية على أداء أي نظام. يمكن لطلاب الدراسات الدنيا استيعاب معظم مكونات التصنيف الأول، إلا أن التصنيف الثاني فهو بطبيعته مخصّص لطلاب الدراسات العليا بشكل متفرّد. لا يعود السبب في ذلك إلى كون طلبة الدراسات العليا لديهم معرفة أوسع بالمقارنة مع نظرائهم في الدراسات الدنيا، إلا أن الأخيرين متمرسون في فهم كميات كبيرة من التفاصيل ويجيدون التعامل مع المعادلات التي لها علاقة بهذه التفاصيل. كما أنهم غير معتادين على الصبر والتفكير العميق الذي يتطلّبه فهم قيود مجردة للأداء، ويأتي هذا الفهم لاحقاً مع البحث العلمي المرافق للأطروحة.

كان الهدف الأصلي للمؤلف كتابة مرجع مختص في الاتصالات الرقمية لطلبة الدراسات الدنيا، إلا أن الخبرة في تدريس هذه المواد على مدى عدد من السنوات أقتنعت بأنه لا يمكن أن يكتب عرضاً صادقاً للمبادئ، بما في ذلك كل ما هو ممكن وما هو غير ممكن، دون أن يفقد أكثر طلاب الدراسات العليا اهتمامهم. يتوافر العديد من النصوص الجامعية الممتازة في الاتصالات الرقمية التي تصف مجموعة واسعة من الأنظمة، لذلك لم تكن هناك ضرورة لكتاب آخر. يستهدف هذا المرجع بسبب كل ذلك طلاب الدراسات العليا، إلا أنه يمكن أن يكون في متناول طلاب الدراسات الدنيا الأكثر صبراً.

تعد العلاقة بين النظرية ومسائل المجموعات، والهندسة/التصميم في مقررات أكاديمية، أمراً معقداً نوعاً ما. تتعامل النظرية مع العلاقات وتحليل نماذج النظم الحقيقية. وهناك نظريات جيدة (ونظرية المعلومات هي واحدة من الأفضل) تسمح بتحليل بسيط لنماذج مبسطة. كما توفر مبادئ هيكلية توفر رؤية أكثر عمقاً لهذه النماذج المبسطة مما يتيح تطبيقها على نماذج أكثر تعقيداً وواقعية. توفر مسائل المجموعات للطلبة فرصة لتحليل هذه النماذج المبسطة للغاية، ويمكن مع كثير من الصبر، البدء بفهم المبادئ العامة. تتعامل الهندسة مع الحكمة والمقاربة الصحيحة التي تساعد في إنشاء نماذج بسيطة وتتركز على العناصر الحاسمة في هذه الحالة، ومنها إلى تصميم أنظمة قابلة للتطبيق. والنقطة المهمة هنا هي أنه لا يمكن حقاً فصل الهندسة عن الناحية النظرية، فهي ضرورية في اختيار النماذج النظرية الملائمة، والنظرية ضرورية للعثور على الخصائص العامة لتلك النماذج. لتبسيط ذلك، تحدّد الهندسة ما هو الواقع وتحدّد النظرية نتائج وهيكل هذا الواقع. إن التصور الهندسي للواقع على مستوى أعمق، يعتمد بشكل كبير على فهم البنية (يحمل كل منا نماذج مبسّطة في مخيلته). وبالمثل، تعتمد الهياكل التي أنشأها النظرية على الحسنّ السليم للهندسة بهدف التركيز على القضايا الهامة. تصبح الهندسة أحياناً مهمة بشكل واضح بالتفاصيل، والنظرية مفرطة في الجماليات الرياضية، ولكننا سوف نحاول تجنب كل من هذه التجاوزات في سياق هذا المرجع. يعرض كل موضوع في هذا النص مع نماذج مبسّطة للغاية، ومن ثم تربط النتائج حول هذه النماذج مع نظم الاتصالات الفعلية بهدف تعميم تلك

النماذج. نكرر بعدئذ جئمة وإياباً تحليل النماذج ثم إنشاء تلك النماذج؛ وبذا يُعدّ فهم حدود الأداء على صفوف النماذج جوهرياً في هذه العملية. هناك العديد من التمارين المصممة للمساعدة في فهم مواضيع هذا الكتاب. يهتم بعض من هذه الأمثلة بكيفية تعطل سيرورة التحليل إذا انتهكت القيود، حيث غالباً ما يتعامل التحليل مع النماذج عوضاً عن الواقع، إلا أن هذه الأمثلة تساعد في بناء نظرة ثاقبة حول كيفية تطبيق تلك النتائج على أنظمة حقيقية. تطبق نتائج النص في بعض التمارين على حالات بسيطة جداً، بينما تعمّم في حالات أخرى تلك النتائج على أنظمة أكثر تعقيداً. يستكشف بعضها الآخر صواب تطبيق النماذج النظرية على مشاكل عملية محددة.

من المهم التأكيد على أن الغرض من هذه التمارين هو ليس الحصول على "الجواب" لاكتساب الفهم، وإنما يمكن إدراك المعرفة والتعلم على نحو أكثر عمقاً من خلال مناقشة التدريبات مع الآخرين والتفكير فيما تعلّموه بعد الانتهاء من حل هذه التمارين. النقطة الجوهرية هي أن التلاعب بالمعادلات يجب ألا يكون الهدف بحد ذاته (والتي يمكن لأجهزة الحاسوب القيام به على نحو أفضل من الطلاب) بل فهم هذه المعادلات وما تمثله من حقائق نظرية وتطبيقية (وهذا ما لا تستطيع أجهزة الحاسوب القيام به). كما جرى بيانه أعلاه، إن المادة العلمية المطروحة في هذا المرجع تستهدف طلبة الدراسات العليا في المقام الأول وذلك من حيث التجريد والصبر، إلا أنها لا تتطلب سوى معرفة بالاحتمالات الأساسية، والأنظمة الخطية، والتجريد الرياضي البسيط، مما يجعل ممكناً استيعاب وفهم هذا الكتاب على مستوى طلبة الدراسات الدنيا. إن تعلّم كل من الطلاب الجامعيين والخريجين، الحجة والمنطق في دراسة المواد الهندسية هو أكثر أهمية، سواء في أماكن العمل أو مواصلة التعلّم، من الأطر المسبقة في التعلم والتلاعب بالمعادلات.

تهدف معظم كتب الاتصالات لطلبة الدراسات الدنيا التآلف مع مجموعة كبيرة ومتنوعة من الأنظمة المختلفة التي تمّ تنفيذها تاريخياً. وهذا بالتأكيد له قيمة كبيرة على المدى القريب في مكان العمل، كما يوفر مجموعة غنية من الأمثلة القيمة لمواصلة الدراسة. إن مجال الاتصالات الرقمية واسع جداً، إلا أن التعلم من الأمثلة محدود القيمة ولا بدّ على المدى الطويل من تعلم المبادئ الأساسية وما تتضمنه من معرفة. توفر الأمثلة في المقررات الجامعية معلومات أساسية مفيدة لدراسة هذه المبادئ، ولكن القدرة على التفكير المجرد الذي يأتي من مقررات الرياضيات البحتة له القيمة نفسها.

تركز معظم كتب الاتصالات الجامعية على تحليل المشاكل مع تركيز أقلّ على النمذجة، والتقريب، وعلى البصيرة اللازمة للتعرف على كيفية نشوء هذه المشاكل. هدفنا هنا هو استخدام نماذج بسيطة وتقريبية كوسيلة لفهم المبادئ العامة. سوف نستخدم قدراً كبيراً من الرياضيات في هذه العملية، إلا أن ذلك يقع في إطار إنشاء النتائج العامة على نحو دقيق بدلاً من إجراء تحليلات مفصلة للحالات الخاصة.

1. مدخل إلى الاتصالات الرقمية

إن علم الاتصالات كان وما زال على مرّ الزمان من الاحتياجات الهامة للمجتمعات الإنسانية في سباق البشرية على مرّ التاريخ المسجل، وقد تطورت هذه الحاجة مع تطور طرائق الاتصال، بدايةً كان يتمّ الاتصال لنقل أهم المعلومات، ثم تطور ليدخل في الاحتياجات الأساسية للتواصل بين الأفراد في المجتمع، وبعد ذلك دخل عالم الاتصالات ضمن العملية التعليمية وكان مؤخراً التطور لاستخدام الاتصال في المجتمعات البشرية وبنائها للتعبير عن المشاعر، والأحاسيس، والأفكار وأصبح الحصول على الاتصال شيء أساسي في المجتمع.

إن القيمة الأساسية لهندسة الاتصالات في تقديم التسهيلات للتواصل البشري ضمن المجتمع. ففي بداية الأمر بدأ الاتصال عبر قرع الطبول ثم تطور إلى الإشارات الدخانية وأدى استمرار البحث والتطوير إلى اختراع التلغراف، ولم يتوقف التطور عند هذا الحد فانتقلنا من إرسال رموز التلغراف إلى التواصل الصوتي ومع استمرار الإصرار أصبحنا ننقل الصوت والصورة معاً ضمن نظام التلفزة والمتابعة والأبحاث وصلنا إلى الشبكات الحاسوبية وأدى التقدم التكنولوجي إلى ظهور الأجهزة النقالة والمحمولة والتي تقوم بنقل مزيج من المعطيات من صوت وصورة وبيانات بتطبيقاتها سهلة الاستخدام وغير المكلفة.

في البداية تمّ تطوير هذه التقنيات إلى شبكات منفصلة وكان ينظر إليها على أنّ لديها القليل من القواسم مشتركة للشبكات ومع تطور هذه الشبكات واتساعها، ولكن على كل حال فإن حقيقة أن جميع أجزاء الشبكة معينة يمكن أن تعمل معاً بالإضافة إلى حقيقة أن هذه الأجزاء قد صمّمت بأوقات مختلفة وبطرائق تصميم مختلفة وتقنيات تصنيع مختلفة وفي أوقات مختلفة وباستخدام منهجيات تصميم مختلف، وهذا بدوره أدى إلى زيادة التركيز على المبادئ الأساسية وطبقات شبكة الاتصال والفهم المعماري للتصميم الشبكي المطلوب لاستمرار تطور نظام الاتصالات بشكل متكامل.

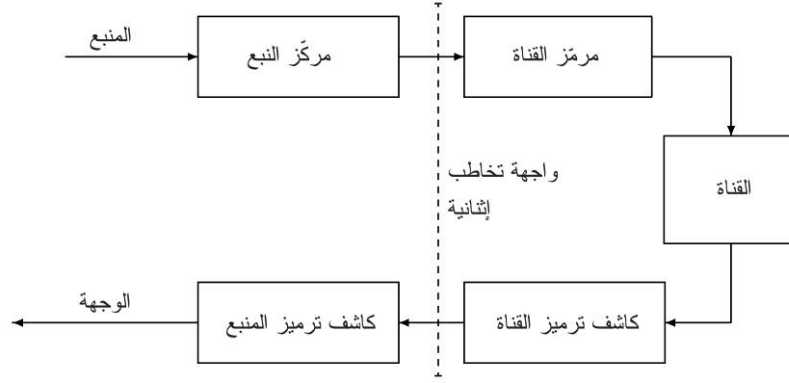
وقد كان مركز الهاتف والتلغراف الأمريكي (American Telephone and Telegraph (AT&T الأكثر فهماً للاحتياجات الأساسية لتطوير شبكات الاتصالات، حيث أنشأ في مخبر شركة بيل Bell Labs للإلكترونيات قسماً خاصاً للتطوير والبحث وهذا القسم تابع لـ (AT&T). أصبح مركز الرياضيات في مختبرات بيل المركز المهيمن لأبحاث الاتصالات في العالم، واستمرّ حتى وقت قريب جداً، وقد وضعت نواة مركزية لمبادئ تكنولوجيا الاتصالات في ذلك المركز.

إن أعظم ما قدمه هذا المركز هو وضع نظرية المعلومات من قبل كلود شانون في العام 1948، ولربما خلال أول 25 عاماً من اكتشافها اعتبرت نظرية المعلومات كنظرية جميلة ولكن ليست كدليل أساسي لهندسة وتصميم نظم الاتصالات ولكن بعد ذلك الوقت ومع التطور التقني والفهم الهندسي العميق كان ذلك كفيلاً بتطوير نظام متابعة مبادئ المعلومات النظرية.

هناك عدد من المعلومات والأفكار النظرية التي تؤثر في تصميم نظام الاتصالات والتي سيتمّ شرحها بعناية في الفصول اللاحقة. هناك فكرتان أساسيتان تمثلان محور الموضوع تقريباً الأولى: استعراض جميع منابع الاتصالات على سبيل المثال الطول الموجي للصوت، الصورة بالإضافة للملفات النصية عندما يتمّ تمثيلها بشكل متتاليات في نظام العدّ الثنائي والفكرة الثانية: هي تصميم نظم الاتصالات التي تحوّل بشكل أساسي خرج منبع المعلومات إلى متتالية في نظام العدّ الثنائي ومن ثم تحوّل هذه المتتالية الإثنائية إلى شكل آخر قابل للنقل عبر الوسط المادي المستخدم كالكابلات أو الأزواج النحاسية المجدولة أو الألياف الضوئية أو الأمواج الراديوية.

أنظمة الاتصالات الرقمية بالتعريف هي أنظمة الاتصال التي تستخدم سلسلة رقمية¹ كواجهة بين المنبع ودخل القناة (وبنفس الطريقة بين خرج القناة والوجهة النهائية). (الشكل 1.1).

¹ السلسلة الرقمية هي سلسلة مكونة من العناصر من الأبجدية المنتهية (أرقام إثنائية 0، 1، أرقام عشرية 0...9، أو أحرف إنكليزية). غالباً ما تستخدم الأرقام الإثنائية عموماً في الاتصالات الرقمية وفي التخزين، لكن فقط نميز بين الرقمي والثنائي في بعض الأماكن حيث يكون الفرق ذا أهمية.



الشكل 1.1: وضع واجهة إثنائية بين المنبع والقناة. يحول مرمز المنبع source encoder خرج المنبع إلى سلسلة إثنائية ويعالج رمز القناة channel encoder (غالباً يسمى مُعدل (modulator) السلسلة الإثنائية لنقلها عبر القناة. يعيد مفكك ترميز القناة channel decoder (فك التعديل demodulator) إنشاء السلسلة الإثنائية القادمة (بشكل موثوق)، ويعيد مفكك ترميز المنبع source decoder إنشاء خرج المنبع.

لقد أحدثت فكرة تحويل خرج المصدر التماثلي إلى سلسلة إثنائية ثورةً في العام 1948، وفكرة أنها يجب أن توضع قبل معالجة القناة كانت فكرة ثورية لدرجة أكبر. في هذه الأيام، مع الكاميرات الرقمية، الفيديو الرقمي، الصوت الرقمي... إلخ. فإن فكرة رقمنة أي نوع من مصادر المعلومات أصبحت شائعة حتى بين الأجهزة التقنية. مع ملاحظة أن الواجهة الإثنائية قبل الإرسال عبر القناة هي أمر شائع. على سبيل المثال، كلنا نستشهد على ذلك بسرعة الاتصال بالإنترنت والتي تقاس بالبت في الثانية bits per second. هناك عدد من الأسباب التي تبرر وجود واجهة تخاطب إثنائية بين المنبع والقناة في أنظمة الاتصالات (بمعنى آخر، لماذا أنظمة الاتصالات الرقمية معيارية حالياً؟) وأهم هذه الأسباب هي:

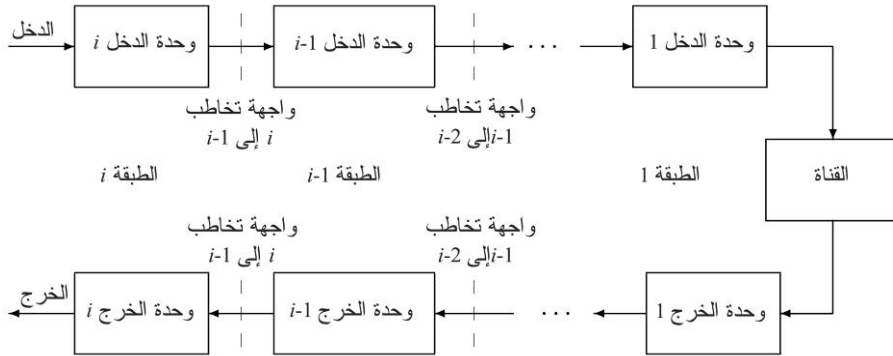
- أصبحت العتاديات الرقمية رخيصة جداً، موثوقة، وصغيرة الحجم، وبالتالي أصبحت الواجهات الرقمية عملية جداً.
- تعدّ الواجهة الإثنائية المعيارية بين المنبع والقناة سهولة التطبيق والفهم، وذلك لكون عمل ترميز/فك ترميز المنبع يكون مستقلاً عن القناة. وبنفس الطريقة عمل ترميز/فك ترميز القناة مستقل عن المنبع.
- تبسط الواجهة الإثنائية المعيارية بين المنبع والقناة ربط الشبكات، التي تحولت إلى إرسال السلاسل الإثنائية من خلال الشبكة.
- واحدة من أهم نتائج نظرية المعلومات لشانون هي أنه إذا كان يمكن للمنبع أن يرسل عبر قناة بأي شكل من الأشكال على الإطلاق، بالتالي يمكنه أن يرسل باستخدام واجهة إثنائية بين المنبع والقناة. وهذا يُعرف بنظرية فصل المنبع/قناة. بما تبقى من هذا الفصل، تمّ التطرق باختصار للمشاكل التالية: ترميز وفك ترميز المنبع، وترميز وفك ترميز القناة. أولاً، جرى تقديم فكرة عن ترتيب الطبقات في نظم الاتصال. كما يتمّ التطرق إلى مثال هام وخاص عن ترتيب الطبقات في (الشكل 1.1)، حيث اعتبر ترميز وفك ترميز المنبع طبقة واحدة، كما اعتبر ترميز وفك ترميز القناة طبقة أخرى.

1.1 واجهات التخاطب المعيارية والطبقات

لدى نظم الاتصالات الكبيرة مثل شبكة الهاتف العامة Public Switched Telephone Network (PSTN) وشبكة الإنترنت، تعقيد لا يصدق حيث إنها تتكون من مجموعة متنوعة وهائلة من المعدات المصنعة من قبل شركات مختلفة وفي أوقات مختلفة وفقاً لمبادئ تصميم مختلفة. مثل هذه الشبكات المعقدة من الضروري أن تكون مستندة على بعض المبادئ المعيارية البسيطة من أجل فهمها وإدارتها والحفاظ عليها. اثنان من المبادئ المعيارية الأساسية هي *واجهات التخاطب المعيارية والطبقات*. تسمح واجهة التخاطب المعيارية للمستخدم أو للمعدات على جانب واحد من الواجهة بتجاهل كل التفاصيل عن الجانب الآخر من الواجهة باستثناء بعض خصائص معينة للواجهة. على سبيل المثال، تسمح واجهة التخاطب الإثنائية² في (الشكل 1.1) بترميز وفك ترميز المنبع بشكل مستقل عن ترميز/فك ترميز القناة.

² لا يكفي تماماً استخدام السلسلة الإثنائية لتحديدها، كما سنتّم مناقشته لاحقاً.

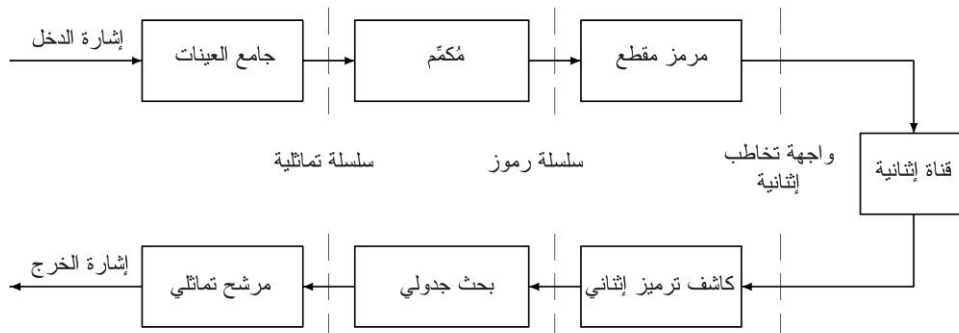
أت فكرة الطبقات في نظم الاتصالات لتفريق وظائف الاتصالات إلى سلسلة من طبقات منفصلة كما هو موضح في (الشكل 2.1).



الشكل 2.1: الطبقات والواجهات: مواصفات الواجهة بين الطبقة i و $i-1$ يجب أن تحدد كيفية الاتصال بين وحدة الدخل i مع وحدة الخرج $i-1$ ، كيفية اتصال وحدات الخرج المناسبة، والأكثر أهمية سلوك دخل/خرج النظام من أجل الواجهة. يستخدم مصمم الطبقة $i-1$ سلوك دخل/خرج الطبقات كي تنتج الطبقة $i-1$ أداء دخل/خرج مطلوب للطبقة i . سبتين الأمثلة القادمة أنه يمكن لعملية متعددة الطبقات من تبسيط تصميم النظام.

تتكوّن كل طبقة من وحدة الإدخال input module في نهاية مدخلات نظام الاتصالات والأقران peer وحدات الخرج في الطرف الآخر. تقوم وحدة الإدخال في الطبقة i بمعالجة المعلومات المستقبلية من الطبقة $i+1$ وترسل المعلومات المعالجة إلى الطبقة $i-1$. تعمل وحدة الخرج النظيرة في الطبقة i بالاتجاه المعاكس، تعالج المعلومات المستقبلية من الطبقة $i-1$ وترسلها إلى الطبقة i .

وكمثال على ذلك، وحدة الإدخال يمكن أن تتلقى موجة صوتية من طبقة أعلى فتقوم بتحويلها إلى سلسلة إثنائية وتمررها إلى الطبقة الأدنى. أما وحدة الخرج النظيرة فإنها تقوم باستقبال السلسلة الإثنائية من الطبقة الأدنى في الخرج وتحولها مرة أخرى إلى موجة كلامية. وكمثال آخر، يتكوّن المودم من وحدة إدخال (معدّل modulator) ووحدة إخراج (فك التعديل demodulator)، يتلقى المعدل سلسلة إثنائية من طبقة الإدخال الأعلى ويولد شكل موجي معدّل مناسب للإرسال عبر القناة. وحدة النظير هي فك التعديل demodulator التي تقوم بالتحكم عن بعد في الطرف الآخر من القناة. تتلقى نسخة طبق الأصل عن الشكل الموجي المرسل وتعيد بناء نسخة طبق الأصل عن السلسلة الإثنائية. وبالمثل، فإن فك التعديل demodulator المحلي هو النظير للمعدّل modulator البعيد. وبالتالي فإن المودم وحدة دخل للاتصال بأحد الاتجاهات ووحدة خرج للاتصال بشكل مستقل بالاتجاه المعاكس. ستتم دراسة المودم في الفصول القادمة بشكل أعمق، وتتضمن الدراسة كيف يؤثر الضجيج على الشكل الموجي للقناة وكيف يؤثر على الموثوقية في استرجاع السلسلة الإثنائية من الخرج. لحد الآن يكون من الكافي ببساطة عرض المعدل على أنه محول من سلسلة إثنائية لشكل موجي، مع فك تعديل النظير على أنه محول عكسي يحول الشكل الموجي إلى سلسلة إثنائية.



الشكل 3.1: تقسيم طبقة ترميز/فك ترميز المنبع إلى 3 طبقات لمنبع شكل موجي. يحول جزء الدخل للطبقة الخارجية الشكل الموجي إلى سلسلة من العينات ويحول جزء الخرج العينات المسترجعة إلى شكل موجي. بعد ذلك يحول المكّم كل عينة إلى مجموعة رموز منتهية، وتعيد الوحدة النظيرة إنشاء العينة. أخيراً ترمز الطبقة الداخلية سلسلة الرموز لأرقام إثنائية.

كمثال آخر، يمكن تقسيم طبقة منبع الترميز/فك الترميز إلى منبع موجي للأشكال الموجية والذي يمكن تقسيمه إلى 3 طبقات كما في (الشكل 3.1). إحدى الميزات لهذه الطبقات هي أن المنابع المتقطعة هي موضوع مهم (يُعالج في الفصل 2) ويناسب الطبقة الداخلية في

(الشكل 3.1). التكميم هي أيضاً موضوع مهم (تدرس في الفصل 3). وبعد فهم هذين الموضوعين، تُصبح منابع الإشارة سهلة على الفهم.

يمكن تقسيم طبقة منبع الترميز/فك الترميز للقناة إلى عدة طبقات، على سبيل المثال، ترميز/فك ترميز. يمكن استخدام مصحح الأخطاء الثنائي كطبقة خارجية بدون تعديل وفك التعديل كطبقة داخلية. لكن سنرى لاحقاً أن هناك عدداً من الفوائد في دمج هذه الطبقات فيما يُسمى التعديل المرمز³ coded modulation. حتى هنا على كل حال إن توضع الطبقات مهم، ولكن الطبقات مُعرّفة بشكل مختلف لأغراض مختلفة.

يجب أن يكون من المؤكد بأن الطبقات ليست بسيطة لتقسيم النظام إلى عناصر. وحدة الدخل ووحدة الخرج النظرية في كل طبقة تغلف كل الطبقات الأدنى، وكل هذه الطبقات الأدنى يمكن النظر إليها على أنها قناة اتصال. وبنفس الطريقة يمكن النظر إلى الطبقات الأعلى على أنها منبع بسيط ووجهة.

افترضت المناقشة السابقة ضمناً أن الطبقات في نظام اتصالات نقطة لنقطة بمنبع واحد، قناة واحدة ووجهة واحدة. ولكن حالات الشبكة يمكن أن تكون أكثر تعقيداً إلى حد كبير، مثل عملية البث broadcasting، حيث إن وحدة إدخال في طبقة واحدة يمكن أن يكون لها عدة وحدات خرج نظيرة. وبنفس الطريقة في الاتصال متعدد النفاذ multi-access يوجد عدة وحدات دخل ولها وحدة خرج نظيرة وحيدة. ويوجد حالات للشبكة يكون فيها مكون وحيد في طبقة واحدة للتخاطب مع وحدات متعددة في طبقة أعلى أو طبقة أدنى. إن استعمال الطبقات مهم في الشبكات مثلما هو مهم في أنظمة الاتصالات نقطة لنقطة. إن الطبقة الفيزيائية في الشبكات هي طبقة ترميز/فك ترميز القناة المناقشة هنا، لكن الكتب عن الشبكات نادراً ما تناقش قضايا هذه الطبقة الفيزيائية بتعمق. إن قضايا التحكم بالشبكة في الطبقات الأخرى مفصلة بشكل كبير عن قضايا الاتصال في الطبقة الفيزيائية المركز عليها هنا. على القارئ العودة إلى [1]، على سبيل المثال لمعالجة قضايا التحكم هذه.

في الفقرات الثلاث التالية ستتم مناقشة كاملة لمكونات (الشكل 1.1)؛ بمعنى آخر الطبقتين الأساسيتين (ترميز/فك ترميز المنبع وترميز/فك ترميز القناة) لنظام اتصالات رقمي نقطة لنقطة، وأخيراً لواجهة التخاطب بينهما.

2.1 منابع الاتصالات

قد يكون المنبع متقطع، بمعنى آخر يمكن أن ينتج سلسلة من رموز متقطعة، مثل الأحرف من الأبجدية الإنكليزية أو الصينية، رموز إثنائية من ملف حاسوبي... إلخ. بدلاً عن ذلك يمكن أن ينتج المنبع شكل موجي تماثلي مثل إشارة صوتية من ميكروفون، خرج حساس، شكل موجي لفيديو... إلخ. أو يمكن أن يكون سلسلة من صور مثل الأشعة السينية X-rays، أو الصور photographs... إلخ. مهما كانت طبيعة المنبع فإن الخرج من المنبع سيشكل عملية تقطيع لسيرورة عشوائية. من غير الواضح لماذا يجب أن تكون مدخلات أنظمة الاتصالات عشوائية، وفي الحقيقة لم تكن مطبقة قبل أن يطور شانون نظرية المعلومات عام 1948.

كانت تعتمد دراسة الاتصالات قبل 1948 (ومعظمها كان بعد 1948) على تحليل فورييه. أساساً إحدى الدراسات درست تأثير تمرير أمواج جيبيّة عبر أنواع مختلفة من الأنظمة والمكونات وأظهرت إشارة المنبع كترابك من أمواج جيبيّة. تبدأ دراستنا للقنوات بهذا النوع من التحليل (غالباً يُسمى نظرية نايكويست Nyquist theory) لتطوير النتائج الأساسية حول التقطيع، التداخل بين الرموز، وعرض الحزمة. على أية حال من وجهة نظر شانون إذا كان المستلم يعلم أن الاتصال يتم بموجة جيبيّة بتردد معلوم. لماذا لا يعيد توليد هذه الموجة على الخرج بدلاً من إرسالها عبر مسافة طويلة؟ أو إذا كان المستلم لا يعلم تردد الموجة الجيبيّة التي يتم الاتصال بها. لماذا لا يرسل ببساطة التردد فقط بدلاً من إرسال كامل الشكل الموجي؟

إن جوهر وجهة نظر شانون كانت تعتمد على أن مجموعة من مخارج المنبع الممكنة تكون ذات فائدة أكبر من أي خرج جزئي. والسبب في ذلك هو أن نظام الاتصالات يجب أن يُصمم لنقل أي خرج للمنبع ممكن حدوثه. إنّ هدف نظام الاتصالات هو تحويل كل خرج ممكن للمنبع إلى إشارة مرسلّة بطريقة بحيث إن هذه الإشارات المرسلّة الممكنة يمكن أن تكون مميزة بشكل جيد عند خرج القناة.

³ هذا المفهوم ليس معيارياً هنا. يشير مفهوم رمز القناة (بما فيها الترميز والتعديل) هو غالباً يشير (هنا وفي أي مكان آخر) إلى المعدل. كما يشار له عادة باسم المودم، مع أن المودم هو جهاز يحتوي كلاً من مُعدّل للاتصال في أحد الاتجاهات و كاشف تعديل للاتصال في الجهة الأخرى.

هناك ضرورة لقياس الاحتمالية لمجموعة الخرج الممكنة للمنبع لتمييز المقادير النموذجية من غير النموذجية، إن وجهة النظر هذه تقود إلى مناقشة كافة مكونات أنظمة الاتصالات.

1.2.1 ترميز المنبع

وظيفة ترميز المنبع في (الشكل 1.1) هي تحويل الدخل من شكله الأصلي إلى سلسلة بتات. كما ناقشنا سابقاً، الأسباب الرئيسية لهذا التحويل إلى سلسلة بتات هي: رخص العتاد الرقمي، واجهات معيارية، طبقات، ونظرية الفصل المنبع/قناة.

أبسط تقنيات ترميز المنبع تُطبق على منابع متقطعة وببساطة تتطلب تمثيل كل رموز المنبع المتتابة بسلسلة أرقام إثنائية. فعلى سبيل المثال، الأحرف من 27 رمز للأبجدية الإنكليزية (تتضمن رمز الفراغ SPACE) يمكن ترميزها بكتل blocks كل كتلة من 5 بتات. وبما أنه يوجد 32 كتلة مميزة وكل كتلة تتألف من 5 بتات، كل حرف يتم تمثيله بكتلة مميزة ويتبقى بضع كتل يمكن استخدامها للتحكم أو لتمثيل رموز أخرى. بنفس الطريقة، يمكن تحويل الأحرف الكبيرة، الأحرف الصغيرة، وعدد كبير من الرموز الخاصة إلى كتل كل كتلة من 8 بتات (بايت byte) وذلك باستخدام ترميز ASCII المعياري.

يعالج الفصل 2 الترميز للمنابع المتقطعة وتعميمات التقنيات بمختلف الطرائق. على سبيل المثال يمكن تقسيم الرموز المدخلة إلى m صف والتي تمثل بكتل من الأرقام الإثنائية. عموماً يمكن أن تعمم كتل الأرقام الإثنائية إلى سلاسل من الأرقام الإثنائية متغيرة الطول. سوف نجد أن أي منبع متقطع معطى مميز بأبجديته ووصفه الاحتمالي، يملك مقداراً يُسمى الانتروبية $entropy$ مرتبط به. بيّن شانون أن انتروبية المنبع تساوي أصغر عدد من الأرقام الإثنائية لكل رمز منبع مطلوبة لتمثيل خرج المنبع بأرقام إثنائية وبطريقة يمكن استرجاع رموز المنبع من السلسلة المرزومة.

تولد بعض المنابع المتقطعة رموز منتهية متقطعة، مثل رسائل البريد الإلكتروني، والتي تكون غير مرتبطة إحصائياً بأي رموز منتهية مُولدة في أوقات أخرى. المنابع المتقطعة الأخرى، مثل خرج حساس رقمي، يولد عملياً سلسلة لانتهائية من الرموز ذات مواصفات إحصائية معروفة. ستناسب النماذج البسيطة في الفصل 2 أنواع المنابع اللاحقة، ولكن النقاش حول ترميز المنبع في الفقرة 9.2 عموماً كافٍ لتغطية أنواع المنابع، وعملياً أي نوع آخر للمنابع.

يُسمى التقريب الأكثر بساطة لترميز منبع تماثلي بمحول رقمي تماثلي (A/D). أولاً يتم تقطيع الشكل الموجي للمنبع بمعدل تقطيع كافٍ (يُسمى "معدل نيكوست" Nyquist rate). يتم تكميم كل عينة بعدد بتات كافٍ لاسترجاعها. على سبيل المثال، في معيار الهاتف، يتم تقطيع الشكل الموجي الصوتي بمعدل 8000 عينة بالثانية؛ يتم تكميم كل عينة إلى مستوى من 256 مستوى ويتم تمثيلها ببايت وبالتالي نحصل على ترميز المنبع بمعدل 64k bps.

إضافة إلى الهدف الأساسي في تحويل الشكل الموجي إلى بتات، الهدف الآخر هو أن يكون رمز المنبع يعمل بشكل فعال قدر الإمكان؛ بمعنى آخر إن إرسال أقل عدد بتات ممكن بشرط أن تكون كافية لإمكانية استرجاع العينات عند الخرج. في هذه الحالة يُسمى ترميز المنبع ضغط البيانات data compression. على سبيل المثال يستطيع رمز الكلام الحديث modern speech coder ترميز الكلام بجودة الكلام على الهاتف بمعدل من مرتبة 6-16kb/s بدلاً من 64kb/s.

إن مسائل أخذ العينات والتكمية مفصولة بشكل كبير، ويستعرض الفصل 3 المبادئ الأساسية للتكمية عند استخدام منبع ترميز متقطع، ومن الممكن تكمية كل عينة بشكل منفصل عن بقية العينات، ولكن عادةً يُفضل تقسيم العينات إلى n صف وبعدها يتم تكمية الـ n صف الناتجة. كما سنرى لاحقاً، غالباً يُفضل اعتبار خرج المكمم كخرج لمنبع متقطع وبعدها نستخدم المبادئ في الفصل 2 لترميز الرموز المكممة وهذا مثال آخر عن الطبقات.

إن أخذ العينات هو أحد المواضيع في الفصل 4. إن الهدف من أخذ العينات هو تحويل المنبع التماثلي إلى سلسلة من الأرقام الحقيقية؛ بمعنى آخر في الزمن المتقطع منبع مطال تماثلي. هناك عدة طرائق أخرى، عدا أخذ العينات، لتحويل المنبع التماثلي إلى منبع بالزمن المتقطع. تتضمن الطريقة العامة عملية التقطيع كحالة خاصة "وهي توسيع الشكل الموجي للمنبع إلى توسع متعامد منظم orthonormal واستخدام معاملات ذلك التوسع لتمثيل خرج المنبع. نظرية التوسعات المتعامدة المنظمة هي موضوع رئيس للفصل 4. وتشكل الأساس لتقريب الإشارة الفراغية لترميز/ فك ترميز القناة. وهكذا يقدم لنا الفصل 4 أساس التعامل مع الأشكال الموجية لكل من المنابع والفنوتات.

3.1 قنوات الاتصال

سوف نناقش القناة وترميز القناة في نظام اتصالات رقمي عام.

بشكل عام، يُنظر للقناة على أنها جزء من نظام الاتصالات بين المنبع والوجهة وتكون مفروضة وليست تحت سيطرة المصمم. وهكذا بالنسبة لمصمم رمز المنبع، يمكن أن تكون القناة رقمية بدخل وخرج ثنائي، بالنسبة لتصميم مودم خط الهاتف يمكن أن تكون قناة صوت 4kHz، أما بالنسبة لتصميم كابل المودم يمكن أن يكون كابل محوري قد يصل إلى طول معين، مع فرض قيود معينة على عرض الحزمة. عندما يتم اتخاذ القناة لتكون وسط فيزيائي، المضخمات، الهوائيات، وأشعة الليزر... إلخ. تربط الشكل الموجي المرز بالوسط الفيزيائي عندها يمكن اعتبارها كجزء من القناة أو جزء من رمز القناة. الأكثر شيوعاً هو اعتبار هذه الأدوات المزوجة كجزء من القناة مفصولة تماماً بتصميمها عن تصميم باقي رمز القناة. وهذا بالطبع هو مثال آخر عن الطبقات.

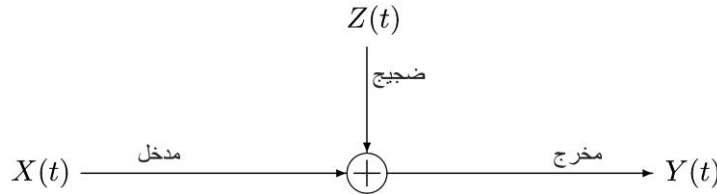
يُسمى ترميز وفك ترميز القناة عادةً تعديل وفك تعديل رقمي على الترتيب وذلك عندما تكون القناة وسط فيزيائي (مع أو بدون مضخمات، هوائيات، ليزر... إلخ) وقد جاءت هذه المصطلحات من أيام الاتصالات التماثلية حيث يعبر التعديل عن عملية الجمع بين إشارة الترميز المنخفض مع الحامل الجيبي عالي التردد، وبالتالي وضع الإشارة في حزمة الترددات المناسبة للنقل والمتطلبات التنظيمية. يمكن تعديل الإشارة التماثلية بالمطال، التردد، أو الطور، مثل الحامل الجيبي، على أية حال يمكن استرجاع الشكل الموجي الأصلي (في حال عدم وجود ضجيج) وذلك بعملية فك التعديل.

بما أن الاتصالات الرقمية حلت محل الاتصالات التماثلية بشكل كبير، بقيت المصطلحات تعديل/فك تعديل، ولكن أصبحت تعبر عن كامل عملية الترميز وفك الترميز الرقمي. في معظم الحالات، يتم تحويل السلسلة الإثنائية أولاً لشكل موجي قاعدي baseband waveform والشكل الموجي القاعدي يتم تحويله إلى تمرير الحزمة bandpass بنفس نوع الإجراءات المستخدمة في التعديل التماثلي. وكما سنرى، الجزء الصعب في هذه المسألة هو تحويل الأرقام الإثنائية إلى أشكال موجية قاعدية. ومع ذلك، فإن كامل هذه العملية ستعبر عن التعديل وفك التعديل، والتحويل من baseband إلى passband وبالعكس ستعبر عن تحويل التردد frequency conversion.

كما هو الحال في دراسة أي جزء من النظام، يُنظر للقناة عادةً من حيث مدخلاتها الممكنة، خرجها الممكن، ووصف تأثير الدخل على الخرج. عادةً ما يكون هذا الوصف احتمالياً. إذا كانت القناة ببساطة عبارة عن نظام خطي غير متغير مع الزمن (مرشح مثلاً) يمكن توصيفها بالكامل من خلال استجابتها النبضية أو الاستجابة الترددية. ومع ذلك للقنوات هنا (والقنوات عملياً) عنصر إضافي وهو الضجيج.

لنفترض أنه لا يوجد ضجيج وأنه يمكن إرسال مستوى فولطية وحيد مُدخل. وبالتالي يتم تمثيل مستوى الفولطية بالتوسع الثنائي اللانهائي، من الممكن من حيث المبدأ إرسال عدد لا نهائي من الأرقام الإثنائية من خلال إرسال عدد حقيقي وحيد. عملياً هذا الأمر مثير للسخرية وتحديداً بسبب الضجيج الذي يحد من عدد البتات التي يمكن تمييزها بشكل موثوق. مرة أخرى كان شانون هو من أدرك عام 1948 أن الضجيج هو السبب الأساسي في الحد من أداء أنظمة الاتصالات.

يشمل نموذج القناة الأكثر شيوعاً على الشكل الموجي للدخل $X(t)$ ، الشكل الموجي للضجيج الجمعي $Z(t)$ ، والشكل الموجي للخروج $Y(t) = X(t) + Z(t)$ والذي هو مجموع الدخل والضجيج، كما هو موضح في (الشكل 4.1). كل شكل من هذه الأشكال الموجية يُعتبر عملية عشوائية. سوف تتم دراسة العمليات العشوائية في الفصل 7، ولكن يمكن اعتبارها بشكل بديهي كأشكال موجية مختارة بطريقة احتمالية. الضجيج $Z(t)$ ينمذج كضجيج غوصي أبيض (ستتم دراسته وشرحه لاحقاً). عادةً يتقيد الدخل بالاستطاعة وعرض الحزمة.



الشكل 4.1: قناة ضجيج أبيض غوصي جمعي

لاحظ أن أي قناة بدخل $X(t)$ وخرج $Y(t)$ ، يمكن تعريف الضجيج على أنه $Z(t) = Y(t) - X(t)$. وبالتالي يجب أن يكون هناك شيء

آخر لنموذج قناة الضجيج الجمعي المعبر عنها في (الشكل 4.1). حتى يسمى العنصر الإضافي المطلوب للضجيج جمعي يجب أن تكون خواصه الاحتمالية لا تعتمد على الدخل.

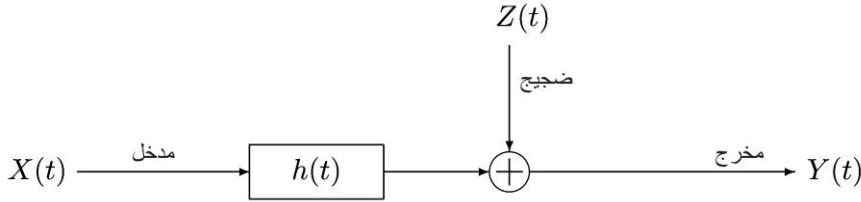
في النموذج الأكثر عمومية المسمى قناة غوسية خطية *linear Gaussian channel*، يتم ترشيح الشكل الموجي للدخل $X(t)$ أولاً بمرشح خطي ذي استجابة نبضية $h(t)$ ، وبعد ذلك يجمع له بشكل مستقل ضجيج أبيض غوسي $Z(t)$ ، كما هو موضح (بالشكل 5.1)، وبالتالي يكون خرج القناة هو

$$Y(t) = X(t) * h(t) + Z(t)$$

حيث "*" تعبر عن جداء الطي، ونلاحظ أن Y عند الزمن t هو تابع لـ X على مجال زمني، أي

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t - \tau)h(\tau)d\tau + Z(t)$$

غالباً ما تكون القناة الغوسية الخطية نموذجاً جيداً للاتصالات السلكية والاتصالات اللاسلكية الموجهة. وعندما يفشل المهندسون والمجالات والنصوص عن وصف قناة الدراسة، فإن هذا النموذج يعتبر رهاناً جيداً.



الشكل 5.1: نموذج قناة غوسية خطية

إن القناة الغوسية الخطية نموذج رديء نوعاً ما في الاتصالات النقالة غير الموجهة، فغالباً ما يوجد عدة مسارات من المنبع للوجهة. وبسبب حركة كل من المنبع والوجهة أو بسبب الأجسام العاكسة فإن هذه المسارات تتغير مع الزمن بطريقة أفضل ما يمكن نمذجتها كطريقة عشوائية. أفضل نموذج للاتصالات النقالة هو استبدال المرشح غير المتغير مع الزمن $h(t)$ في (الشكل 5.1) بمرشح خطي يتغير مع الزمن عشوائياً $h(t, \tau)$ ، وهذا يمثل المسارات المتعددة كمتغيرات مع الزمن. وهكذا يصبح الخرج:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t - u)H(u, t)du + Z(t)$$

سوف تتم دراسة هذه القنوات المتغيرة عشوائياً في الفصل 9.

1.3.1 ترميز القناة (التعديل)

إن وظيفة صندوق مرمز القناة في (الشكل 1.1) تمثل السلسلة الإثنائية عند واجهة المنبع/قناة بشكل موجي للقناة. يُسمى التقريب المبسط الجزئي تعديل المطال النبضي الثنائي (2-PAM) binary pulse amplitude modulation. بفرض $\{u_1, u_2, \dots\}$ تعبر عن السلسلة الإثنائية المستلمة، حيث كل u_n تأخذ ± 1 (بدلاً من الحالة التقليدية $1/0$) ولتكن موجة بدائية معلومة مثل نبضة مستطيلة أو التابع $\sin(\omega t)/(\omega t)$. نفترض أن الأرقام الإثنائية تدخل بمعدل R بت بالثانية (bps)، السلسلة u_1, u_2, \dots تُمثل بالشكل الموجي $\sum_n u_n p(t - n/R)$.

حتى بمخطط التعديل المبسط هذا، هناك العديد من الأسئلة المهمة، مثل كيف يتم اختيار الموجة البدائية $p(t)$ لتتوافق مع القيود المفروضة من التردد وكشف الأرقام الإثنائية بشكل موثوق من الشكل الموجي المستقبل بوجود الضجيج والتداخل بين الرموز. يبين الفصل السادس قواعد التعديل وفك التعديل، يُعمم المخطط البسيط 2-PAM بعدة طرائق. على سبيل المثال، في التعديل متعدد المستويات بداية يتم تقسيم البتات المستقبلية إلى m صف. يوجد $M = 2^m$ تميز الـ m صف، وفي تعديل M-MAP، يتم تمثيل كل صف بقيمة عددية مختلفة (مثلاً $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7$) من أجل $M = 8$. يتم تمثيل السلسلة u_1, u_2, \dots من هذه القيم بالشكل الموجي $\sum_n u_n p(t - mn/R)$. لاحظ أن معدل إرسال النبضات أصبحت أصغر بـ m مرة عن الحالة السابقة، ولكن يوجد 2^m قيمة مختلفة للتمييز عند المستقبل من أجل كل نبضة أولية.

يمكن أن يكون للشكل الموجي المعدّل شكل موجي قاعدي عقدي (الذي يُعدل ليلائم تمرير الحزمة passband شكل موجي حقيقي). في المخطط المسمى التعديل المطالي التربيعي (QAM) quadrature amplitude، تقسم سلسلة البتات أيضاً إلى m صف، ولكن هنا يوجد تمثيل للمصفوفة الثنائي بمجموعة أعداد عقدية $M = 2^m$ ، يتم تحويل السلسلة u_1, u_2, \dots الناتجة عن هذا التمثيل إلى شكل موجي عقدي

$$\sum_n u_n p(t - mn/R)$$

أخيراً، بدلاً من استخدام إشارة نبضية ثابتة $p(t)$ وضربها بقيم عقدية أو حقيقية من المجموعة M ، يمكن اختيار M إشارة نبضية مختلفة $p_1(t), \dots, p_M(t)$. وهذا يتضمن إفعال الإزاحة الترددية frequency shift keying، تعديل موقع النبضة pulse position modulation، تعديل الطور phase modulation ومجموعة كبيرة من الاستراتيجيات الأخرى.

من السهل التفكير بعدة طرائق لتمثيل سلسلة الأرقام الإثنائية بشكل موجي. يجب أن نوجد تقريباً هندسياً بسيطاً "إشارة فراغية signal-space"، تعتمد على نتائج الفصل الرابع، للنظر لهذه التركيبات المختلفة بطريقة متكاملة. بسبب الضجيج على القناة، فإن الشكل الموجي المستقبل يكون مختلفاً عن الشكل الموجي المرسل. الوظيفة الأساسية لفك التعديل هي اكتشاف الشكل الموجي المرسل. يحاول الكاشف اختيار سلسلة الدخول الممكنة الأكثر احتمالاً لتعطي الشكل الموجي المستقبل. يعرض الفصل السابع الخلفية في العمليات العشوائية الضرورية لفهم هذه المسألة، ويستخدم الفصل الثامن التقريب الهندسي للإشارة الفضائية من أجل تحليل وفهم مسألة الكشف.

2.3.1 تصحيح الأخطاء

عادةً ما يكون احتمال الخطأ كبيراً في تقنيات التعديل/فك التعديل البسيطة. أحد الحلول الممكنة هو فصل مرمز القناة إلى طبقتين، الأولى مرمز مصحح الأخطاء error-correction code، والثانية معدّل بسيط. كمثال بسيط جداً يمكن تقليل معدل نقل البتات في مرمز القناة بمعامل قدره 3، وبعد ذلك يمكن تكرار كل دخل ثنائي 3 مرات قبل إدخاله للمعدّل. إذا كان على الأغلب واحد من أصل 3 أرقام إثنائية تخرج من جهاز فك التعديل تكون خطأ، يمكن تصحيحها بقاعدة الأغلبية في المرمز، وبالتالي يمكن تخفيض احتمال الخطأ في النظام مقابل كلفة كبيرة في معدل نقل البيانات. المخطط أعلاه (التكرار في الترميز متبوعاً بقاعدة الأغلبية في فك الترميز) هو مثال بسيط جداً عن ترميز مصحح الأخطاء. لسوء الحظ، بهذا المخطط نحصل على احتمالات خطأ صغيرة فقط بتكلفة معدل إرسال قليل.

ما عرضه شانون كان حقيقة غير بديهية وهي أنه يمكن أن تُنجز طرائق الترميز المعقدة احتمال خطأ ضئيل بشكل اعتباطي لأي معدل بيانات أعلى من قيمة تُعرف بسعة القناة channel capacity. سعة القناة هي تابع للمواصفات الاحتمالية للخروج المشروط لكل دخل ممكن. بالمقابل، من غير الممكن الحصول على احتمال خطأ منخفض عند معدلات أعلى من سعة القناة. يوجد في الفصل الثامن برهان مختصر لنظرية ترميز القناة channel coding theorem، ولكن على القراء مراجعة النصوص عن نظرية المعلومات Information Theory مثل [7] غاللاجير (1968) و [4] توماس (2006) من أجل تغطية التفاصيل.

أهم نتيجة لنظرية المعلومات هي سعة القناة من أجل قناة ضجيج غوصي أبيض جمعي محدود الحزمة. إذا كانت استطاعة الدخول محدودة P ، عرض الحزمة محدودة W ، واستطاعة الضجيج في كل وحدة عرض الحزمة هي N_0 ، بالتالي تكون السعة (مقدرة بعدد البتات في الثانية bits per second) هي:

$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{P}{N_0 W} \right)$$

في السنوات القليلة الماضية فقط، أظهرت مخططات ترميز القناة أنه يمكن تقريب سعة القناة هذه. الاستعمالات القديمة لرمز مصحح الأخطاء غالباً ما كانت جزءاً من نظام بطبقتين، حيث يلي مرمز مصحح الأخطاء الرقمي بمعدل. عند المستقبل، أولاً يتم فك تعديل الشكل الموجي إلى نسخة مضحجة لسلسلة مرمزة، وبعد ذلك يتم فك ترميز هذه النسخة المضحجة باستخدام فك ترميز مصحح الأخطاء. حالياً في الحالة العملية غالباً ما يتم تحقيق أفضل أداء من خلال الجمع بين ترميز مصحح الأخطاء والتعديل مع بعضهم بمخطط تعديل مرمز. سواءً كان مصحح الأخطاء والتعديل التقليدي بطبقات منفصلة أم مجتمعاً، فإن الجهاز الذي

يقوم بتعديل البيانات بأحد الاتجاهات وفك التعديل بالاتجاه الآخر يسمى مودم modem. لقد تطور موضوع تصحيح الأخطاء خلال السنوات الـ 50 الماضية لدرجة أنه تركزت كتب ودراسات طويلة ومعقدة على هذا الموضوع انظر مثلاً [15] Lin and Costello (2004) و [6] Forney (2005)). يقدم هذا الكتاب مقدمة عن رموز تصحيح الأخطاء. الموضوع الأخير في هذا النص هو ترميز وفك ترميز القنوات اللاسلكية. يولي الاهتمام الكبير هنا إلى نمذجة الوسط الفيزيائي اللاسلكي. تخضع القنوات اللاسلكية إضافة للضجيج الجمعي إلى التقلبات العشوائية في قوة المسارات المتعددة بين المرسل والمستقبل. إن تفاعل هذه المسارات يسبب الخفوت Fading. وعلينا أن ندرس كيف يؤثر على الترميز، اختيار الإشارة، التعديل، والكشف. تُستخدم الاتصالات اللاسلكية أيضاً لمناقشة قضايا مثل قياس القناة، وكيفية استخدام هذه القياسات عند الدخول والخروج. وأخيراً هناك دراسة وجيزة للنفاد المتعدد بتقسيم الشيفرة Code Division Multiple Access (CDMA)، والذي يربط العديد من الموضوعات في النص.

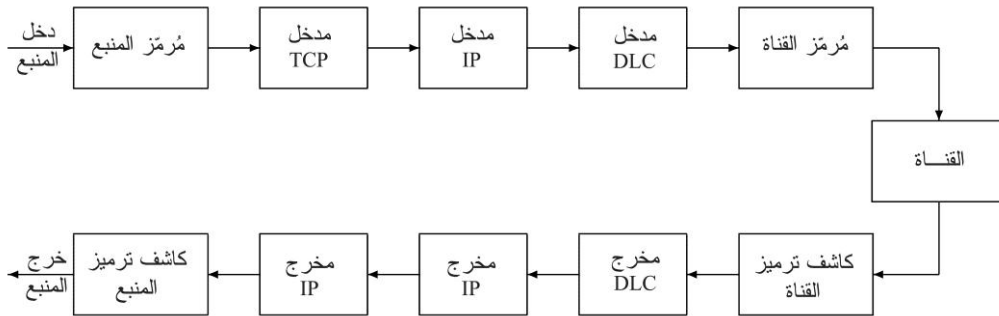
4.1 الواجهة الرقمية

إن الواجهة بين طبقة ترميز المنبع وطبقة ترميز القناة هي سلسلة من البتات. على كل حال، هذا الوصف لا يعطي الصورة كاملة. إن عوامل التعقيد الأساسية هي الآتي:

- النسب غير المتساوية: معدل البتات الخارجة من مرمر المصدر لا يساوي غالباً معدل البتات التي تدخل مرمر القناة.
- الأخطاء: تصمم مفككات ترميز المصدر لفك ترميز نسخة طبق الأصل للسلسلة المرمزة في المصدر ولكن مفككات ترميز القناة تسبب أخطاء عرضية.
- الشبكات: يرسل خرج مرمرات المصدر عبر الشبكات، تنتقل بشكل تسلسلي عبر عدة قنوات، وكل قناة في الشبكة تُحمل الخرج من عدة مرمرات مصدر مختلفة.

يظهر كلا العاملين الأول والثاني في أنظمة الاتصال نقطة إلى نقطة وفي الشبكات. ويعالجان في أغلب الأحيان على نحو خاص في أنظمة نقطة إلى نقطة، في حين يجب أن يعالجا بطريقة قياسية في الشبكات. كذلك يجب أن يعالج العامل الثالث بطريقة قياسية في الشبكات.

المقاربة المعتادة لهذه المشاكل في الشبكات هي تحويل الواجهة الإثنائية البسيطة إلى طبقات متعددة كما هو مبين (بالشكل 6.1).



الشكل 6.1: تبديل الواجهة الإثنائية في (الشكل 5.1) بثلاث طبقات من وجهة نظر الإنترنت. هناك نموذج بروتوكول التحكم بالإرسال TCP مرتبط بكل زوج مصدر- وجهة، وهو مسؤول عن اكتشاف الخطأ من نهاية لنهاية وتخفيض معدل إرسال المنبع عندما تصبح الشبكة مزدحمة. ويوجد نموذج بروتوكول IP مرتبط بكل عقدة في الشبكات، وهذه النماذج تعمل سوية لتوجيه البيانات عبر الشبكة ولتخفيض الازدحام. أخيراً يوجد نموذج (DLC) data link layer مرتبط بكل قناة، والذي ينجز مطابقة معدل النقل وإصلاح الخطأ في القناة. في مصطلحات الشبكات، ندعى القناة مع مرمرها ومفكك ترميزها بالطبقة الفيزيائية.

كيف تشغل الطبقات في (الشكل 6.1) وتعمل معاً هذا هو عنوان مركزي في دراسة الشبكات ومدروس بالتفصيل في مراجع الشبكات مثل المرجع [1] Bertsekas و Gallager (1992). لم نركز على هذه المواضيع بالتفصيل هنا واكتفينا بمقدمة مختصرة وبعض التعليقات المطلوبة فيما بعد.

1.4.1 سمات الواجهة الرقمية في الشبكات

يقسم خرج رمز المنبع عادةً إلى رزم (وفي عدة حالات، مثل ملفات وبيانات البريد الإلكتروني، والتي تقسم بنفس هذه الطريقة). تضيف كل طبقة من طبقات الشبكة تضيف بعض المعلومات إلى هذه الرزم، حيث يتم إضافة عنوان الترويسة في طبقة TCP (بروتوكول التحكم بالإرسال) وIP (بروتوكول الإنترنت) وإضافة الترويسة والذيل في طبقة DLC. وعليه فالذي يدخل رمز القناة هو سلسلة من الإطارات ومكونات الإطار مبنية (بالشكل 7.1).

ذيلية DLC	رزمة المنبع المرمزة	ترويسة TCP	ترويسة IP	ترويسة DLC
--------------	---------------------	---------------	--------------	---------------

الشكل 7.1: بنية إطار البيانات باستخدام طبقات الشكل 6.1.

بيانات الإطارات، الموزعة بشكل مثالي كما هو محتاج إليها، مرتبة ويتم تدفقها إلى رمز القناة بشكل متزامن. تزود DLC الترويسة والذيل للإطار والتي يجب أن يحتويان على المعلومات المطلوبة من أجل استقبال الإطار وتحويل البتات المتدفقة إلى إطارات وإعادة التعبئة المثالية. كذلك تزود DLC الحماية ضد أخطاء فك الترميز الناتجة عن مفكك ترميز القناة.

نموذجياً، يتم ذلك باستخدام 16 أو 32 بت فحص الزوجية في ذيل الإطار. كل مجموعة فحص الزوجية تحدد عدد الواحدات الموجودة في الإطار هل هو عدد فردي أم زوجي. وهكذا إذا حدث خطأ في الإرسال سيحدث ولو خطأ واحد على الأقل في بتات فحص الزوجية عند الاستقبال في DLC. هذا النوع من DLC مستخدم في القنوات التي تسمح بالإرسال في الاتجاهين. وهكذا عندما يكتشف إطار خطأ فإنه يرفض ويجب على الإطار المعاد أن يطلب إعادة إرسال الإطار الخاطئ. وبالتالي يجب على بداية إطار DLC أن تحتوي على معلومات حول الإطارات التي تسير في كلا الاتجاهين. لمعرفة تفاصيل أكثر عن هكذا بروتوكولات انظر المرجع [1].

كسؤال واضح عن هذه النقطة، لماذا يحصل الاتجاه الخاطئ عادةً في الطبقة الفيزيائية وطبقة DLC. أيضاً، كشف الخطأ وإعادة الإرسال عادةً ما تكون في طبقة DLC وليس ضمن الطبقة الفيزيائية؟ كجواب لذلك هو إذا حذف التصحيح من أحد الطبقات وبالتالي سيزيد من احتمالية الخطأ. وفي نفس الوقت، جمع كلتا الإجهاديتين واستخدام التغذية الراجعة في الطبقة الفيزيائية يمكن أن تؤدي إلى احتمالات خطأ أقل. تستخدم عادةً كلتا الطبقتين في التطبيقات بسبب مشاكل توحيد المقياس، ولكن في حالات الاتصال الصعبة جداً، توحيد منهج كلتا الطبقتين يمكن أن يكون أفضل. من وجهة النظر التعليمية، من الأفضل فهم جيد لترميز القناة وفك ترميزها باستخدام الإرسال في اتجاه واحد قبل تطبيق الإرسال في كلا الاتجاهين.

عندما يتم استلام الإطار من قبل مستقبل DLC، فإنه يأخذ العنوان الراسي والذيل ورزمة المعطيات ضمن طبقة IP. العنوان الموجود في رأس الإطار في طبقة IP هو لتحديد فيما إذا كان الإطار ضمن اتجاهه الصحيح أو يجب أن يكون في اتجاه آخر. وهكذا تعالج طبقة IP قرار التوجيه، وكذلك في بعض الأحيان تأخذ قرار حذف الرزم إذا كانت الإطارات طويلة جداً عند عقدة ما.

عندما تصل الرزمة في النهاية إلى وجهتها، تأخذ طبقة IP العنوان الراسي وتحوّل الرزمة بعد ذلك إلى طبقة TCP. بعد ذلك طبقة TCP تعالج الرزمة حيث تذهب عبر طور إصلاح الخطأ⁴ إلى مرحلة تحسّين الخطأ كتلك الطبقة في DLC التي تعالج وتكرر الحزم المقبولة بدون TCP header باتجاه مرحلة فك الترميز. طبقة TCP وطبقة IP مسؤولتان أيضاً عن تنظيم الازدحام، الذي يتطلب تخفيف معدل الإرسال من قبل المرسل أو حذف مصادر الإرسال غير المتحكم بها.

من ناحية المصادر والقنوات، تزود هذه الطبقات العديدة فهم جيد للواجهة الرقمية بين المنبع والقناة. يحوّل تشفير المصدر خرجة إلى سلسلة بتات ومن ناحية المنبع جميع هذه الطبقات هي عبارة عن قنوات مفيدة من أجل إرسال سلسلة البتات إلى وجهتها الصحيحة. على نحو مماثل، دخل القناة هو عبارة عن سلسلة بتات بمعدل دخل متزامن، وخرجها هو نفس السلسلة ولكن بتأخير أو بمعدل خطأ ما.

وهكذا كلا المنبع والقناة لديهما واجهات رقمية، والحقيقة أن هذه الواجهات مختلفة قليلاً بسبب الطبقات والتي هي ميزة. يتوجه ترميز

⁴ حتى بعد كل هذه المحاولات التطبيقية لمنع الأخطاء، فإن الأخطاء العرضية لا يمكن تجنبها. بعضها يحدث من المداخلات البشرية، والتي لا تسبب أي فرق حقيقي وبعضها فقط له تداعيات. إن هدف مهندسي الاتصالات والشبكات هو منع كل هذه الأخطاء التي لا مفرّ منها، لكن على الأقل تقليل احتمالها قدر المستطاع.

المنبع نحو تقليل معدل بتات الخرج (ربما بقيود التأخير أو التشويه) لكن يمكن تجاهل القناة الفيزيائية أو القنوات من أجل إمكانية إرسالها. وبشكل مشابه لترميز القناة يمكن تجاهل المنبع والتركيز على زيادة معدل إرسال البتات (ربما بقيود التأخير ومعدل الخطأ).

5.1 قراءة متممة

إن النص الممتاز الذي يعالج العديد من المسائل هنا مع تغطية المزيد من التفاصيل لكن أقل تعمقاً في Proakis [21]. وهناك نص آخر جيد وعام هو Wilson [34]. العمل الكلاسيكي الذي يدخل فكرة فضاء الإشارة في الاتصالات الرقمية هو Wozencraft and Jacobs [35]. كما يتم تزويد معالجات جيدة للسويات الجامعة الدنيا في [22] و [12] و [23]. يمكن للقراء الذين يفتقدون للخلفية الضرورية في الاحتمالات أن يعودوا إلى [2] أو [24]. كما تعطى المعالجات الأكثر تقدماً عن الاحتمالات في [8] و [25]. لا يزال يبقى النص الكلاسيكي عن الاحتمالات للطالب الجاد من خلال Feller [5]. يمكن إيجاد مقررات أخرى عن نظرية المعلومات، على سبيل المثال في [7] و [4]. كما يتاح العمل الأصلي من قبل شانون في [27] بشكل سحري ومذهل.

أصبح حقل ترميز وفك ترميز القناة ذا أهمية لكن الجزء الأكثر خصوصية هو عن نظم الاتصالات. سنتطرق إلى الترميز وفك الترميز في الفصل الثامن، لكن ذلك يتطلب معالجة منفصلة لتطوير الموضوع بشكل معمق. في MIT يكون النص هنا مستخدماً لأول سلسلتي الحدود والحد الثاني يستخدم مجموعة هامة من الملاحظات من قبل Forney [6] المتاح على شبكة الويب. وكبديل، يوجد في [15] خيار جيد من خلال عدة نصوص عن الترميز وفك الترميز.

من المحتمل أن تكون الشبكات اللاسلكية في مقدمة الأبحاث الرئيسية في الاتصالات الرقمية الحالية. يزودنا الفصل التاسع بمقدمة مفصلة عن هذا الموضوع، لكن العديد من النصوص تطور الاتصالات اللاسلكية بشكل معمق أكثر من ذلك. ينصح بالاطلاع على أعمال Tse and Viswanath [32] و Goldsmith [9]، كما يعتبر [33] مرجعاً جيداً لتقنيات الطيف المنثور.

2. ترميز المصادر المقطّعة

1.2 مقدمة

بيّن الشكل (1.1) مخططاً كئلياً لنظام اتصال رقمي من نقطة إلى نقطة. يحوّل مُرَمِّز المصادر المقطّعة سلسلة من رموز المصدر إلى سلسلة من الأرقام الإثنائية، ومن المفضل استخدام أرقام قليلة قدر الإمكان لتمثيل كل رمز. يقوم مفكك الترميز بعملية معاكسة. بشكل مبدي عند فصل المصدر عن القناة نتجاهل إمكانية أن تحدث أخطاء في مفكك ترميز القناة، ونفترض أن مفكك ترميز المصدر يعمل عند خرج رمز المصدر.

سنميّز أولاً بين ثلاثة أنواع مهمة من المصادر:

• المصادر المقطّعة

إن خرج المصدر المقطّع هو سلسلة رموز من أبجدية γ مقطّعة معروفة. يمكن أن تكون هذه الأبجدية محارف رقمية، أو المحارف على لوحة مفاتيح الحاسب، أو أحرفاً إنكليزية، أو محارف صينية، أو رموزاً موسيقية (مرتبة ضمن طريقة منهجية)، أو أرقاماً إثنائية. سنفترض أن الأبجدية المقطّعة في هذا الفصل تحتوي على عدد نهائي من الرموز.⁵ من المناسب، في أغلب الأحيان، اعتبار سلسلة الرموز كأنها تحدث بمعدلات ثابتة خلال الزمن، ولكن ليس من الضروري إقحام الزمن هنا (إذ يمكن توطيّن سلسلة المصدر في ملف حاسوبي وإجراء الترميز على نحو غير مباشر). يركز هذا الفصل على ترميز المصادر المقطّعة وفك ترميزها. يُعد الفصل الثالث من المرجع [7] والفصل الخامس من المرجع [4] مراجع إضافية لترميز المصدر. تُقدّم الفقرات 1.4 لغاية 3.4 من المرجع [22] معالجة جزئية أساسية لهذه المسألة.

• مصادر شكل الموجة التماثلي

خرج المصدر التماثلي، في أبسط حالة، هو شكل موجة حقيقي تماثلي، يُمثّل إشارة كلامية مثلاً. تستخدم كلمة تماثلي لتأكيد إمكانية أن يكون شكل الموجة اعتباطياً وليس مقيداً بقيم للمطال من مجموعة قيم مقطّعة. ومن المفيد دراسة مصادر الإشارات التماثلية مخارج عبارة عن توابع عقدية للزمن؛ سنناقش لاحقاً كلاً من مصادر شكل الموجة الحقيقي والعقدي.

بشكل أعمّ، يمكن أن يكون خرج المصدر التماثلي صورة (ممثلة بتابع كثافة للموقع الأفقي/العمودي) أو فيديو (ممثلة بتابع كثافة للموقع الأفقي/العمودي والزمن). للتبسيط نحصر اهتمامنا بالإشارات التماثلية بمقابلة متحول حقيقي مفرد تابع للزمن، بكثافة ذات قيمة حقيقية أو عقدية.

• مصادر مقطّعة زمنياً بقيم تماثلية (مصادر سلسلة تماثلية)

تقع هذه المصادر بين المصادر المقطّعة والمصادر التماثلية. يكون خرج هذا المصدر سلسلة من الأرقام الحقيقية (أو ربما أرقام عقدية). يعتبر ترميز مثل هذا المصدر مهماً بحد ذاته، ولكنه ذو أهمية أكبر بوصفه مسألة فرعية في ترميز المصادر التماثلية. أي أن المصادر التماثلية تُرَمِّز دائماً أولاً إما بتقطيع الإشارة التماثلية أو بتمثيلها بمعاملات في توسع السلسلة. أيا كانت الطريقة، فإن النتيجة هي سلسلة أعداد تُرَمِّز فيما بعد.

هنالك العديد من الاختلافات بين المصادر المقطّعة والنوعين الآخرين من المصادر التماثلية. أهمها هو إمكانية ترميز المصادر المقطّعة بطريقة يكون فيها خرج المصدر قابلاً للاستعادة من التسلسل المرَمِّز للأرقام الإثنائية. يسمى مثل هذا الترميز ترميزاً قابلاً لفك ترميزه على نحو فريد.⁶ من جهة أخرى ليس ثمة طريقة لربط قيم المصدر التماثلية بسلسلة بتات تجعل عملية استعادتها وحيدة. على سبيل المثال

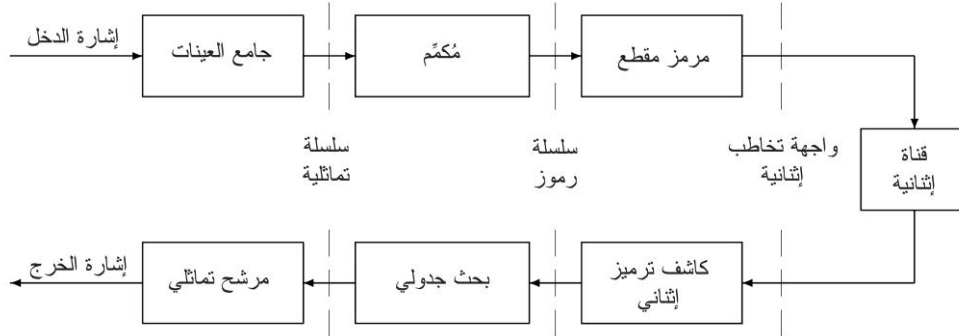
⁵ تُعرّف المجموعة على أنها مقطّعة إذا احتوت إما على عناصر منتهية أو عناصر غير منتهية حسابياً. لا تتجاوز الحالة غير المنتهية حسابياً نظرية ترميز المصدر الأساسية في أي نقطة هامة، لكنها مفيدة عند مناقشة حالات محددة، وسوف نأتي على ذكرها لاحقاً.

⁶ تسمى الرموز القابلة لفك التركيز على نحو فريد، أحياناً، رموزات عديمة الضجيج في المعالجات الأساسية. تدل عبارة قابل لفك الترميز على المعنى الحقيقي والدقيق أفضل كثيراً من عبارة عديمة الضجيج. سنعرّف قابلية فك الترميز بعد قليل.

مطلوب عدد لانهائي من الأرقام الإثنائية لتمثيل القيم الحقيقية بين 0-1. وبالتالي فثمة حاجة لنوع من التكميم لتمثيل هذه القيم التماثلية، وهذا يحدث تشويهاً. لذلك فإن ترميز المصدر التماثلي يتضمن مقايضة بين معدل إرسال البتات ومقدار التشويه. يجري ترميز مصادر السلاسل التماثلية أولاً بتكميم كل عنصر من السلسلة (أو على نحو أعم كل مجموعة مؤلفة من n عنصراً متتالياً من السلسلة) إلى أحد عناصر مجموعة الرموز المنتهية. إن سلسلة الرموز هذه هي سلسلة مقطّعة يمكن ترميزها إلى تسلسل إثنائي. يلخص الشكل (1.2) هذه النظرة التطبيقية لترميز المصدر التماثلي والمقطّعة. وكما يبينه الشكل، فإن ترميز المصدر المقطّعة هو مسألة هامة بحد ذاتها لترميز مصادر تشبه النصوص، وأيضاً يمثل الطبقة الداخلية في ترميز السلاسل التماثلية والإشارات. يناقش الجزء المتبقي من هذا الفصل ترميز المصدر للمصادر المقطّعة. فيما يعالج الفصل التالي ترميز المصدر للسلاسل التماثلية ويعالج الفصل الرابع مصادر الإشارة.

2.2 الرمازات ذات الطول الثابت للمصادر المقطّعة

إن أبسط مقارنة لترميز مصدر مُقطّعة إلى أرقام إثنائية هو إنشاء رماز c يقابل كل رمز x من الأبجدية χ بكلمة رماز $C(x)$ ، حيث $C(x)$ هي كتلة من أرقام إثنائية. كل من هذه الكتل مقيدة لتحتوي على نفس طول اللبنة L ، ولهذا السبب يدعى هذا الرماز رماز الطول الثابت.



الشكل 1.2: تتطلب المصادر المقطعة الطبقة الداخلية فقط. بينما تستخدم الطبقتان الداخليتان للسلاسل التماثلية، وتستخدم الطبقات الثلاث لمصادر الإشارات.

على سبيل المثال، إذا كانت الأبجدية χ مؤلفة من الرموز السبعة $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ ، فإنه يمكن استخدام رماز الطول الثابت التالي ذي طول اللبنة $L = 3$

$$\begin{aligned} C(a) &= 000 \\ C(b) &= 001 \\ C(c) &= 010 \\ C(d) &= 011 \\ C(e) &= 100 \\ C(f) &= 101 \\ C(g) &= 110 \end{aligned}$$

يمكن بعدها ترميز خرج المصدر x_1, x_2, \dots ، إلى الخرج المرز $C(x_1), C(x_2), \dots$ وبالتالي يحتوي ترميز الخرج L بتاً لكل رمز. من أجل المثال السابق سترمز السلسلة $bad\dots$ إلى $00100011\dots$. لاحظ أن بتات الخرج تأتي متعاقبة (أو، بشكل أكثر تقنية، متسلسلة). ثمة 2^L تركيب مختلف من القيم للبنة مؤلفة من L بتاً. بالتالي، إذا كان عدد الرموز في أبجدية المصدر، $M = |\mathcal{X}|$ ، تحقق العلاقة $M \leq 2^L$ ، فإنه يمكن تخصيص كل رمز بمجموعة إثنائية مؤلفة من L عنصراً. وبفرض أن كاشف الترميز يعرف أين تقع بداية السلسلة المرزّة، يمكنه تقطيع السلسلة إلى كتل بطول L بتاً يقوم بعدها بفك ترميز كل لبنة إلى رمز المصدر الموافق.

كمُلخص إذا كان طول أبجدية المصدر M فإن طريقة الترميز هذه تتطلب $L = \lceil \log_2 M \rceil$ بتاً لترميز كل رمز من المصدر. حيث تمثّل w أصغر عدد صحيح أكبر أو يساوي العدد الحقيقي w . ومنه $\log_2 M \leq L < \log_2 M + 1$. يمكن الحصول على الحد الأدنى، $\log_2 M$ ، على نحو متساوٍ إذاً فقط إذا كانت M إحدى قوى 2.

تكون التقنية المستخدمة على نحو متكرر أولاً بتقطيع سلسلة رموز المصدر إلى لبنات متعاقبة مؤلفة من n رمزاً في الوقت الواحد. من أجل أبجدية χ تضم M رمزاً، يوجد M^n مجموعة مؤلفة من n عنصراً. يمكن النظر إلى هذه المجموعات، M^n ، على أنها عناصر لأبجدية عليا. ويمكن ترميز كل n صف على نحو مستقل بدلاً من ترميز الرموز الأصلية. باستخدام ترميز المصدر الثابت الطول، يمكن ترميز كل n صف إلى $L = \lceil \log_2 M^n \rceil$ بتاً.

يمكن بعد ذلك تحديد المعدل $\bar{L} = L/n$ للبتات المرزّة لكل رمز مصدر أساسي بـ:

$$\bar{L} = \frac{\lceil \log_2 M^n \rceil}{n} \geq \frac{n \log_2 M}{n} = \log_2 M$$

$$\bar{L} = \frac{\lceil \log_2 M^n \rceil}{n} < \frac{n(\log_2 M) + 1}{n} = \log_2 M + \frac{1}{n}$$

ومنه $M \leq \bar{L} < \log_2 M + \frac{1}{n}$ ، وبجعل n كبيرة بما فيه الكفاية، يمكن جعل متوسط عدد البتات المرزّة لكل رمز يقترب من $\log_2 M$ بغض النظر عما إذا M هو من مضاعفات 2.

بعض الملاحظات:

- إن جعل \bar{L} تقترب كفيفاً من $\log_2 M$ هو اهتمام نظري أكثر منه عملي. وكما رأينا مؤخرًا فإن $\log_2 M$ هو معدل البتات الأدنى الممكن لترميز مصدر قابل لفك الترميز على نحو فريد عندما تكون رموز المصدر مستقلة ومتساوية الاحتمال. ومن ثم فإن هذه الطريقة تقارب هذا الحد الأدنى.
- تُشير هذه النتيجة لماذا تكون مقاييس المعلومات لوغاريتمية في الأبجدية.⁷ يؤخذ اللوغاريتم عادة بالأساس 2 عند دراسة الرمازات الإثنائية.
- هذه الطريقة غير احتمالية، أي لا تأخذ بعين الاعتبار تكرار حدوث الرموز، وهي تعمل بغض النظر عن تكرار الرموز. لكن بمعرفة تكرار حدوث بعض الرموز أكثر من غيرها، يمكن تخفيض المعدل \bar{L} للبتات المرزّة فكل رمز مصدر وذلك بتخصيص سلاسل بتات أقصر للرموز الأكثر حدوثاً ضمن رماز مصدر متغير الطول.

3.2 الرمازات متغيرة الطول للمصادر المقطّعة

إن المحفز وراء استخدام ترميز متغير الطول للمصادر المقطّعة هو أن مبدأ ضغط المعطيات يمكن إنجازه بتمثيل الرموز الأكثر احتمالاً بسلاسل بتات قصيرة، والرموز الأقل احتمالاً بسلاسل بتات أطول. و تتم اتباع هذا الأسلوب في رماز مورس في الإرسال البرقي القلسم حيث كانت الرسائل تمثّل باستخدام شريط من الحارف والنقط، باستخدام شرائط أقصر للأحرف الشائعة وشرائط أطول للأحرف الأقل شيوعاً.

يمثل الرماز متغير الطول C كل رمز من المصدر a_j في الأبجدية المصدر $\mathcal{X} = \{a_1, \dots, a_M\}$ بسلسلة إثنائية $C(a_j)$ ، تسمى كلمة الرماز. يسمى عدد البتات في $C(a_j)$ الطول $l(a_j)$ للسلسلة $C(a_j)$. فعلى سبيل المثال، يمكن أن يُعطى الرماز المتغير الطول من أجل الأبجدية $\mathcal{X} = \{a, b, c\}$ بـ:

$$C(a) = 0 \quad l(a) = 1$$

$$C(b) = 10 \quad l(b) = 2$$

$$C(c) = 11 \quad l(c) = 2$$

يُفترض أن يتم إرسال كلمات رماز الرماز المتغير الطول على نحو متعاقب لسلسلة من البتات، دون تحديد لحدود الرماز (أي بدون فواصل أو فراغات). يحدد مفكك الترميز، بإعطاء نقطة بداية مرجعية، أين تقع حدود كلمة الرماز وهذا ما يسمى التحليل *parsing*. إحدى القضايا المتعلقة بالنظام مع ترميز متغير الطول هي الحاجة إلى تخزين وسيط. إذا كانت رموز المصدر متصل بمعدل ثابت وكان على البتات المرزّة أن ترسل بمعدل إرسال، فلا بد من وجود صوان بين الدخل والخرج. وهذا يتطلب إرسال نوع من "التعبئة" القابلة للتمييز

⁷ تم اقتراح أنه يمكن النظر إلى المعلومات بوصفها لوغاريتم عدد من الاحتمالات لأول مرة من قبل السيد Hartley [11] عام 1972.

عندما يكون الصوان فارغاً وإمكانية ضياع المعطيات عندما يكون الصوان ممتلئاً. وهناك كثير من قضايا النظام المشابهة، بما فيها الأخطاء العرضية على القناة، والتزامن الأولي، والتزامن النهائي، وغيرها. ستجري مناقشة العديد من هذه القضايا لاحقاً، لكنها ستكون أسهل على الفهم بعد دراسة القضايا الأكثر جوهرية.

1.3.2 قابلية فك الترميز الفريدة

إن الخاصية الرئيسية المطلوبة من أي رماز متغير الطول هي أن يكون قابلاً لفك الترميز على نحو صحيح. هذا يعني أن أي سلسلة من رموز المصدر يمكن إعادة تشكيلها، على نحو غير قابل للشك، من سلسلة البتات المرمزة. يُفترض هنا وجود تزامن أولي: بحيث يعلم مفكك الترميز أول بت في سلسلة البتات المرمزة. لاحظ أنه بدون التزامن الأولي، لا يمكن حتى فك ترميز الرماز الثابت الطول بشكل وحيد.

من الواضح أن وحدانية فك الترميز تتطلب أن يكون $C(a_j) \neq C(a_i)$ من أجل أي $i \neq j$. أكثر من ذلك، فهي تتطلب أن يكون شريط⁸ الرموز المرمزة قابلاً للتمييز. يوضح التعريف التالي هذا الأمر بدقة.

تعريف 1.3.2: يكون الرماز C لمصدر مقطّع ذا فك ترميز فريد إذاً، ولأجل أي شريط رموز من المصدر، وليكن x_1, x_2, \dots, x_n ، اختلف تعاقب⁹ كلمات الترميز الموافقة $C(x_1)C(x_2)\dots C(x_n)$ عن تعاقب كلمات الترميز $C(x'_1)C(x'_2)\dots C(x'_n)$ الموافقة لأي سلسلة أخرى x'_1, x'_2, \dots, x'_n من رموز المصدر.

بكلمات أخرى يكون C ذا فك الترميز فريد إذا كانت كل كلمات الترميز المتعاقبة متمايزة. تذكر أنه لا توجد فواصل ولا فراغات بين كلمات الرماز؛ وعلى مفكك ترميز المصدر أن يحدد حدود كلمة الرماز من سلسلة البتات المستقبلية. (إذا أدخلت فواصل، يصبح الرماز ثلاثياً بدلاً من إثنائياً). على سبيل المثال، سنثبت أن الرماز الآنف C للأبجدية $\chi = \{a, b, c\}$ ذو فك ترميز فريد. لكن الرماز C' معرّف بـ

$$\begin{aligned} C'(a) &= 0 \\ C'(b) &= 1 \\ C'(c) &= 01 \end{aligned}$$

ليس ذي فك ترميز فريد، مع كلمات رمازه مختلفة. إذا استقبل المفكك 01 فإنه لن يستطيع تحديد فيما إذا كان المصدر قد أصدر (ab) أو (c) .

لاحظ أن خاصية فك الترميز الوحيد تعتمد فقط على مجموعة كلمات الرماز وليس على طريقة مقابلة الرموز بكلمات رماز. وبالتالي يمكننا الإشارة بشكل متبادل إلى رمازات ذات فك ترميز فريد ومجموعات كلمات رماز ذات فك ترميز فريد.

2.3.2 رمازات البادئة الحرة للمصادر المقطعة

يمكن لفك ترميز خرج رماز ذي فك ترميز فريد، وحتى تحديد فيما إذا كان ذا فك ترميز فريد أن يكون معقداً. ولكن، ثمة صنف بسيط للرمازات وحيدة فك الترميز تسمى رمازات البادئة الحرة. وكما سيظهر لاحقاً، تمتلك هذه الرمازات الخصائص الجيدة التالية مقارنة بالرمازات الأخرى وحيدة فك الترميز:¹⁰

- إذا وجد رماز وحيد فك الترميز له مجموعة محددة من أطوال كلمات الرماز، فإنه يمكن بسهولة إنشاء رماز البادئة الحرة بنفس مجموعة الأطوال.
- يمكن لمفكك الترميز أن يفك ترميز كل كلمة رماز لرماز البادئة الحرة مباشرة عند لحظة ورود آخر بت من كلمة الرماز.

⁸ شريط الرموز عبارة عن مجموعة من الرموز مؤلفة من n عنصراً لأي رقم منتهى n . وسلسلة الرموز هي مجموعة مؤلفة من n عنصراً ضمن النهاية $\infty \rightarrow n$ ، كما يستخدم تعبير سلسلة الكلمات عندما يمكن أن يكون الطول إما منتهياً أو غير منتهى.

⁹ إن تعاقب شريطين، ولنقل $u_1 \dots u_n$ و $v_1 \dots v_n$ هو شريط المجموع $v_1 \dots v_n$ و $u_1 \dots u_n$.

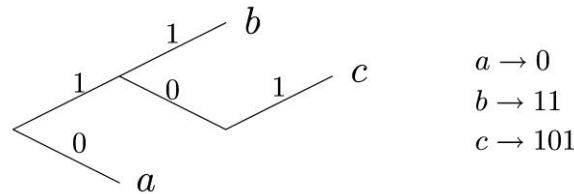
¹⁰ مع كل مزايها رمازات البادئة الحرة، من الصعب أن نفهم لماذا تجري مناقشة الصنف الأعم. سينضح هذا أكثر فيما بعد.

• بمعرفة التوزيع الاحتمالي لرموز المصدر، يمكن بسهولة إنشاء رموز بادئة حرة بأقل طول متوقع.

تعريف 2.3.2. إن بادئة الشريط $y_1 \dots y_l$ هي أي شريط جزئي أولي $y_1 \dots y_l$ حيث $l' \leq l$ من ذاك الشريط. تكون البادئة مناسبة إذا كان $l' < l$. يكون الرمز ذا بادئة حرة إذا لم تكن أي كلمة رموز بادئة لكلمة رموز أخرى.

على سبيل مثال، يعتبر الرمز c ذو كلمات رموز 0 ، 10 ، و 11 رموز بادئة حرة، ولكن الرمز c' ذو كلمات رموز 0 ، 1 ، و 01 ليست كذلك. إن كل رمز ذي طول ثابت وكلمات رموز متميزة هو رمز ذو بادئة حرة. سنبين الآن أن كل رمز ذي بادئة حرة هو رمز فك ترميز وحيد. يبين البرهان كيف يمكن لمفكك الترميز أن يحدد، وعلى نحو وحيد، حدود كلمات الرموز.

ليكن c رمز بادئة حرة، يمكن تعريف شجرة الرموز الإثنائي الموافقة بأنها تنمو من الجذر إلى اليسار باتجاه الأوراق إلى اليمين ممثلة كلمات الرموز. يُعنون كل فرع بـ 0 أو 1 وتمثل كل عقدة شريطاً إثنائياً متوافقاً مع عنوان الفرع بدءاً من الجذر إلى العقدة. تتمدد الشجرة لتشمل كل كلمة رموز. أي أن كل عقدة في الشجرة هي إما كلمة رموز أو بادئة مناسبة لكلمة رموز. (انظر الشكل 2.2).

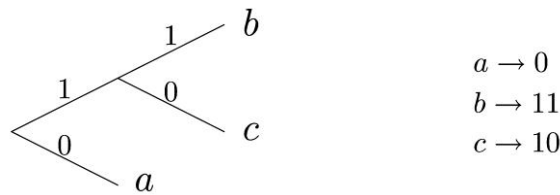


الشكل 2.2: شجرة الرموز الإثنائي لرموز بادئة حرة.

يضمن شرط البادئة الحرة أن كل كلمة رموز توافق عقدة ورقة (أي، عقدة بدون فروع متجهة نحو اليمين). كل عقدة وسطية (أي، عقدة لها فرع أو أكثر يتجه نحو اليمين) هي بادئة لكلمة رموز تم الوصول إليها من عقدة متوسطة.

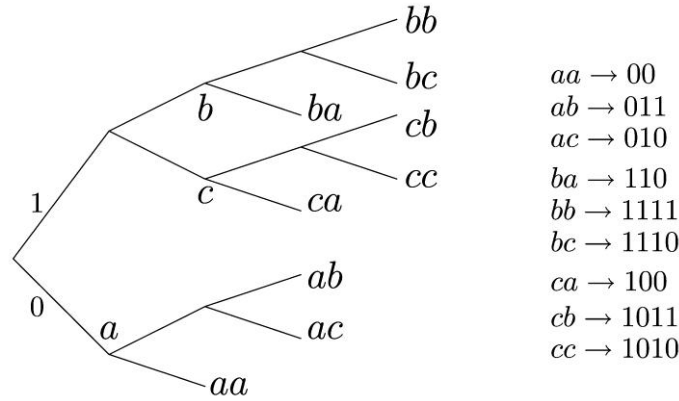
للشجرة في الشكل (2.2) عقدة متوسطة، 10 ، وفرع وحيد يتجه إلى اليمين. وهذا يبين إمكانية تقصير كلمة الرموز لـ c إلى 10 بدون تخريب خاصية البادئة الحرة. هذا ما يظهره الشكل (3.2).

يطلق على رموز البادئة الحرة اسم الكامل إذا لم يكن ممكناً إضافة كلمة رموز جديدة دون تخريب خاصية البادئة الحرة. وكما رأينا، يكون رمز البادئة الحرة كاملاً إذا لم يكن ممكناً تقصير أي كلمة رموز دون تخريب خاصية البادئة الحرة. وبالتالي فإن الرموز في الشكل (2.2) ليس كاملاً لكن الرموز في الشكل (3.2) كامل.



الشكل 3.2: رمز بطول أقصر من الموجود في الشكل 2.2

حتى نرى كيف تضمن حالة البادئة خاصية وحدانية فك الترميز، دعنا ندرس الشجرة في الشكل (4.2) التي تبين تعاقباً كلمتي رموز. وهي تمثل الرموز في الشكل (3.2). جرى تشكيل هذه الشجرة الجديدة بلصق نسخة من الشجرة الأصلية على كل ورقة من الشجرة الأصلية. وبالتالي يقع كل تعاقب لكلمتي رموز على عقدة مختلفة من الشجرة كما ويختلف عن كل كلمة رموز. يمكننا تخيل لصق أشجار أخرى على الأوراق في الشكل (4.2) للحصول على شجرة تمثل كلمات رموز أخرى متعاقبة. مرة أخرى، تقع كافة تعاقبات كلمات الرموز على عقد متباينة، وبالتالي توافق أشرطة إثنائية متباينة.



الشكل 4.2: شجرة رموز إثنائي لكلمتي رموز؛ تمثل الفروع الصاعدة الواحدات.

ثمّة طريقة بديلة لبرهان أن رموزات البادئة الحرة تضمن خاصية وحدانية فك الترميز هي بالنظر إلى مسألة تحليل كلمة الرموز من وجهة نظر مرمز المصدر. من أجل أي سلسلة إثنائية مرمزة لأي شريط من رموز المصدر، يمكن لمفكك الترميز أن يفك الرموز الأول ببساطة وذلك بقراءة الشريط من اليسار إلى اليمين ومتابعة المسار الموافق على شجرة الرموز حتى الوصول إلى ورقة، والتي يجب أن تتوافق مع أول كلمة رموز بحسب خاصية البادئة الحرة. وبعد استخلاص كلمة الرموز الأولى، يصبح الشريط الإثنائي المتبقي أيضاً شريطاً لكلمات رموز، ومن ثمّ يستطيع مفكك الترميز إيجاد كلمة الرموز الثانية بنفس الطريقة، وهكذا للنهائية.

لنفرض، على سبيل المثال، مفكك ترميز للرموز في الشكل (3.2) يفكك السلسلة ...1010011. سيجد عند معالجة الشجرة من اليسار، أن 1 ليس كلمة رموز، ولكن 10 هي كلمة رموز لـ c . لذا تعتبر c كأول رمز من خرج المصدر، تاركة الشريط ...10011. بعدها تُكشف c بوصفها الرمز الثاني، تاركة الشريط ...011، الذي يُكشف باعتباره a وبعدها b ، وهكذا.

يظهر هذا البرهان أيضاً أنه يمكن كشف رموزات البادئة الحرة دون تأخير. فحينما يستقبل مفكك الترميز آخر بت من كلمة الرموز، يمكنه التعرف على كلمة الرموز وكشفها دون انتظار ورود بتات إضافية. لهذا السبب، تسمى رموزات البادئة الحرة أحياناً الرموز الآتية.

لقد تمّ بيان أن كافة رموزات البادئة الحرة فريدة فك الترميز. إلا أن عكس ذلك ليس صحيحاً، كما يبينه الرمز التالي:

$$C(a) = 0$$

$$C(b) = 01$$

$$C(c) = 011$$

يمكن لسلسلة مرمزة لهذا الرموز أن تُقرأ بتعرّف الصفر بوصفة بداية كل كلمة رموز جديدة. ثمّة مثال مختلف آخر مُعطى في التمرين

6.2.

إذا كان ثمّة أخطاء في إرسال المعطيات، في الرموزات ذات الطول المتغيّر، يمكن لمفكك الترميز أن يضيّع تزامن حدود كلمات الرموز ويخطئ في أكثر من رمز. وبالتالي فمن الضروري دراسة خصائص تزامن الرموزات ذات الطول المتغيّر. فمثلاً يعدّ رموز البادئة الحرة $\{0, 10, 110, 1110, 11110\}$ ذاتي التزامن، لأن الصفر يقع في نهاية كل كلمة لرموز. أما رموز البادئة الحرة الأقصر $\{0, 10, 110, 1110, 1111\}$ فهو ذاتي التزامن احتمالياً؛ هنا أيضاً يُشاهد صفر في نهاية كل كلمة رموز، إلا أن وجود سلسلة 1111 بطول غير محدد، يجعل طول الزمن قبل إعادة التزامن متغيراً عشوائياً. لن نتطرّق إلى هذه الأسئلة هنا.

3.3.2 متراجحة كرافت لرموزات البادئة الحرة

متراجحة كرافت [17] هي شرط لتحديد فيما إذا كان ممكناً إنشاء ترميز بادئة حرة لأبجدية مصدر مُقطّع $\chi = \{a_1, \dots, a_M\}$ بمجموعة

$$\{l(a_j); 1 \leq j \leq M\}$$

نظرية 1.3.2 (متراجحة كرافت لرموزات البادئة الحرة). كل رموز بادئة حرة لأبجدية $\chi = \{a_1, \dots, a_M\}$ بكلمات رموز ذات أطوال

$$\{l(a_j); 1 \leq j \leq M\}$$

(1.2)

$$\sum_{j=1}^M 2^{-l(a_j)} \leq 1$$

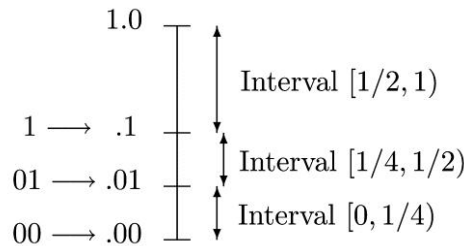
وبالعكس إذا تحققت العلاقة (1.2) فإن الرمز هو رمز بادئة حرة بأطوال $\{l(a_j): 1 \leq j \leq M\}$. أكثر من ذلك، كل رمز بادئة حرة كامل يحقق العلاقة (1.2) بتساوٍ وكل رمز بادئة حرة غير كامل يحققها بتباين مقيد.

فمثلاً، تبين هذه الطريقة أنه يوجد رمز بادئة الحرة كامل بأطوال كلمات رماز $\{1, 2, 2\}$ (أعطي مثالين عن ذلك) لكن لا يوجد رمز بادئة حرة بأطوال كلمات رماز $\{1, 1, 2\}$.

قبل إثبات النظرية، نبين كيف تمثل كلمات رماز بوصفها توسعات بالأساس 2 (يشابه الأساس 2 الأساس 10 العشري) من نظام العدد الإثنائي. بعد فهم هذا التمثيل، ستصبح النظرية واضحة تماماً. يُمثل التوسع $y_1 y_2 \dots y_l$ العدد $\sum_{m=1}^l y_m 2^{-m}$. فعلى سبيل المثال تمثل القيمة $1/4 + 1/8$.

تستخدم الأرقام العشرية العادية ذات l خانة لتدل على تقريب لعدد حقيقي بدقة l خانة. هنا، ونفس الطريقة، يمكن النظر إلى التوسع بالأساس 2 $y_1 y_2 \dots y_l$. على أنه يغطي المجال 11 $[\sum_{m=1}^l y_m 2^{-m}, \sum_{m=1}^l y_m 2^{-m} + 2^{-l}]$. لهذا المجال قياس 2^{-l} يتضمن الأرقام بالأساس 2 وتبدأ بـ $y_1 \dots y_l$.

بمذه الطريقة أي كلمة ترميز $C(a_j)$ بطول l ممثلة بعدد نسبي في المجال $[0, 1)$ وتغطي مجال قدره 2^{-l} والذي يتضمن كل الحروف التي تحوي $C(a_j)$ كما البادئة في الشكل (3.2). البرهان كالتالي:



الشكل 5.2: الأعداد بالأساس 2 والمجالات التي تمثل كلمات الرماز. كلمات الرماز الممثلة آنفاً هي (00 و 01 و 1)

البرهان: لنفترض أولاً أن C هي رمز بادئة حرة بأطوال كلمات رماز $\{l(a_j): 1 \leq j \leq M\}$. من أجل a_j, a_i محرفين في χ كما أوضحنا آنفاً أنه من الأساس 2 وفقاً لـ $C(a_j)$ لا يمكن أن تتوضع في المجال $C(a_i)$ حيث $C(a_i)$ ليست بادئة لـ $C(a_j)$. ولذلك إن النهاية السفلى لأي مجال وفقاً لأي كلمة ترميز $C(a_j)$ لا يمكن أن تتوضع في مجال كلمات رماز أخرى. الآن إذا تقاطع مجالان لكلمتي رماز فإن النهاية السفلية لأحدهما ستقع ضمن مجال الأخرى وهذا مستحيل، أي أن مجالين يجب ألا يتقاطعا. بما أنه كل المجالات تقع ضمن المجال $[0, 1)$ وحجم المجال وفقاً لـ $C(a_j)$ هو $2^{-l(a_j)}$ عندها تتكون العلاقة (1.2).

إذا تحققت العلاقة (1.2) بمتراحة بدون مساواة فإنه يوجد مجال لا يتقاطع مع أي كلمة رماز ومنه يمكن إضافة كلمة ترميز إلى هذا المجال. ولكن إذا تحققت المساواة في العلاقة (1.2) فإنه تكون مجالات كلمات الرماز على المجال $[0, 1)$ والترميز هو كامل.

وأخيراً، سنظهر كيف إنشاء ترميز البادئة الحرة من أي مجموعة من كلمات رماز بأطوال $\{l(a_j), 1 \leq j \leq M\}$ ، يجب وضع الأطوال بترتيب كالتالي: $l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_M$ ولتكن u_1, \dots, u_M أعداد حقيقية موافقة لكلمات الترميز المراد إنشائها. البناء بسيط حيث يمكن وضع $u_1=0$ ومن أجل كل $j, 1 < j \leq M$.

(2.2)

$$u_j = \sum_{i=1}^{j-1} 2^{-l_i}$$

كل جزء من الطرف اليميني هو عدد صحيح من 2^{-l_j} ، ولذلك يكون u_j هو عدد صحيح من 2^{-l_j} . من المتراحة (1.2) تكون $u_j <$

¹¹ تستخدم الأقواس وعلامات الحصر على التسلسل لتبين الحدود المغلقة والمفتوحة؛ وبالتالي $[a, b)$ مجموعة الأعداد الحقيقية u حيث $a \leq u < b$.

1 ومنه يمكن تمثيله بالأساس 2 بـ l_j خانة. يمكن إضافة كلمة الرمز ذات الطول l_j إلى الرمز مع الحفاظ على حرية البادئة (انظر الشكل 6.2).

u_i		
0.001	0.111	$C(5) = 111$
0.001	0.11	$C(4) = 110$
0.01	0.1	$C(3) = 10$
0.01	0.01	$C(2) = 01$
0.01	0	$C(1) = 00$

الشكل 6.2: إنشاء كلمات رموز لمجموعة بأطوال $\{2,2,2,3,3\}$. تُشكّل $C(i)$ من u_i بتمثيل u_i لأماكن l_i .

بعض الملاحظات على متراجحة كرافت:

- إذا وجد رمز يحقق المتراجحة (1.2) فإنه ليس من الضروري أن يكون رمز بادئة حرة أو وحيد فك الترميز.
- يبين التمرين 11.2 أن النظرية 1.3.2 هي لكل الرموز الوحيدة فك الترميز. ذلك يعني، يوجد رمز وحيد فك الترميز بأطوال كلمات $\{l(a_j), 1 \leq j \leq M\}$ إذاً فقط اذا تحققت المتراجحة (1.2). وهذا يدل على أنه إذا وجد رمز وحيد فك الترميز بمجموعة محددة من أطوال كلمات رموز، فإنه يوجد رمز بادئة حرة له نفس مجموعة الأطوال. وبالتالي فلماذا نستخدم رموزاً غير رموز البادئة الحرة؟

4.2 النمذج الاحتمالية للمصادر المقطعة

يظهر آنفاً أنه يوجد رمز بادئة حرة لأي مجموعة أطوال كلمات ترميز تحقق متراجحة كرافت. متى نرغب باستخدام أحد هذه الرموز؟ متى يكون عدد البتات المرترزة المتوقع لرمز المصدر أقل من $\log M$ ولماذا يكون عدد البتات المرترزة المتوقع لرمز المصدر هو المحدد أكثر أهمية؟

لا يمكن الإجابة على السؤال بدون وجود نموذج احتمال للمصدر. كمثال، لتكن $M = 4$ مجموعة كلمات رموز البادئة الحرة $\{0, 10, 110, 111\}$ ولها الطول المتوقع $\log M = 2 < 2.25$ إذا كان احتمال ورود رموز المصدر متساوياً، ولكن إذا كانت احتمالات رموز المصدر: $\{1/2, 1/4, 1/8, 1/8\}$ يكون الطول المتوقع $1.75 < 5$.

تكون المصادر المقطعة في التطبيقات العملية ذات طبيعة إحصائية أكثر تعقيداً. فعلى سبيل المثال، لندرس محاولة ضغط رسائل الكترونية. في النص الإنكليزي النموذجي تتكرر بعض الأحرف من قبيل حرف e و o أكثر بمرات من الأحرف q و x و z. كما أن الأحرف ليست مستقلة؛ فعلى سبيل المثال الحرف h غالباً ما يسبقه الحرف t، والحرف q يُتبع غالباً بالحرف u. وأيضاً بعض تسلسل الأحرف هو كلمات، بينما تسلسل آخر لا؛ وذلك الأخير له احتمال قريب من الصفر (إذا كان النص إنكليزية صحيحة). على المدى الأبعد، فإن للإنكليزية ضوابط قواعدية ودلالية، كما وتوجد ضوابط أكثر على الرسائل الإلكترونية المتعددة.

يبدو واضحاً أن البحث عن نماذج احتمالية دقيقة للمصادر المقطعة ليس عملياً. إن المقاربة البديلة، والتي تبين أنها أكثر فائدة هي عملية تبدأ بمحاولة فهم ترميز مصادر اللعبة "toy" ذات نموذج احتمالي بسيط. بعد دراسة مثل هذه المصادر يمكن إظهار كيفية التعميم على مصادر ذات بنية أكثر عمومية، إلى أن تتمكن من فهم المصادر الحقيقية حتى بدون نماذج عشوائية جيدة. يعتبر هذا مثلاً جيداً لمسألة تؤدي فيها معالجة النماذج البسيطة وربما غير الواقعية إلى نتائج جيدة في النهاية. يسمى نوع مصدر اللعبة الذي سندرسه بشيء من التفصيل المصادر المقطعة عديمة الذاكرة.

1.4.2 المصادر المقطعة العديمة الذاكرة

تعرف المصادر المتقطعة عديمة الذاكرة (DMS) بالخصائص التالية:

- يكون خرج المصدر سلسلة غير منتهية X_1, X_2, X_3, \dots من الرموز العشوائية المنتقاة من مجموعة منتهية $\chi = \{a_1, a_2, \dots, a_M\}$ ، تدعى أبجدية المصدر.
- يتم اختيار خرج المصدر X_1, X_2, \dots من χ باستخدام تابع كتلة الاحتمال نفسه (pmf) $\{p_X(a_1), p_X(a_2), \dots, p_X(a_M)\}$: $p_X(a_j) > 0$ where $1 \leq j \leq M$ إذ ليس من سبب لتخصيص كلمة رموز لرمز ذي احتمال صفر وليس من سبب لنموذج مصدر مقطوع يحتوي على رموز مستحيلة.
- يكون خرج المصدر X_k مستقل إحصائياً عن المخرجات السابقة X_1, \dots, X_{k-1} .

تدعى الرموز المختارة بشكل عشوائي من خرج المصدر بالرموز العشوائية. هذه الرموز أشبه بالمتحولات العشوائية فيما عدا أنها يمكن أن تأخذ قيمة عددية. ليكن X تدل على نتيجة رمي قطعة نقود، فيمكن نمذجتها كمتحول عشوائي يأخذ القيم (نقش، كتابة) باحتمالات متساوية. لاحظ أنه إذا كانت X رمزاً عشوائياً غير عددي فإنه من غير المفيد التكلم عن القيمة المتوقعة. إن الاستقلال الإحصائي بين الرموز العشوائية هو نفسه الذي للمتحولات العشوائية، أي أن الحدث X_i وهو أي عنصر من χ مستقل عن الأحداث الموافقة لقيم الرموز العشوائية الأخرى.

تشير كلمة عدم الذاكرة في التعريف إلى الاستقلالية الإحصائية بين الرموز العشوائية المختلفة، أي أنه يتم اختيار المتحول العشوائي بدون معرفة كيفية اختيار الرموز العشوائية السابقة. بكلمات أخرى، تكون سلسلة رموز المصدر مستقلة وموزعة بشكل متطابق. independent and identically distributed (iid)¹².

كخلاصة، إن المصادر العديمة الذاكرة هي سلاسل iid نصف منتهية من الرموز العشوائية

$$X_1, X_2, X_3, \dots$$

كل منها مأخوذ من مجموعة منتهية χ ولدى كل عنصر احتمال موجب.

تعتبر سلسلة عمليات رمي قطعة النقود المستقلة هي مثال عن DMS. وكذلك يعتبر تسلسل سحب الرموز (مع التبديل) في لعبة سكرابل Scrabble مثلاً آخر. إن السبب في دراسة هذه المصادر أنها تقدم أدوات لدراسة مصادر أكثر واقعية.

5.2 أصغر \bar{L} لرمازات البادئة الحرة

تحدد متراجحة كرافت أي مجموعة من أطوال كلمات الرموز ممكنة لتشكيل رمازات البادئة الحرة. من أجل مصدر مقطوع عدم الذاكرة DMS، نريد تحديد مجموعة أطوال كلمات الرموز الممكن استخدامها لجعل الطول المتوقع لرماز البادئة الحرة أصغرياً. أي نريد جعل الطول المتوقع والمحقق لمتراجحة كرافت أصغرياً.

لنفترض أنه تم اختيار مجموعة أطوال $l(a_1), \dots, l(a_M)$ (محقق لمتراجحة كرافت) لترميز كل رمز إلى كلمة رماز بادئة حرة. نعرف $L(X)$ (أو L للاختصار) كمتحول عشوائي يمثل طول كلمة رماز لرمز مصدر مختار عشوائياً. تعطى القيمة المتوقعة لـ L ، من أجل ترميز معطى:

$$\bar{L} = E[L] = \sum_{j=1}^M l(a_j) p_X(a_j)$$

نريد إيجاد \bar{L}_{\min} أصغر قيمة لـ \bar{L} على كل مجموعات أطوال كلمات الرموز التي تحقق متراجحة كرافت.

قبل إيجاد \bar{L}_{\min} ، سنوضح لماذا لها هذه الأهمية. إن عدد البتات الناتج عن استخدام الرموز السابق لترميز كتلة طويلة $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ من الرموز هو $S_n = L(X_1) + L(X_2) + \dots + L(X_n)$. وهو يمثل مجموع n متحول عشوائي iid، ويدل قانون الأعداد الكبيرة، الذي سيناقش في المقطع 1.7.2، على أن S_n/n ، وهو عدد البتات في الرمز في هذه الكتلة الطويلة، قريب جداً من \bar{L} باحتمال قريب جداً من 1. بكلمات أخرى، \bar{L} هو بشكل جوهري المعدل (عدد البتات في الرمز) والذي نخرج به البتات من رموز المصدر. إن هذا يدفع باتجاه إيجاد

¹² يجب أن نميز بين تعبير انعدام الذاكرة مع أي تعبير لا احتمالي في نظرية النظم.

\bar{L}_{\min} وفيما بعد إيجاد رمازات تُحقق الحد الأدنى.

قبل الغوص أكثر، نبسط الفكرة. إن وجود أبجدية $\chi = \{a_1, \dots, a_M\}$ بقياس $M = |\chi|$. هذه المسألة تشمل فقط احتمالات الـ M رمزاً وليس أسماءها. يمكن تعريف الأبجدية لتكون $\{1, 2, \dots, M\}$ ، وتكون احتمالات الرموز p_1, \dots, p_M ، وطول كلمات الرماز l_1, \dots, l_M . فيكون الطول المتوقع للترميز:

$$\bar{L} = \sum_{j=1}^M l_j p_j$$

رياضياً، تُعتبر مسألة إيجاد \bar{L}_{\min} هي تصغير \bar{L} على كل مجموعات الأطوال ذات الأعداد الصحيحة l_1, \dots, l_M والتي تحقق متراجحة كرافت.

$$(3.2) \quad \bar{L}_{\min} = \min_{l_1, \dots, l_M: \sum_{j=1}^M 2^{-l_j} \leq 1} \left\{ \sum_{j=1}^M p_j l_j \right\}$$

1.5.2 حل لاغرانج المضاعف من أجل \bar{L} الصغرى

تخضع عملية التصغير في (3.2) على M متحول l_1, \dots, l_M إلى قيود على هذه المتحولات. مبدئياً، لندرس مسألة أبسط بحيث لا قيود أعداد صحيحة على l_j . فتكون المسألة البسيطة عبارة عن تصغير $\sum_{j=1}^M p_j l_j$ على كل القيم الحقيقية l_1, \dots, l_M والتي تحقق المتراجحة $\sum_{j=1}^M 2^{-l_j} \leq 1$. تدعى القيمة الصغرى الناتجة \bar{L}_{\min} (ليست عدداً صحيحاً).

باعتبار القيم المسموحة للأطوال في عملية التصغير هذه تتضمن قيماً صحيحة، فإنه من الواضح أن $\bar{L}_{\min}(\text{noninteger}) \leq \bar{L}_{\min}$. هذا التصغير الذي لا يتضمن قيماً صحيحة سيزود نظرة أولية عن المسألة، بحيث تمتد فائدتها إلى أكثر من استنتاج الحد الأصغر \bar{L}_{\min} . لاحظ أولاً أن القيمة الصغرى لـ $\sum_{j=1}^M p_j l_j$ وفقاً للمتراجحة $\sum_{j=1}^M 2^{-l_j} \leq 1$ ستحدث عندما تتحقق القيود بالتساوي، والا ستقص إحدى قيم l_j ، مما ينقص قيمة $\sum_{j=1}^M p_j l_j$ دون مخالفة القيود. وبالتالي فالمسألة هي تصغير $\sum_{j=1}^M p_j l_j$ إلى الحد الأدنى وفق $\sum_{j=1}^M 2^{-l_j} = 1$. يمكن حل هذا النوع من المسائل عادة باستخدام مضاعفات لاغرانج. تكمن الفكرة في استبدال عملية تصغير تابع واحد، مقيد بتابع آخر، بعملية تصغير لتركيبية خطية للتابعين. ويجري التصغير في هذه الحالة على:

$$(4.2) \quad \sum_{j=1}^M p_j l_j + \lambda \sum_{j=1}^M 2^{-l_j}$$

إذا نجحت هذه الطريقة، فيمكن تصغير العلاقة لأجل كل خيار لـ λ (تسمى مضاعفة لاغرانج)؛ يتم اختيار λ بحيث يكون الاختيار الأمثل لـ l_1, \dots, l_M يُحقق القيود. إن قيمة التصغير للعلاقة (4.2) هي $\sum_{j=1}^M p_j l_j + \lambda$. هذا الاختيار لـ l_1, \dots, l_M يُصغر الأمثلة المقيدة الأصلية، إذ لأجل أي l'_1, \dots, l'_M تُحقق القيد $\sum_{j=1}^M 2^{-l'_j} = 1$ ، سيصبح التركيب في العلاقة (4.2) $\sum_{j=1}^M p_j l'_j + \lambda$ والذي يجب أن يكون أكبر أو يساوي $\sum_{j=1}^M p_j l_j + \lambda$.

نستطيع محاولة تصغير¹³ (4.2) ببساطة بجعل المشتق بالنسبة لـ l_j مساوياً للصفر. فنحصل على:

$$(5.2) \quad p_j - \lambda (\ln 2) 2^{-l_j} = 0; \quad 1 \leq j \leq M$$

ومنه $2^{-l_j} = p_j / (\lambda \ln 2)$ وبما أن $\sum_{j=1}^M p_j = 1$ فيجب أن تكون $\lambda = 1 / \ln 2$ حتى يتحقق $\sum_{j=1}^M 2^{-l_j} = 1$. وبالتالي $2^{-l_j} = p_j$ أو $l_j = -\log p_j$ ، وكما سيظهر فيما بعد ان هذه النقاط ستحقق الأصغرية. بتعويض هذا الحل بـ (3.2) نجد

$$(6.2) \quad \bar{L}_{\min}(\text{noninteger}) = - \sum_{j=1}^M p_j \log p_j$$

¹³ ثمة قواعد معروفة جيداً تبين متى تعمل طريقة مضاعفة لاغرانج ومتى يمكن حلها ببساطة بإيجاد نقطة ثابتة. ان المسألة الحالية بسيطة جداً بحيث لا نحتاج إلى هذه الآلية.

تُسمى الكمية في الطرف الأيمن من المعادلة (6.2) الانتروبية¹⁴ لـ X . ويرمز لها على الشكل $H[X]$:

$$H[X] = - \sum_j p_j \log p_j$$

باختصار، فالانتروبية $H[X]$ هي الحد الأدنى للطول الوسطي \bar{L} لرمازات البادئة الحرة ونحصل على هذا الحد عندما $l_j = -\log p_j$ لكل j . تم اشتقاق الحد بتجاهل القيد الصحيح، ويمكن أن يتحقق فقط عندما يكون $-\log p_j$ عدداً صحيحاً لكل j . أي إذا كان كل p_j هو قوة لـ 2.

2.5.2 حدود الانتروبية لـ \bar{L}

بالعودة إلى مسألة جعل \bar{L} أصغرياً بوجود قيد صحيح على الأطوال. النظرية التالية تؤسس صحة الأمثلة الآنفة المعتمدة على القيمة غير الصحيحة، وتزود الحد الأعلى لـ \bar{L}_{\min} .

النظرية 1.5.2 (حدود الانتروبية لرمازات البادئة الحرة). لتكن X رمزاً عشوائياً مقطوعاً باحتمالات p_1, \dots, p_M . وليكن \bar{L}_{\min} أصغر طول متوقع لكلمة رماز على كافة رمازات البادئة الحرة لـ X . ومنه:

$$(7.2) \quad H[X] \leq \bar{L}_{\min} < H[X] + 1 \quad \text{bit/symbol}$$

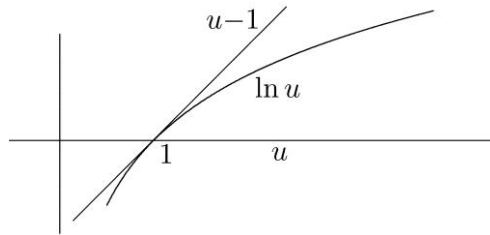
كما أن $\bar{L}_{\min} = H[X]$ إذا وفقط إذا كانت الاحتمالات p_j هي قوى صحيحة لـ 2.

البرهان: أولاً يتم إثبات إن $H[X] \leq \bar{L}$ بالنسبة لجميع رمازات البادئة الحرة. لتكن l_1, \dots, l_M أطوال كلمات رماز لرماز بادئة حرة اعتباطي. عندها يكون:

$$(8.2) \quad H[X] - L = \sum_{j=1}^M p_j \log \frac{1}{p_j} - \sum_{j=1}^M p_j l_j = \sum_{j=1}^M p_j \log \frac{2^{-l_j}}{p_j}$$

حيث تم استبدال $-l_j$ بـ 2^{-l_j} .

سنستخدم المتراجحة المفيدة $\ln u \leq u - 1$ أو بشكل مكافئ $\log u \leq (\log e)(u - 1)$ ، والمبينة في الشكل (7.2). لاحظ أن المساواة تتحقق عند النقطة $u = 1$.



الشكل 7.2: المتراجحة $\ln u \leq u - 1$ ، المتراجحة تحقق المساواة عند $u = 1$.

بتبديل هذه المتراجحة في (8.2) نجد:

$$(9.2) \quad H[X] - \bar{L} \leq (\log e) \sum_{j=1}^M p_j \left(\frac{2^{-l_j}}{p_j} - 1 \right) = (\log e) \left(\sum_{j=1}^M 2^{-l_j} - \sum_{j=1}^M p_j \right) \leq 0$$

حيث تم استخدام متراجحة كرافت و $\sum_j p_j = 1$ هذا يبني الطرف اليساري من (7.2). المتراجحة في (9.2) تحقق علاقة الأكبر تماماً إلا

¹⁴ لاحظ أن X هي رمز عشوائي وتحمل معها كل الأحمال، بما فيها تابع كتلة الاحتمال pmf. إن الانتروبية $H[X]$ هي تابع عددي للرمز العشوائي متضمنة pmf. وينفس الطريقة تكون $E[L]$ هي تابع عددي للشعاع العشوائي L . إن كلا من $H[X]$ و $E[L]$ هي قيم متوقعة لأشعة عشوائية معينة. وبشكل واضح فإن $L(X)$ الأنف ذكره هو شعاع عشوائي؛ فهو يعتمد على تابع $l(x)$ يمثل $\mathbb{R} \rightarrow X$ ويأخذ قيمة العينة $l(x)$ لكافة نقاط العينة بحيث $X = x$.

عندما $2^{-l_j}/p_j = 1$, or $l_j = -\log p_j$ ، من أجل كل قيم l_j . ومن أجل l_j صحيح تتحقق هذه المساواة اذا فقط إذا كان p_j قوة صحيحة ل 2 من أجل كل j . من أجل قيم حقيقية ل l_j ، هذا يجعل (5.2) يُصغر (3.2) بدون قيود صحيحة. ومنه تتحقق العلاقة (6.2). لإكمال البرهان، سنبيّن أنه إذا وجد رمز بادئة حرة مع $\bar{L} < H[X] + 1$. يتم اختيار أطوال كلمات الرموز لتحقيق:

$$l_j = \lceil -\log p_j \rceil$$

حيث إن التسقيف يدل $\lceil u \rceil$ على أصغر عدد صحيح أكبر أو يساوي u . وبهذا الاختيار يكون:

$$(10.2) \quad -\log p_j \leq l_j < -\log p_j + 1$$

بما أن الطرف اليساري من (10.2) يكافئ $2^{-l_j} \leq p_j$ ، فإنه وفق متراجحة كرافت يكون:

$$\sum_j 2^{-l_j} \leq \sum_j p_j = 1$$

ومنه يوجد رمز بادئة حرة بالأطوال المقترحة أنفأ. من الطرف اليميني في (10.2)، يكون طول الكلمة لهذا الرمز محدوداً من الأعلى بـ

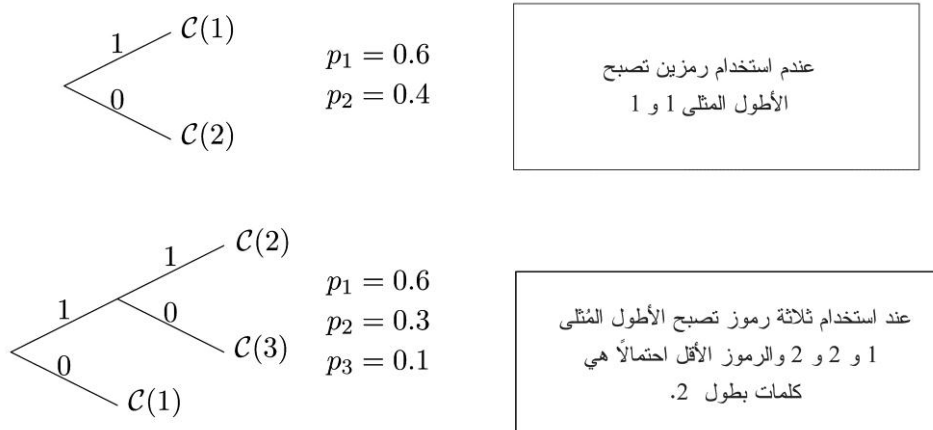
$$\bar{L} = \sum_j p_j l_j < \sum_j p_j (-\log p_j + 1) = H[X] + 1$$

وبما أن $\bar{L}_{\min} \leq \bar{L}$ ، و $\bar{L}_{\min} < H[X] + 1$ فإن هذا يكمل البرهان.

يقترح كل من البرهان أعلاه والتصغير غير الصحيح في (6.2) أن الطول الأمثل لكلمة رمز من أجل رمز المصدر باحتمال p_j يجب أن يكون تقريباً $-\log p_j$. هذا ليس صحيحاً بحد ذاته، لأنه كمنال، إذا كان $M = 2$ و $p_1 = 2^{-20}$ ، $p_2 = 1 - 2^{-20}$ فإن $-\log p_1 = 20$ ، لكن الطول الأمثل $l_1 = 1$. على أية حال، فإن الجزء الأخير من الإثبات الآنف يظهر إنه إذا تم اختيار l_i بحيث يكون تقريب عدد صحيح لـ $-\log p_i$ ، فإن \bar{L} ستختلف بالأكثر بت واحد عن $H[X]$.

3.5.2 خوارزمية هوفمان لرموز المصدر المثلى

في الأيام الأولى لنظرية المعلومات، تم اقتراح عدد من الخوارزميات الإرشادية لاختيار أطوال كلمات الرموز لتكون قريبة من $-\log p_j$ وقد اقترح كل من كلود شانون وروبرت فانو خوارزمية إرشادية عام 1948. كانت خوارزمية حدسية في تلك الأيام. بما أنها مسألة أمثلية صحيحة، سيكون الحال المثالي صعب. ولذلك أبداع ديفيد هوفمان [13] طريقة بسيطة جدا وخوارزمية مباشرة لإنشاء رموز بادئة حرة مثلى (طول أصغري مثالي \bar{L}). طور هوفمان الخوارزمية عام 1950 في مقالة في مخبر نظرية المعلومات في معهد MIT. خدعة هوفمان، كما تعرف اليوم، كانت "التفكير خارج الصندوق". أهمل متراجحة كرافت، ونظر إلى شجرة الترميز الثنائية ليبي خصائص يجب على ترميز البادئة الحرة امتلاكها. بعد استكشاف بعض الخصائص البسيطة، أدرك أنها تقود إلى إجرائية عودية لبناء رمز أمثلي.



الشكل 8.2: بعض الرموز المثالية البسيطة.

تعرض الأمثلة البسيطة في الشكل (8.2) بعض خصائص المفتاح للرمازات المثلى. وبعد تحديد هذه الخصائص بدقة، تصبح خوارزمية هوفمان واضحة إلى حد كبير. يمكن تعميم خصائص الطول في مثال الكلمات الثلاث كالتالي: كلما كانت كلمة الرماز أطول كلما قلت احتمالية الرمز. وبدقة أكثر:

المعضلة 1.5.2: للرمازات المثلى الخاصية التالية: إذا كان $p_j < p_i$ فإن $l_j \geq l_i$

البرهان: لنفترض العكس أي أنه لدى الرماز $p_i < p_j$ و $l_j < l_i$ ، ومنه يتضمن \bar{L} التالي: $p_i l_i + p_j l_j$ ، إذا كانت الكلمتان قابلتين للتبديل، أي يمكن تبديل l_i و l_j ، فإن الجمع سينقص:

$$(p_i l_i + p_j l_j) - (p_i l_j + p_j l_i) = (p_i - p_j)(l_i - l_j) > 0$$

ومنه تنقص \bar{L} ، لذلك فأي رماز يمتلك $p_j < p_i$ و $l_j < l_i$ غير مثالي. خاصية بسيطة للرماز الأمثل تكون كالتالي:

المعضلة 2.5.2: تمتلك رمازات البادئة الحرة المثلى خاصية أن شجرة الرماز المرافقة كاملة.

البرهان: إذا كانت الشجرة ناقصة، يمكن عندها تخفيض طول كلمة الرماز (انظر الشكل 2.2 و 3.2). نعرف النسب بأنها المحارف الإثنائية التي تختلف عن كلمة الرماز بالخانة الأخير فقط. تكون النسب في شجرة الرماز الكاملة إما كلمة رماز أو عقدة وسيطة في الشجرة.

المعضلة 3.5.2: تمتلك رمازات البادئة الحرة المثلى خاصية أنه من اجل كل من كلمات الرماز الأطول، تكون نسب كلمة الرماز هي كلمة رماز طويلة أخرى.

البرهان: لا يمكن أن تكون نسب كلمة الرماز الأطول بادئة لكلمة رماز أطول. وبما أنها لا يمكن أن تكون عقدة وسيطة في الشجرة فهي كلمة رماز.

للسهولة، يمكن افتراض أن $M = |\chi|$ رمزاً في الأبجدية ومرتبة بحيث تكون $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_M$.

المعضلة 4.5.2: ليكن X رمز عشوائي يتابع كتلة احتمالية يحقق $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_M$. فإنه يوجد رماز بادئة حرة مثالي ل X فيه كلمات الرماز ل $M-1$ و M نسب، ولديه طول أعظمي في الرماز.

البرهان: يوجد عدد محدود من الرمازات تحقق متراجحة كرافت بتساو¹⁵، ولذلك يتم اعتبار أحدها مثالي. إذا كان $p_M < p_j$ من أجل كل $z < M$ ، نجد من المعضلة 2.5.1 إنه $l_M \geq l_j$ لكل z وتكون l_M بطول اعظمي. إذا كان $p_M = p_j$ من أجل $z < M$ ، ومنه يجب أن تكون l_j بطول أعظمي من أجل z واحدة على الأقل. ثم إذا l_M ليست أعظمية، فيمكن التبديل بين $C(k)$ و $C(M)$ بدون ضياع المثالية، بعدها تصبح l_M اعظميه. إذا كانت $C(k)$ نسب ل $C(M)$ في هذا الترميز المثالي، ستكون l_k أعظمية. وحسب المناقشة السابقة أعلاه يمكن التبديل بين $C(k)$ و $C(M-1)$ بدون ضياع المثالية.

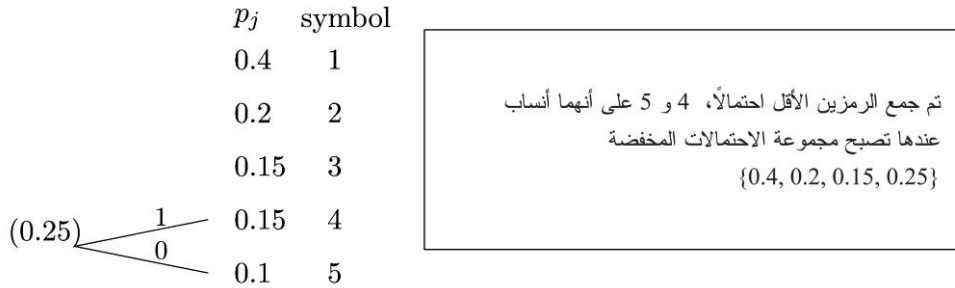
تختار خوارزمية هوفمان شجرة رماز مثالي بدأ بالرمزين الأقل احتمالية، خصوصاً M و $M-1$. وتحددهما ليكونا نسبين لشجرة الترميز غير المعروفة بعد. لا فارق من انتهاء النسب ب 0 أو 1. كيف يتم اختيار بقية الشجرة؟

إذا تم حذف زوج النسب السابق من الشجرة، فيجب أن تحتوي الشجرة على $M-1$ ورقة، سيكون هناك $M-2$ ورقة لأول $M-2$ رمز أصلي، والعقدة الأب للنسب المحذوف. يتم جمع الاحتمال p'_{M-1} مع الورقة الجديدة كـ $p_M + p_{M-1}$. يُنظر إلى هذه الشجرة بـ $M-1$ ورقة كما لو أنها رماز لرمز عشوائي مُحْفَض X' مع مجموعة احتمالات أقل معطاة كـ p_1, \dots, p_{M-2} لـ $M-2$ رمز أصلي و p'_{M-1} من أجل الرمز $M-1$ الجديد.

لإكمال الخوارزمية، يتم إنشاء رماز مثالي ل X' . سيظهر أنه يمكن توليد رماز مثالي ل X بإنشاء رماز مثالي ل X' ، ثم تطعيم النسب الى

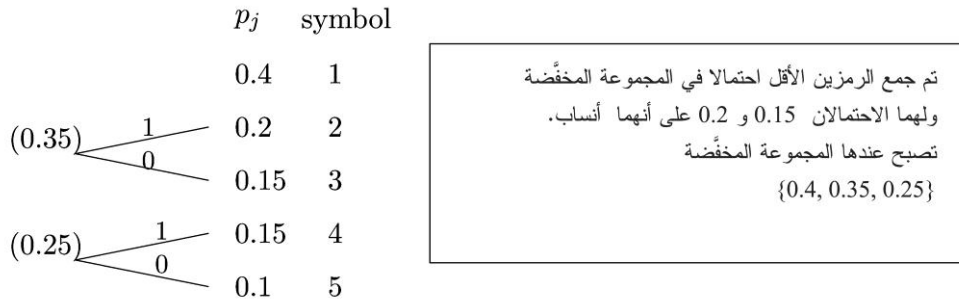
¹⁵ يبرهن التمرين 10.2 ذلك لمن يرغب هذه الأشياء.

الورقة الموافقة للرمز $M-I$. على افتراض هذه الحقيقة للحظة، يتم استبدال مسالة انشاء رماز أمثلي بـ M رمز بإنشاء رماز مثالي بـ $M-I$. ويمكن تخفيض اضافي بتطبيق نفس الإجرائية على $M-I$ رمز عشوائي. وما إلى ذلك للوصول إلى رمز إثنائي يكون فيه الرماز الأمثل واضحاً. سيوضح المثال التالي في الاشكال من 9.2 إلى 11.2 كامل الإجرائية. يبدأ برمز عشوائي X باحتمالات $\{0.4, 0.2, 0.15, 0.15, 0.1\}$. ويولد الرمز العشوائي X' في الشكل (9.2). التخفيضات المتتالية تظهر في الشكلين (10.2) و(11.2).

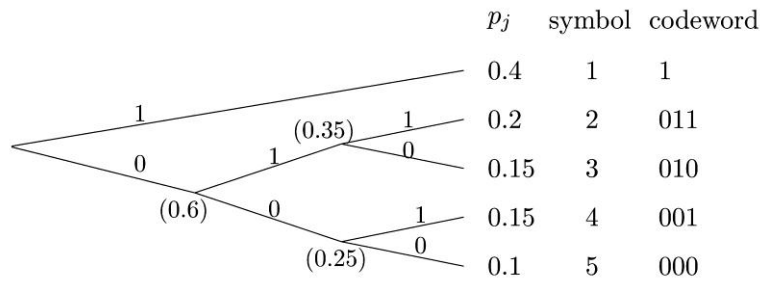


الشكل 9.2: الخطوة الأولى في خوارزمية هوفمان، ايجاد X' من X .

يعطي الشكل (12.2) مثالا آخر باستخدام مجموعة اخرى من الاحتمالات تقود مجموعة اطوال كلمات مختلفة.

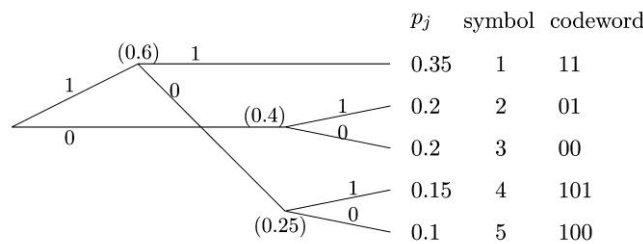


الشكل 10.2: ايجاد X'' من X'



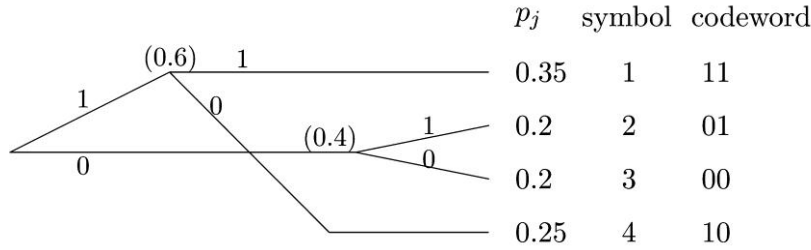
الشكل 11.2: رماز هوفمان الكامل

الشيء الوحيد المتبقي لإظهار أن خوارزمية هوفمان تُنشئ رمازات مثلى هو بيان أن الرماز المثالي المخفض لـ X' يُنتج رمازا مثاليا لـ X . اعتبر الشكل (13.2) والذي يظهر شجرة الرماز لـ X' الموافق لـ X في الشكل (12.2).



الشكل 12.2: ترميز هوفمان الكامل لمجموعة احتمالات مختلفة.

لاحظ ان الشكلين (13.2) و(12.3) يختلفان في $C(4)$ و $C(5)$ ، لكل منهما طول 3 في الشكل (12.2) وتم تبديلهما بكلمة ترميز جديدة بطول 2 في الشكل (13.2). احتمال الرمز الجديد هو مجموع احتمالي الرمز في الشكل (12.2). ومنه يكون الطول المتوقع لكلمة الترميز في الشكل (12.2) هو نفسه في الشكل (13.2) مضافاً $p_4 + p_5$. ذلك يعني أن $C(4)$ و $C(F)$ تمتلك بت واحد أكثر من العقدة الأب.



الشكل 13.2: ترميز هوفمان الكامل المخفض من أجل الشكل 12.2.

بشكل عام، مقارنة الطول المتوقع \bar{L}' لأي ترميز X' والطول \bar{L} الموافق لـ الترميز المولد من تمديد $C(M-1)$ في الترميز X' إلى النسب من أجل M و $M-1$ ، أي يكون:

$$\bar{L} = \bar{L}' + p_{M-1} + p_M$$

هذه العلاقة صحيحة من أجل كل الرمازات لـ X والتي تكون فيها $C(M)$ و $C(M-1)$ نسب (والتي تحتوي ترميزاً مثالياً واحداً على الأقل). يثبت ذلك أن تخفيض \bar{L} موافق لتخفيض \bar{L}' . ويظهر أن $\bar{L}_{\min} = \bar{L}'_{\min} + p_{M-1} + p_M$ ، يكمل ذلك إثبات مثالية خوارزمية هوفمان.

ومن الغريب أنه لا يمكن لخوارزمية هوفمان ولا لإثباتها للمثالية أن يعطيا أية إشارة لحدود الانتروبية $H[X] \leq \bar{L}_{\min} < H[X] + 1$ وبشكل مشابه، لا تقترح حدود الانتروبية خوارزمية هوفمان. أحدهما مفيدة في إيجاد رماز مثالي والأخرى تقدم حدود الأداء. كمثال على مدى الأطوال المثالية التقريبية $-\log p_j$ ، احتمالات المصدر في الشكل (11.2) هي $\{0.40, 0.20, 0.15, 0.15, 0.10\}$ ، لذلك يأخذ $-\log p_j$ القيم $\{1.32, 2.32, 2.74, 2.74, 3.32\}$ بت. وهذا يقارب الأطوال التقريبية $\{1, 3, 3, 3, 3\}$ للرماز المثالي تماماً. وعلى نحو مشابه فإن الانتروبية $H[X] = 2.15$ بت بالرمز، و $\bar{L}_{\min} = 2.2$ بت بالرمز، وهذا قريب للانتروبية. مع ذلك، من الصعب تحديد الأطوال المثالية، حتى في الحالات البسيطة، بدون الخوارزمية.

كمثال من الشكل (12.2)، احتمالات المصدر $\{0.35, 0.20, 0.20, 0.15, 0.10\}$ ، القيم لـ $-\log p_j$ هي $\{1.51, 2.32, 2.32, 2.74, 3.32\}$ ، والانتروبية $H[X] = 2.20$. لا يختلف هذا كثيراً عن الشكل (11.2). مع ذلك، يعطي ترميز هوفمان الأطوال $\{2, 2, 2, 3, 3\}$ وطول وسطي $\bar{L} = 2.25$ بت بالرمز. (الترميز في الشكل 11.2 يمتلك طول وسطي $\bar{L} = 2.30$ من اجل احتمالات المصدر). وسيكون من الصعب التكهن هذه الاضطرابات دون تنفيذ الخوارزمية.

6.2 الانتروبية والرمازات ثابتة إلى متغيرة الطول

ستدرس الانتروبية بمزيد من التفاصيل، لفهم أفضل لحدود الانتروبية وفهم الانتروبية لـ n صف من أحرف المصدر المتعاقبة. تُعتبر الانتروبية $H[X]$ قياساً أساسياً لعشوائية رمز عشوائي X . وتمتلك العديد من الخصائص الهامة. الخاصية الأكثر أهمية هي كونها تمثل أصغر عدد متوقع \bar{L} للبتات في رمز المصدر المطلوب لربط سلسلة رموز المصدر بسلسلة من البتات بطريقة وحيدة فك الترميز. وسنعرض هذه الخاصية بتعميم الرمازات المتغيرة الأطوال الآنفه الذكر إلى رمازات تُرمز فيها رموز المصدر المتعددة مع بعضها. ولكن لا بد من استخراج عدة خصائص للانتروبية.

تعريف: إن الانتروبية لرمز عشوائي متقطع X بـ أبجدية χ هي:

¹⁶ إذا رغبتنا بدراسة رموز عشوائية مقطعة فيها رمز أو أكثر باحتمال يساوي الصفر، يمكننا استخدام الصيغة باعتبار $\lim_{p \rightarrow 0} p \log(1/p) = 0$ وبعبارة تعريف $0 \log 1/0$ على أنه 0 في العلاقة (11.2). يوضح التمرين 18.2 تأثير الرموز ذات الاحتمال صفر في رماز البادئة الحرة المتغير الطول.

$$(11.2) \quad H[X] = \sum_{x \in \mathcal{X}} p_X(x) \log \frac{1}{p_X(x)} = - \sum_{x \in \mathcal{X}} p_X(x) \log p_X(x)$$

باستخدام اللوغارتم للأساس 2، تصبح وحدة الانتروبية هي بت/الرمز. إذا كان الأساس اللوغارتمي هو e ، تصبح وحدة الانتروبية نات/الرمز. التحويل سهل، فقط تذكر ان $\log y = (\ln y)/(\ln 2)$ أو $\ln y = (\log y)/(\log e)$ ، وكلاهما ينتج من $y = e^{\ln y} = 2^{\log y}$ بأخذ اللوغارتم. ومنه استخدام أساس آخر للوغارتم هو فقط تغيير رقمي بوحدة الانتروبية عبر معامل تقييس.

لاحظ ان الانتروبية $H[X]$ لمتحول عشوائي X تعتمد على احتمالات الخرج X المختلفة، وليس على أسماء المخرجات. لذلك كمثال، الانتروبية لرمز عشوائي يأخذ القيم أخضر، أزرق و أحمر باحتمالات 0.2، 0.3، 0.5، على الترتيب هي نفسها الانتروبية لرمز عشوائي يأخذ القيم أحد، اثنين و جمعة باحتمالات 0.2، 0.3، 0.5.

تدعى الانتروبية $H[X]$ أيضاً الغموض $uncertainty$ لـ X ، أي أنها قياس العشوائية لـ X . لاحظ أن الانتروبية هي القيمة المتوقعة للشعاع العشوائي¹⁷ $\log(1/p_X(X))$ ، ومنه تكون الانتروبية القيمة المتوقعة لـ $\log pmf$ بعض خصائص الانتروبية:

- من أجل أي رمز عشوائي تكون الانتروبية X ، $H[X] \geq 0$. وذلك لأن $p_X(x) \leq 1$ ، ولذلك $\log(1/p_X(x)) \geq 0$. تتبع النتيجة كما في العلاقة (11.2).
- تكون $H[X]$ ، إذاً فقط إذا كانت X محددة. وذلك لأن $p_X(x) \log(1/p_X(x)) = 0$ إذا فقط إذا كان $p_X(x) = 0$ or 1.
- الانتروبية لرمز عشوائي X متساوي الاحتمالات بأجدية γ قياسها M هي $H[X] = \log M$. ذلك لأنه إذا كان $p_X(x) = 1/M$ لكل $x \in \mathcal{X}$ ، ومنه:

$$H[X] = \sum_{x \in \mathcal{X}} \frac{1}{M} \log M = \log M$$

في هذه الحالة، سيكون الشعاع العشوائي $\log p_X(X)$ له قيمة ثابتة $\log M$.

- بشكل أعم، الانتروبية لرمز عشوائي X مُعرّف على أجدية γ قياسها M ، تُحقق $H[X] \leq \log M$ ، وتحقق المساواة فقط عند تساوي احتمالات الرموز. لنرى ذلك، لاحظ أن:

$$\begin{aligned} H[X] - \log M &= \sum_{x \in \mathcal{X}} p_X(x) \left[\log \frac{1}{p_X(x)} - \log M \right] = \sum_{x \in \mathcal{X}} p_X(x) \left[\log \frac{1}{M p_X(x)} \right] \\ &\leq (\log e) \sum_{x \in \mathcal{X}} p_X(x) \left[\frac{1}{M p_X(x)} - 1 \right] = 0 \end{aligned}$$

وهذا يستخدم المتراجحة $\log u < (e-1)u$ (بعد حذف الحدود التي يكون فيها $p_X(x) = 0$). لتحقيق المساواة، من الضروري أن يكون $p_X(x) = 1/M$ لكل $x \in \mathcal{X}$.

كمخلص، كل الرموز العشوائية X المعرفة على أجدية γ ، تُحدث أعلى قيمة للانتروبية في حال تساوي الاحتمالات أي $H[X] = \log M$. و تُحدث أصغر قيمة لها في حالة الحتمية، أي $H[X] = 0$. هذا يدعم فكرة أن الانتروبية لرمز عشوائي X هي مقياس لعشوائيته.

لأي زوج من الرموز العشوائية X و Y ، يوجد رمز عشوائي آخر. إن قيم عينات XY هي مجموعة كل الأزواج xy ، $x \in \mathcal{X}$ ، $y \in \mathcal{Y}$ ، وقيم الاحتمالات للعينات xy هي $p_{XY}(x, y)$. خاصية مهمة للانتروبية أنه إذا كان X و Y مستقلين فإن الانتروبية $H[XY] = H[X] + H[Y]$ ، ذلك لان:

$$\begin{aligned} H[XY] &= - \sum_{x \times y} p_{XY}(x, y) \log p_{XY}(x, y) \\ (12.2) \quad &= - \sum_{x \times y} p_X(x) p_Y(y) (\log p_X(x) + \log p_Y(y)) = H[X] + H[Y] \end{aligned}$$

¹⁷ يدعى هذا الشعاع العشوائي عادة المعلومات الذاتية، أو المفاجئة، أو الغموض. وهو يحمل بعضاً من معاني تلك المصطلحات، ولكن ذلك سبب الكثير من الارتباك. إن استخدام $\log pmf$ يوضح المفيد هنا.

بتمديد ذلك لـ n رمز عشوائي، الانتروبية لرمز عشوائي X^n موافقة لكتلة من n خرج يتبع توزيع متطابق مستقل iid من مصدر مُقطع عديم الذاكرة هي $H[X^n] = nH[X]$. ذلك يعني أن كل رمز يضيف على انتروبية الكتلة مقدار $H[X]$ من البتات.

1.6.2 الرمازات الثابتة إلى المتغيرة الطول

بالعودة إلى الفقرة 2.2 جرى تقطيع سلسلة الرموز من المصدر إلى كتل متعاقبة مؤلفة من n رمزا جرى ترميزها بعد ذلك. كانت كل كتلة رمزا عشوائياً مقطوعاً بحد ذاته، وبالتالي يمكن ترميزها كما في حالة الرمز الأحادي. رأينا أن جعل n كبيرة، سيمكّننا إنشاء رمازات ثابتة الطول يكون فيها عدد البتات المرّمزة للمنبع \bar{L} قريبا من $\log M$ بأكبر قدر مرغوب.

نأخذ نفس المقاربة من أجل ترميز متغير الطول لمصدر مقطع عديم الذاكرة. تكون الانتروبية لكتلة مؤلفة من n رمزا من المصدر X_1, X_2, \dots, X_n هي $H[X^n] = nH[X]$. مثل هذه الكتلة هي رمز عشوائي بحد ذاته ويمكن ترميزها باستخدام رماز بادئة حرة متغير الطول. يوفر هذا رمازاً من ثابت إلى متغير الطول، ويربط n صفا من رموز المصدر بسلاسل إثنائية متغير الطول. سنبين أن العدد المتوقع \bar{L} للبتات المرّمزة في رمز المصدر يمكن أن يكون قريبا من $H[X]$ قدر المرغوب.

هذه النتيجة بسيطة جداً وعلى نحو مفاجئ. ليكن $E[L(X^n)]$ الطول المتوقع لرماز البادئة الحرة المتغير الطول لـ X^n . نشير إلى الطول المتوقع الأصغر لأي رماز بادئة حرة لـ X^n بـ $E[L(X^n)]_{\min}$. عندها يمكن تطبيق النظرية 1.5.2. وباستخدام العلاقة (7.2):

$$(13.2) \quad H[X^n] \leq E[L(X^n)]_{\min} < H[X^n] + 1$$

نعرف $\bar{L}_{\min,n} = \frac{E[L(X^n)]_{\min}}{n}$ ؛ أي أن $\bar{L}_{\min,n}$ هو أصغر عدد من البتات في رمز المصدر على كل رمازات البادئة الحرة لـ X^n . من العلاقة (13.2):

$$(14.2) \quad H[X] \leq \bar{L}_{\min,n} < H[X] + \frac{1}{n}$$

تؤسس هذه النتيجة البسيطة للنظرية المهمة التالية:

نظرية 1.6.2 (نظرية ترميز البادئة الحرة للمصدر). من أجل أي مصدر مُقطع عديم الذاكرة ذي انتروبية $H[X]$ وأي عدد صحيح $n \geq 1$ ، يوجد ترميز بادئة حرة لمصدر بـ n صف له طول كلمة رماز متوقع لرمز المصدر \bar{L} يكون على الأغلب $H[X] + 1/n$. علاوة على ذلك، لا يمكن لأي ترميز بادئة حرة لكتل مصدر ثابتة الطول بأي حجم n ان ينتج طول كلمة رماز متوقع \bar{L} أقل من $H[X]$.

تعطي هذه النظرية أهمية كبيرة لانتروبية مصدر مُقطع عديم الذاكرة: $H[X]$ هو أصغر عدد متوقع \bar{L} من البتات في رمز المصدر الذي يمكن تحصيله برمازات ثابتة إلى متغيرة الطول ذات بادئة حرة.

هناك نوعان من الأسئلة المحتملة عن أهمية نظرية. أولاً، هل يمكن إيجاد رمازات واحدة فك الترميز غير رمازات البادئة الحرة والتي يكون فيها \bar{L} أصغر من $H[X]$ ؟ ثانياً، هل يمكن تخفيض \bar{L} باستخدام رمازات ثابتة إلى متغيرة الطول؟

على سبيل المثال، إذا كان لمصدر إثنائي $p_1 = 10^{-6}$ و $p_0 = 1 - 10^{-6}$ ، يجب على الرمازات الثابتة إلى المتغيرة الطول أن تُستخدم بشكل ملحوظ n صفاً طويلاً من رموز المصدر لكي تقترب من حدود الانتروبية. إن ترميز تشغيل الطول، والذي يعتبر مثلاً لترميز ثابت إلى متغير الطول، هو نهج أكثر عقلانية في هذه الحالة: يُرمز المصدر لأول مرة إلى سلسلة تمثل عدد أصفار المصدر بين كل 1، ومن ثم يتم ترميز هذه السلسلة من الأعداد الصحيحة. جرى تطوير تقنية الترميز هذه أكثر في التمرين 23.2.

يقوي المقطع التالي النظرية 1.6.2، ويبين أن الانتروبية هي بالفعل الحد الأدنى لـ \bar{L} على كل تقنيات الترميز وحيدة فك الترميز.

7.2 خاصية التوزيع المتساوي المتقارب AEP ونظريات ترميز المصدر

سنراجع أولاً القانون الضعيف¹⁸ للأعداد الكبيرة (WLLN) weak law of large numbers من أجل سلاسل من متغيرات عشوائية iid. بتطبيق WLLN على سلسلة جزئية iid، سنبي صيغة ملحوظة لخاصية التوزيع المتساوي المتقارب (AEP). بصورة أولية، تقول AEP أنه من أجل سلسلة محارف طويلة من iid n رمز عشوائي مقطع X_1, \dots, X_n ، فإنه يوجد "مجموعة نمطية" من محارف العينة (x_1, \dots, x_n) والتي احتمالها الإجمالي نحو 1. يوجد قرابة $2^{nH(X)}$ محرف نمطي بطول n ، وكل منها له احتمال $2^{-nH(X)}$ تقريباً. لا بد أن نكون حذرين حول معنى كلمة "تقريباً" و"نحو" هنا.

تعطينا AEP فهما أساسياً ليس فقط لترميز المصادر المقطعة عديمة الذاكرة، بل أيضاً للبنية الاحتمالية لهذه المصادر ولمعنى الانتروبية. ستبين لنا AEP لماذا لا تملك الأنواع العامة لمرمزات المصدر التي من مثل المرمزات المتغيرة إلى متغيرة الطول لا تملك بشكل صارم أصغر طول متوقع في رمز المصدر من أفضل الرمازات الثابتة إلى المتغيرة الطول ذات البادئة الحرة للمصادر المقطعة عديمة الذاكرة.

1.7.2 قانون الأعداد الكبيرة الضعيف

ليكن Y_1, Y_2, \dots سلسلة من المتحولات العشوائية الـ iid. وليكن \bar{Y} و σ_Y^2 المتوسط والتشتت لكل Y_j . نعرف وسطى العينة A_Y^n لـ Y_1, \dots, Y_n كما يلي:

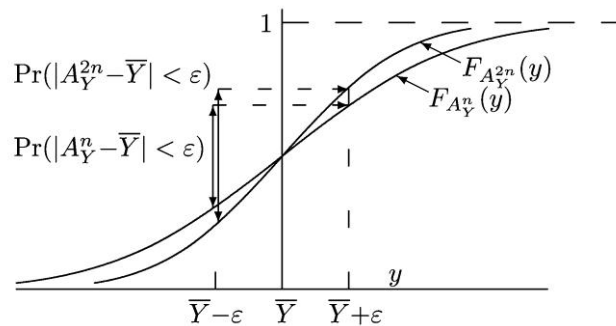
$$A_Y^n = \frac{S_Y^n}{n} \quad \text{where} \quad S_Y^n = Y_1 + \dots + Y_n$$

وسطى العينة A_Y^n هو متحول عشوائي بحد ذاته. بينما المتوسط \bar{Y} هو عدد حقيقي. بما أن للمجموع S_Y^n متوسط $n\bar{Y}$ وتشتت $n\sigma_Y^2$ ، يكون لوسطى العينة A_Y^n متوسط $E[A_Y^n] = \bar{Y}$ وتشتت $\sigma_{A_Y^n}^2 = \sigma_Y^2/n$. من المهم فهم أن التشتت للمجموع يزداد مع n وأن المجموع المنتظم (وسط العينة A_Y^n) يتناقص مع n .

تنص متراجحة تشيبيتشف على أنه إذا كان $\sigma_X^2 < \infty$ لمتحول عشوائي X ، فإنه $\Pr\{|X - \bar{X}| \geq \varepsilon\} \leq \sigma_X^2/\varepsilon^2$ وذلك من أجل أي $\varepsilon > 0$ (انظر التمرين 3.2 أو أي نص عن الاحتمالات من قبيل [2] و [24]). بتطبيق المتراجحة على A_Y^n تنتج الصيغة الأبسط من WLLN: لأي $\varepsilon > 0$

$$(15.2) \quad \Pr\{|A_Y^n - \bar{Y}| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma_Y^2}{n\varepsilon^2}$$

هذا مبين في الشكل 14.2:



الشكل 14.2: رسم لتابع التوزيع لوسطى العينة من أجل n مختلفة. كلما زادت n ، يقترب تابع التوزيع خطوة واحدة من \bar{Y} . تحدد العلاقة (15.2) الحدود العليا لمقدار اقتراب للخطوة ضمن $\bar{Y} \pm \varepsilon$

بما أن الطرف اليميني من (15.2) يقترب من الصفر مع ازدياد n من أجل $\varepsilon > 0$ ثابتة:

$$(16.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\{|A_Y^n - \bar{Y}| \geq \varepsilon\} = 0$$

¹⁸ كلمة ضعيف مغلوطة، إذ إن القانون هو أحد أكثر النتائج فائدة في نظرية المعلومات. يوجد أيضاً قانون قوي للأعداد الكبيرة؛ يكمن الفرق في أداء الحد لسلسلة غير منتهية من الأشعة العشوائية، لكن هذا الاختلاف ليس ذا أهمية هنا. حيث يطبق القانون الضعيف في بعض الحالات ولا يطبق القانون القوي، لكن هذا أيضاً ليس ذا شأن هنا.

من أجل n كبيرة، تبين (16.2) أن $A_W^n - \bar{Y}$ صغيرة باحتمال كبير. لكنها لا تقول أن $A_W^n = \bar{Y}$ باحتمال كبير (أو حتى باحتمال غير صفري)، ولا تقول إن $\Pr(|A_W^n - \bar{Y}| \geq \varepsilon) = 0$. كما هو ظاهر في (14.2)، كل من ε غير الصفري والاحتمال غير الصفري مطلوبان هنا، حتى لو أنه يمكن جعلهما صغيرين قدر المرغوب بزيادة n .

كملاحظ، يكون وسطي العينة A_W^n متحولاً عشوائياً وله متوسط \bar{Y} مستقل عن n ، ولكن لديه انحراف معياري σ_Y/\sqrt{n} يقترب من الصفر عندما تسعى n إلى اللانهاية. الـ WLLN هو ببساطة خاصية التركيز والمذكورة بدقة في (15.2) أو (16.2).

WLLN، في صيغة (16.2) يطبق بشكل أكثر عمومية من الحالة البسيطة لـ متحول عشوائي iid. في الحقيقة، تقدم (16.2) الوصلة المركزية بين النموذج الاحتمالي والظاهرة الحقيقية المراد نمذجتها. يمكن مراقبة المخرجات لكل من النموذج والواقع، ولكن الاحتمالات يمكن إسنادها فقط للنموذج. يُطبق WLLN على المتحول العشوائي في النموذج، وخاصية التركيز (إن وجدت) تطبق على الظاهرة الواقعية الموافقة، وتقدم فحص أساسي فيما إذا كان النموذج يتوافق بشكل معقول مع الواقع.

2.7.2 خاصية التوزيع المتساوي المتقارب

يبدأ هذا المقطع بسلسلة من الرموز iid العشوائية ويعرّف سلسلة من المتحولات العشوائية كتتابع لهذه الرموز. تُطبق WLLN على المتحولات العشوائية، وستسمح بتصنيف سلاسل العينة من الرموز بأنها نمطية أو لا، وسيؤدي إلى نتائج تمت الإشارة إليها سابقاً. ليكن X_1, X_2, \dots سلسلة من الرموز iid العشوائية المقطعة بتابع كتلة احتمالية مشترك $x \in \mathcal{X}$ ، $p_X(x) > 0$. من أجل كل رمز x من الأبجدية \mathcal{X} ، ليكن $w(x) = -\log p_X(x)$. من أجل كل X_k في السلسلة، نعرف $W(X_k)$ ليكون متحول عشوائي يأخذ القيمة $w(x)$ عندما $X_k = x$. ومنه $W(X_1), W(X_2), \dots$ هي سلسلة متحولات عشوائية iid متقطعة ولكل منها متوسط:

$$(17.2) \quad E[W(X_k)] = - \sum_{x \in \mathcal{X}} p_X(x) \log p_X(x) = H[X]$$

حيث إن $H[X]$ هي الانتروبية للرمز العشوائي X .

المتحول العشوائي $W(X_k)$ هو لوغارتم تابع الكتلة الاحتمالية $\log pmf$ لـ X_k والانتروبية لـ X_k هي متوسط $W(X_k)$. الخاصية الأكثر أهمية لـ $\log pmf$ من أجل رمز عشوائي iid تأتي من المراقبة، كمثال، ذلك أنه من أجل الحدث $X_1 = x_1, X_2 = x_2$ يكون الخرج لـ $W(X_1) + W(X_2)$:

$$(18.2) \quad w(x_1) + w(x_2) = -\log p_X(x_1) + \log p_X(x_2) = -\log\{p_{X_1} p_{X_2}(x_1, x_2)\}$$

بكلمات أخرى، تابع الكتلة الاحتمالية المشترك لرموز عشوائية مستقلة هو جداء تابع الكتلة الاحتمالية الخاص بكل رمز، ولذلك لوغارتم تابع الكتلة الاحتمالية المشترك هو جمع اللوغارتم لتابع الكتلة الاحتمالية الخاص للرموز.

نستطيع تعميم (18.9) إلى سلسلة محارف من n رموز عشوائي، $X^n = (X_1, \dots, X_n)$ هو الحدث $X^n = x^n$ حيث $x^n = (x_1, \dots, x_n)$ ، وخرج المجموع $W(X_1) + \dots + W(X_n)$ هو:

$$(19.2) \quad \sum_{k=1}^n w(x_k) = - \sum_{k=1}^n \log p_X(x_k) = -\log p_{X^n}(x^n)$$

يمكن الآن تطبيق WLLN على وسطي العينة لـ $\log pmf$ وليكن:

$$(20.2) \quad A_W^n = \frac{W(X_1) + \dots + W(X_n)}{n} = \frac{-\log p_{X^n}(X^n)}{n}$$

هو وسطي العينة لـ $\log pmf$.

من العلاقة (15.2) ينتج ان:

$$(21.2) \quad \Pr(|A_W^n - E[W(X)]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma_W^2}{n\varepsilon^2}$$

بتعويض (17.2) و (20.2) في (21.2):

$$(22.2) \quad \Pr \left(\left| \frac{-\log p_{X^n}(X^n)}{n} - H[X] \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{\sigma_W^2}{n\varepsilon^2}$$

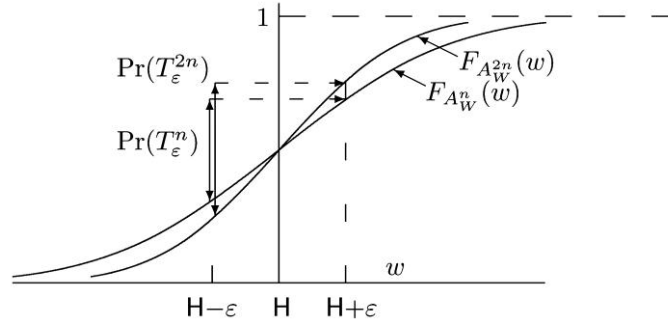
لكي نفسر هذه النتيجة، نعرف المجموعة النمطية T_ε^n من أجل أي $\varepsilon > 0$:

$$(23.2) \quad T_\varepsilon^n = \left\{ x^n: \left| \frac{-\log p_{X^n}(x^n)}{n} - H[X] \right| < \varepsilon \right\}$$

ذلك أن T_ε^n مجموعة من محارف المصدر بطول n والتي لها وسطي عينة لـ \log pmf هو نفسه المتوسط $H[X]$. تنص المعادلة (22.2) على أن الاحتمال الكلي لكل السلاسل بطول n وليست في T_ε^n هي تقريباً $\sigma_W^2/(n\varepsilon^2)$. حيث:

$$(24.2) \quad \Pr(X^n \in T_\varepsilon^n) \geq 1 - \frac{\sigma_W^2}{n\varepsilon^2}$$

كلما زادت n ، يقترب الاحتمال الكلي لـ T_ε^n من الواحد من أجل أي $\varepsilon > 0$ ، ولذلك تكون T_ε^n من المؤكد أنها مجموعة نمطية من سلاسل المصدر وهذا موضح في الشكل (15.2).



الشكل 15.2: رسم لتابع التوزيع لوسطي العينة \log pmf، بازياد n ، يقترب تابع التوزيع بخطوة وحدة من H . المجموعة النمطية هي مجموعة محارف العينة بطول n والتي يبقى وسطي العينة \log pmf قريب من H . كما معروض، احتمالها يقترب من 1 عندما تسعى n إلى اللانهاية.

بإعادة كتابة (23.2) بالصيغة التالي:

$$T_\varepsilon^n = \{x^n: n(H[X] - \varepsilon) < -\log p_{X^n}(x^n) < n(H[X] + \varepsilon)\}$$

بالضرب بـ 1 والرفع إلى اس:

$$(25.2) \quad T_\varepsilon^n = \{x^n: 2^{-n(H[X]+\varepsilon)} < p_{X^n}(x^n) < 2^{-n(H[X]-\varepsilon)}\}$$

للعلاقة (25.2) دلالة بديهية أن السلسلة من n محرف في T_ε^n لها احتمالات متساوية تقريباً، وهو نفس نوع التقريب المستخدم عند الحديث عن أن $10^{-1000} \approx 10^{-1001}$. هذه الأعداد تختلف بمعامل من رتبة 10، لكن لمثل هذه الأعداد الصغيرة من المنطقي مقارنة الأسس بدلاً من الأرقام مجد ذاتها. بنفس الطريقة، نسبة الحد الأعلى للحد الأدنى في (25.2) هو 2^{2n} ، والتي تنمو بشكل غير محدود مع n عند ε ثابتة. ومع ذلك كما نرى في (23.2)، أن $-\frac{1}{n} \log p_{X^n}(x^n)$ يساوي تقريباً $H[X]$ من أجل جميع $x^n \in T_\varepsilon^n$. هذه فكرة مهمة، كما أنه لا يضر الاعتقاد أن السلاسل من n محرف في T_ε^n تكون تقريباً متساوية الاحتمالات.

مجموعة كل السلاسل من n محرف من رموز المصدر تنفصل إلى مجموعة نمطية T_ε^n وأخرى مكاملة غير نمطية $(T_\varepsilon^n)^c$. لدى المجموعة النمطية احتمال كلي لا يتجاوز $\sigma_W^2/(n\varepsilon^2)$. وعناصر المجموعة النمطية متساوية الاحتمالات. ولكل منها احتمال نحو $2^{-nH[X]}$. تعتمد المجموعة النموذجية T_ε^n على اختيار ε . عندما ينقص ε ، فإن تقريب توزيع متساوي (25.2) يصبح أكثر إحكاماً، ولكن الحد (24.2) على احتمال مجموعة نموذجية هو أبعد من 1. وبازدياد n ، مع ذلك فإن ε يمكن أن ينخفض ببطء، وبذلك يجعل احتمال مجموعة نموذجية أقرب إلى 1 وفي نفس الوقت يحكم الحدود على السلاسل المتساوية الاحتمالات.

دعونا الآن نقدر عدداً من العناصر T_ε^n في مجموعة نموذجية. حيث $p_{X^n}(x^n) > 2^{-n(H[X]+\varepsilon)}$ لكل $x^n \in T_\varepsilon^n$

$$1 \geq \sum_{x^n \in T_\varepsilon^n} p_{X^n}(x^n) > |T_\varepsilon^n| 2^{-n(H[X]+\varepsilon)}$$

وهذا يدل على أن $|T_\varepsilon^n| < 2^{n(H[X]+\varepsilon)}$. بكلمات أخرى، بما أن كل $x^n \in T_\varepsilon^n$ تُساهم بـ $2^{-n(H[X]+\varepsilon)}$ كحد أدنى إلى قيمة احتمال T_ε^n ، فإن عدد هذه المساهمات لا يزيد عن $2^{n(H[X]+\varepsilon)}$.

بالمقابل، بما أن $\Pr(T_\varepsilon^n) \geq 1 - \sigma_W^2/(n\varepsilon^2)$ ، فيمكن أن تكون $|T_\varepsilon^n|$ محددة سُغلياً بـ

$$1 - \frac{\sigma_W^2}{n\varepsilon^2} \leq \sum_{x^n \in T_\varepsilon^n} p_{X^n}(x^n) > |T_\varepsilon^n| 2^{-n(H[X]-\varepsilon)}$$

وهذا يدل على أن $|T_\varepsilon^n| > [1 - \sigma_W^2/(n\varepsilon^2)] 2^{n(H[X]-\varepsilon)}$. بالخصلة،

$$(26.2) \quad \left(1 - \frac{\sigma_W^2}{n\varepsilon^2}\right) 2^{n(H[X]-\varepsilon)} < |T_\varepsilon^n| < 2^{n(H[X]+\varepsilon)}$$

من أجل قيم كبيرة لـ n ، يكون للمجموعة النموذجية T_ε^n احتمال إجمالي يساوي 1، وتحتوي بشكل تقريبي $2^{nH[X]}$ عنصراً، ولكل من هذه العناصر احتمال يساوي تقريباً $2^{-nH[X]}$. أي مع الاقتراب من قيم كبيرة لـ n ، يحاكي الرمز العشوائي X^n منبعاً متساوي الاحتمالات بحجم أبجدية $2^{nH[X]}$.

إن القيمة $\sigma_W^2/(n\varepsilon^2)$ في كثير من المعادلات الأنفة هي ببساطة حدّ أعلى خاص لاحتمال المجموعة النموذجية. وهو يصبح صغيراً على نحو اعتباطي كلما زادت n لأي قيم ثابتة $\varepsilon > 0$. وبالتالي فمن المناسب ببساطة تبديل هذه الكمية بعدد حقيقي δ ؛ حيث من أجل أي $\delta > 0$ و $\varepsilon > 0$ فإن $\sigma_W^2/(n\varepsilon^2) \leq \delta$ وذلك من أجل قيم n كبيرة بما فيه الكفاية. تُعرف مجموعة النتائج هذه، والملخصة في نظرية التالية، بأنها الخاصية التقاربية للتوزيع المتساوي (AEP).

نظرية 1.7.2 (خاصية التوزع المتقارب المتساوي) نفرض أن X^n هي سلسلة iid n من الرموز العشوائية المقطعة $\{X_k, 1 \leq k \leq n\}$ لكل منها انتروبي $H[X]$. ولأجل كافة قيم $\delta > 0$ وكل قيم n الكبيرة بما فيه الكفاية، يكون $\Pr(T_\varepsilon^n) \geq 1 - \delta$ و $|T_\varepsilon^n|$ محدودتين بـ

$$(27.2) \quad (1 - \delta) 2^{n(H[X]-\varepsilon)} < |T_\varepsilon^n| < 2^{n(H[X]+\varepsilon)}$$

أخيراً، لاحظ أن العدد الإجمالي للسلاسل المختلفة من طول n من مصدر مع حجم الأبجدية M هو M^n . من أجل مصادر غير متساوية التوزيع، أي مصادر فيها $H[X] < \log M$ ، تكون نسبة عدد السلاسل النموذجية إلى إجمالي السلاسل نحو $2^{-n(\log M - H[X])}$ ، الذي يقترب من 0 أسياً مع n . وهكذا، لأجل قيم n كبير، فإن الغالبية العظمى من n هي سلاسل غير نمطية. قد يكون مفاجئاً أن هذه الغالبية العظمى تعول على التقليل جداً من حيث الاحتمالية. كما هو مبين في التمرين 26.2، فإن الأكثر احتمالاً من السلاسل الفردية هي أيضاً غير نمطية. هناك عدد قليل جداً منهم، ذو أهمية تذكر. سندرس فيما يلي ترميز المصدر في ضوء AEP.

3.7.2 نظريات ترميز المنبع

يمكننا أن نأخذ AEP مقدمة عن عملية ترميز السلاسل المؤلفة من n رمز منبع يحتاج فقط إلى توفير كلمة رماز لكل سلسلة x^n في المجموعة النموذجية T_ε^n . إذا كان تسلسل الأحداث x^n غير موجود في T_ε^n ، سيحدث فشل في الترميز. وبما أنه يمكن تقليل احتمال $x^n \notin T_\varepsilon^n$ باختيار n كبيرة بما فيه الكفاية، فيمكن التساهل في هذه الحالة.

بما أن هناك أقل من $2^{n(H[X]+\varepsilon)}$ سلسلة ذات n طول في T_ε^n ، فإن عدد كلمات رماز المصدر التي نحتاجها سيكون أقل من $2^{n(H[X]+\varepsilon)}$. إن اختيار كلمات رماز ذات طول ثابت يساوي $\lceil n(H[X] + \varepsilon) \rceil$ أكثر من كافي، ويسمح أيضاً لعدد إضافي من كلمات الرماز، إذا رغبتنا في ذلك، لبيان حدوث فشل الترميز. بأخذ تابع السقف بالاعتبار، تقاس القيمة $\bar{L} \leq H[X] + \varepsilon + 1/n$ بيت لكل رمز مصدر. لاحظ أن $\varepsilon > 0$ اعتباطي، ومن أجل أي ε ، فإن $\Pr\{\text{failure}\} \rightarrow 0$ عندما $n \rightarrow \infty$. وهذا يثبت النظرية التالية:

نظرية 2.7.2 (نظرية ترميز المصدر الثابت إلى الطول الثابت). لأجل أي مصدر مقطّع علمم الذاكرة مع الانتروبية $H[X]$ فمن أجل أي $\varepsilon > 0$ ، وأي $\delta > 0$ ، وأي n كبيرة بما فيه الكفاية، هناك رموز مصدر ثابت إلى طول ثابت ذي احتمال $\delta \leq \Pr\{\text{failure}\}$ يمثل كتل رموز المصدر الرموز بكلمات رموز ذات طول ثابت $L \leq H[X] + \varepsilon + 1/n$ بت لكل رمز منبع.

رأينا في الفقرة 2.2 أن استخدام ترميز المنبع الثابت إلى طول ثابت يتطلب $\log M$ بت لكل رمز مصدر إذا كان المطلوب ترميزاً وحيد الكشف (أي لا يسمح بالفشل)، ونرى الآن أن هذه القيمة انخفضت إلى أكثر قليلاً من $H[X]$ بت لكل رمز مصدر إذا سمحنا بحدوث فشل على نحو اعتباطي. يعطى هذا مثالاً جيداً للحالة التي تتصرف فيها $\delta > 0$ و 0 بشكل مختلف للغاية. وهناك أيضاً عكس لهذه النظرية التالية ناتج عن الجانب الآخر من نظرية AEP. وتقول إن احتمال الخطأ يقترب من الواحد لقيم n كبيرة إذا كان لدينا أقل من $H[X]$ بتا لكل رمز منبع.

نظرية 3.7.2 (عكس الرموز الثابتة إلى ثابتة الطول). بفرض أن X^n سلسلة من رموز عشوائية مقطعة عددها n ، حيث $\{X_k; 1 \leq k \leq n\}$ مع الانتروبية $H[X]$ لكل منها. ومن أجل أي $v > 0$ ، وبفرض X^n يمكن ترميزها إلى كلمات رموز ذات طول ثابت $[n(H[X] - v)]$ بت. من أجل أي $\delta > 0$ ، وأي n كبيرة بما فيه الكفاية تعطى δ بالعلاقة.

$$(28.2) \quad \Pr\{\text{failure}\} > 1 - \delta - 2^{-vn/2}$$

البرهان: تطبيق نظرية AEP، مع النظرية 1.7.2، مع $\varepsilon = v/2$. يمكن تزويد كلمات رموز $L = 2^{n(H[X]-v)}$ سلسلة مصدر نموذجي كحد أقصى، ومن (25.2) لكل من هذه احتمال $(2^{n(H[X]-v/2)})$ كحد أقصى. وبالتالي فإن الاحتمال الكلي لسلسلة نموذجية زودت بكلمات الرموز هذه هو على الأكثر $2^{-nv/2}$. من نظرية AEP، تتحقق العلاقة $1 - \delta \geq \Pr\{T_\varepsilon^n\}$ من أجل قيم n كبير بما فيه الكفاية. ويمكن تزويد كلمات رموز 19 على الأكثر لمجموعة فرعية T_ε^n باحتمال $2^{-nv/2}$ ، أما العناصر المتبقية من T_ε^n فستؤدي جميعها إلى أخطاء، وبالتالي تقود إلى (28.2).

بالانتقال من رموز ذات طول ثابت أكثر قليلاً من $H[X]$ بت لكل رمز المصدر إلى رموز أقل قليلاً من $H[X]$ بت لكل رمز المصدر، فإن احتمال الفشل يذهب من ما يقارب من 0 إلى ما يقارب 1 ، ومع زيادة n ، تقترب من تلك الحدود أكثر فأكثر.

4.7.2 حدود الانتروبية للأصناف العامة للرموز

رأينا أن العدد المتوقع من البتات المرزومة لكل رمز مصدر محدودة بـ $H[X]$ لمصادر iid باستخدام إما رموز ثابتة إلى ثابتة الطول أو ثابتة إلى متغيرة الطول. تختلف التفاصيل بمعنى أن السلاسل غير المحتملة يتم إسقاطها ببساطة في النظم ذات الطول الثابت، ولكن لديها ترميز طويلة بشكل غير طبيعي، مما يؤدي إلى فائض في الصوان، في النظم ذات الطول المتغير.

سنبين الآن أن أنواعاً أخرى من الرموز، مثل المتغير إلى الثابت، والمتغير إلى متغير، وحتى رموز أكثر عمومية تخضع أيضاً لحد الانتروبية. بدلاً من وصف الطبيعة المحتملة والمتنوعة لرموز المصدر هذه، سيتم عرضها ببساطة عن طريق تعريف بعض الخصائص التي يجب أن يحتويها مفكك الترميز. يظهر من خلال ذلك أيضاً أن مخططات الترميز لم تكتشف حتى الآن يجب أن تكون خاضعة أيضاً لنفس الحدود. يمثل المقابل للثابت إلى الطول الثابت في الفقرة الفرعية الأخيرة المفتاح لهذا.

لأي نوع من الرموز، ثم مفكك ترميز يقابل تسلسل البتات المرزومة إلى تسلسل رموز المصدر. من أجل رموز البادئة الحرة على مجموعة مؤلفة من k من رموز المصدر، ينتظر مفكك الترميز وصول كل كلمة رموز متغيرة الطول، ثم يقابلها بالمجموعة k من رموز المصدر، ومن ثم يبدأ فك الترميز للمجموعة التالية. أما من أجل النظم الثابتة إلى ذات الطول الثابت، فينتظر مفكك الترميز وصول كتلة من رموز الرموز و ثم يفكك ترميز الكتلة المقابلة من رموز المصدر.

ينتج المصدر بشكل عام سلسلة غير منتهية X_1, X_2, \dots من أحرف المصدر التي تم ترميزها إلى سلسلة غير منتهية من أرقام إثنائية مرزومة. يراقب مفكك الترميز هذا التسلسل المرزوم ويفكك ترميز رموز المصدر X_n عندما يصل عدد بتات كافي لاتخاذ قرار بشأنه. لأي مخطط ترميز ومفكك ترميز لمصدر iid مُعطى، عرف المتحول العشوائي D_n بوصفه عدد البتات المستقبلية التي تسمح باتخاذ قرار

¹⁹ لاحظ أن البرهان يسمح بتزويد كلمات رموز لمصادر نموذجية؛ وهو يقول ببساطة إن جزءاً كبيراً من المجموعة النموذجية لا يمكن ترميزه.

بشأن $X^n = X_1, \dots, X_n$. هذا يتضمن إمكانية وجود رموزات ومفككات ترميز يكون قد جرى فك ترميز بعض سلاسل مصدر العينة بشكل خطأ أو تأجل ما لا نهاية. لهذه x^n ، تؤخذ قيمة العينة D_n لتكون لانهائية. جرى افتراض أن جميع القرارات نهائية بمعنى أن مفكك الترميز لا يمكنه أن يقرر x^n على وجه الخصوص بعد مراقبة سلسلة أولية للتسلسل المرز ثم يغير هذا القرار بعد رصد أجزاء أخرى من التسلسل المرز. ما نوده هو نظام يكون فيه فك الترميز صحيحاً باحتمال كبير وقيمة العينة للمعدل، D_n/n صغيرة مع احتمال كبير. ما تظهره النظرية التالية أنه من أجل n كبير، يمكن أن يكون معدل العينة أقل من الانتروبية فقط مع احتمال صغير. وهذا يدل أن الحدود الدنيا للانتروبية تخفض معدل البيانات في هذا المعنى.

نظرية 4.7.2 (عكس الرموزات/مفككات الترميز العامة للمصادر iid). ليكن X^∞ تسلسلاً لرموز عشوائية مقطعة $\{X_k; 1 \leq k \leq \infty\}$. لكل عدد صحيح $n \geq 1$ ، لنفرض X^n هي أول n من تلك الرموز. ولأجل أي مرز ومفكك ترميز، ليكن D_n عدد البتات المستقبلية الذي يستطيع عنده مفكك الترميز أن يفك ترميز X^n على نحو صحيح. عندها من أجل أي $v > 0$ و $\delta > 0$ زمن أجل أي قيمة كبيرة كافية ل n ، يكون

$$\Pr\{D_n \leq n[H[X] - v]\} < \delta + 2^{-vn/2} \quad (29.2)$$

البرهان: للحصول على أي قيمة عينة x^∞ من تسلسل المصدر، لنفرض y^∞ دلالة على تسلسل مرز. من أجل أي عدد صحيح $n \geq 1$ ، لتكن $m = \lfloor n[H[X] - v] \rfloor$. لنفترض أنه جرى فك ترميز x^n عند مشاهدة y^m لقيم $m < z$. وبما أن القرارات نهائية، فهناك تسلسل مصدر واحد بطول n ، هو x^n يمكن فك ترميزه عند مشاهدة y^m . هذا يعني أن من بين 2^m سلسلة أولية من المرز، يمكن أن يكون هناك على الأكثر 2^{20} سلسلة ذات n عنصر من المصدر يمكن فك ترميزها من مراقبة المخرجات الـ m المرز الأولى. تحدد النظرية 3.7.2 الاحتمال الكلي لأي مجموعة مصدر مؤلفة من 2^m من سلاسل ذات n عنصراً، وتكرر العلاقة (29.2) ببساطة ذلك الحد.

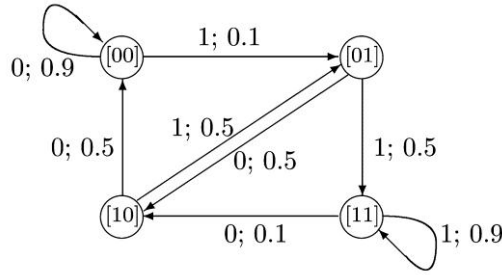
8.2 مصادر ماركوف

تم استخراج نتائج الترميز الأساسية لمصادر مقطعة عديمة الذاكرة. إن العديد من النتائج، ولاسيما متراجحة كرافت، وحدود الانتروبية على الطول المتوقع للرموزات القابلة لفك الترميز الوحيد، وخوارزمية هوفمان، لا يعتمد على استقلالية رموز المصدر المتعاقبة. في هذه الفقرة، تمتد هذه النتائج لتشمل مصادر معرفة بدلالة سلاسل ماركوف المنتهية الحالات. تستخدم حالة سلسلة ماركوف²¹ لتمثيل "ذاكرة" المصدر. وتستخدم العلامات على الانتقال بين الحالات لتمثيل الرمز التالي من المصدر. وهكذا، على سبيل المثال، يمكن للحالة أن تكون الرمز السابق من المصدر، أو يمكن أن تكون الـ 300 رمز السابقة. من الممكن أن نمذج القدر المرغوب من الذاكرة، مع البقاء في نظام سلاسل ماركوف المنتهية الحالة.

مثال 1.8.2. لندرس مصدراً أثنائياً مع مخرجات X_1, X_2, \dots . لنفترض أن احتمالات الرمز لـ X_m مشروطة على X_{k-2} و X_{k-1} ولكنها مستقلة عن كل الرموز السابقة التي أدت إلى الرمزين السابقين. يُنمذج هذا الزوج من الرموز باستخدام حالة X_{k-1} . تصبح أبجدية الحالات الممكنة مجموعة الأزواج الإثنائية، $S = \{[00], [11], [10], [01]\}$. في الشكل (16.2)، مُثِّلت الحالات على أنها عقد الرسم البياني الذي يمثل سلسلة ماركوف، ووضعت مخرجات المصدر على تحولات الرسم البياني. لاحظ، على سبيل المثال، أن من الحالة $S_{k-1} = [01]$ (تمثل $X_{k-1} = 1$ و $X_{k-2} = 0$)، يسبب الخرج X_{k-1} انتقالاً إلى $S_k = [11]$ (تمثل $X_k = 1$ و $X_{k-1} = 1$). ويفترض أن تبدأ السلسلة عند الزمن 0 في حالة S_0 .

²⁰ ثمة سببان لماذا عدد السلاسل المرزاة من رموز المنبع عند الزمن m يمكن أن تكون أقل من 2^m . الأول هو أن رموز المنبع الـ n الأولى يمكن ألا تكون قابلة لفك ترميزها إلى ما بعد استقبال البت المرز ذي الترتيب m . السبب الثاني هو إمكانية أن تؤدي سلاسل البتات المرزاة إلى سلاسل مرزاة لها نفس رموز المنبع الـ n الأولى.

²¹ إن النتائج الأساسية عن سلاسل ماركوف المنتهية الحالات، بما فيها النتائج المستخدمة هنا، موجودة في الكثير من الكتب مثل [8] و [25]. إن هذه النتائج هامة في الدراسة المتقدمة للاتصالات الرقمية، لكنها ليست أساسية هنا.



الشكل 16.2: مصدر ماركوف: يُعلم كل انتقال $s \rightarrow s'$ بمخرج المصدر الموافق وباحتمال الانتقال $\Pr\{S_k=s|S_{k-1}=s'\}$

لاحظ أن هذا مصدر يتميز بسلاسل طويلة من الأصفار وسلاسل طويلة من الواحدات المبعثرة تتخللها مناطق انتقالية قصيرة. على سبيل المثال، لنبدأ من حالة 00، سنجد خرجاً نمطياً من الشكل

000000001011111111111111110111111111010100000000 ..

لاحظ أنه إذا كان $s_k = [x_{k-1}x_k]$ فإن الحالة التالية يجب أن تكون إما $s_{k+1} = [x_k 0]$ أو $s_{k+1} = [x_k 1]$ ؛ أي أن في كل حالة يخرج فقط زوج من التحولات.

سنعمّم المثال الآن على مصدر ماركوف مقطّع اعتباطي.

تعريف 1.8.2. سلسلة ماركوف المنتهية الحالة هي تسلسل S_0, S_1, \dots من رموز عشوائية مقطعة من أبجدية منتهية، S . هناك تابع كتلة الاحتمال $q_0(s), s \in S$ pmf على S_0 ، وهناك تابع كتلة الاحتمال الشرطي $Q(s|s')$ حيث لجميع قيم $m \geq 1$ ، تكون كل $s \in S$ ، وكل $s' \in S$

$$(30.2) \quad \Pr(S_k = s | S_{k-1} = s') = \Pr(S_k = s | S_{k-1} = s', \dots, S_0 = s_0) = Q(s|s')$$

ويقال إنه حدث انتقال من s' إلى s يعبر عنه بـ $s \rightarrow s'$ إذا كانت $Q(s|s') > 0$.

تعريف 2.8.2. مصادر ماركوف هو سلسلة من رموز عشوائية مقطعة X_1, X_2, \dots بأبجدية عامة \mathcal{X} تعتمد على سلسلة ماركوف المنتهية الحالة S_0, S_1, \dots . جرى تعليم كل انتقال $(s' \rightarrow s)$ في سلسلة ماركوف برموز من \mathcal{X} ؛ يمكن أن يظهر كل رمز من \mathcal{X} في عملية انتقال واحدة على الأكثر من كل حالة.

لاحظ أن أبجدية الحالة S وأبجدية المصدر \mathcal{X} هم في اختلاف عام. بما أن كل رمز مصدر يظهر على الأكثر في انتقال واحد من كل حالة، فإن الحالة الابتدائية $S_0 = s_0$ ، مجموعة مع خرج المصدر، $X_1 = x_1$ ، و $X_2 = x_2$ ، ...، تُعرّف بشكل فريد تسلسل الحالة، وبطبيعة الحال، يوصّف تسلسل الحالة تسلسل خرج المصدر. إذا علّمت $x \in \mathcal{X}$ الانتقال $s \rightarrow s'$ ، فإن الاحتمال الشرطي لتلك الـ x يعطى كما بـ $Q(s|s') = P(x|s')$. وهكذا، على سبيل المثال، في عملية التحول $[00] \rightarrow [01]$ في الشكل (16.2)، $Q([01]|00) = P(1|00)$. إن السبب في التمييز بين أبجدية سلسلة ماركوف و أبجدية خرج المصدر هو السماح للحالة بتمثيل الجمع الاعتباطي للأحداث الماضية بدلاً من مجرد خرج المصدر السابق. وهذه هي الميزة التي تسمح لنماذج المصدر وفق ماركوف لتتميز وعلى نحو مقبول كل الصيغ البسيطة والمعقدة للذاكرة.

يمكن الوصول إلى الحالة s من الحالة s' في سلسلة ماركوف إذا كان ثمة مسار في الرسم البياني الموافق من $s \rightarrow s'$ ، أي إذا كان $\Pr\{S_k=s|S_0=s'\}$ من أجل قيم $k > 0$. تمثل فترة الحالة s القاسم المشترك الأكبر لمجموعة الأعداد الصحيحة $k \geq 1$ يكون من أجلها $\Pr\{S_k=s|S_0=s'\} > 0$. توصف سلسلة ماركوف المحدودة الحالة بالأرجوديك، إذا أمكن الوصول إلى كل الحالات من سائر الحالات الأخرى وإذا كانت كل الحالات لادورية، أي تمتلك الفترة 1.

سندرس فقط مصادر ماركوف الوحيدة التي تكون فيها سلسلة ماركوف أرجوديك. إحدى الحقائق المهمة عن سلاسل ماركوف الأرجوديك هي أن للسلسلة احتمالات ثابتة للحالة $q(s)$ من أجل جميع قيم $s \in S$ ، وهي تُعطى بالحل الوحيد للمعادلات الخطية

$$(31.2) \quad q(s) = \sum_{s' \in S} q(s') Q(s|s'); \quad s \in S$$

$$\sum_{s \in S} q(s) = 1$$

يمكن تقرب من هذه الاحتمالات المستقرة من أي حالة ابتدائية، أي،

$$(32.2) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \Pr(S_k = s | S_0 = s') = q(s) \quad \text{for all } s, s' \in S$$

1.8.2 ترميز مصادر ماركوف

إن الطريقة الأبسط لترميز مصادر ماركوف هي استخدام رموز بادئة حرة منفصل لكل حالة في سلسلة ماركوف الأساسية. أي، من أجل كل $s \in S$ ، نختار رموز بادئة حرة ذو أطوال مناسبة لتابع كتلة الاحتمال pmf الشرطي $P(x|s) > 0$. يجب على أطوال كلمة الرمز للرمز المستخدم في الحالة s أن تحقق متراجحة كرافت $\sum_x 2^{-l(x,s)} \leq 1$. يمكن توليد حد الطول الأدنى المتوقع، $\bar{L}_{\min}(s)$ لكل رموز عن طريق خوارزمية هوفمان بحيث يحقق.

$$(33.2) \quad H[X|s] \leq \bar{L}_{\min}(s) < H[X|s] + 1$$

حيث من أجل $s \in S, H[X|s] = \sum_x -P(x|s) \log P(x|s)$

إذا تم اختيار الحالة الابتدائية S_0 وفقاً لتابع كتلة الاحتمال pmf الثابتة $\{q(s), s \in S\}$ ، ثم من (31.2)، تبقى سلسلة ماركوف في حالة مستقرة، ويعطى طول كلمة الرمز المتوقع بالعلاقة:

$$(34.2) \quad H[X|S] \leq \bar{L}_{\min} < H[X|S] + 1$$

حيث

$$(35.2) \quad \bar{L}_{\min} = \sum_{s \in S} q(s) \bar{L}_{\min}(s)$$

$$(36.2) \quad H[X|S] = \sum_{s \in S} q(s) H[X|s]$$

افرض أن المرز يرسل الحالة الابتدائية s_0 عند زمن 0. إذا كان M' عدد العناصر في فضاء الحالة، يمكن عندها القيام به بوساطة $[\log M']$ ، ولكن هذا يمكن تجاهله حيث إنه تم فقط في بداية الإرسال ولا يؤثر على عدد البتات المتوقع لكل رمز منبع على المدى البعيد. يقوم المرز تباعاً بترميز كل رمز مصدر x_k باستخدام رموز الحالة عند الزمن $k-1$. يمكن لمفكك الترميز، بعد فك ترميز الحالة الابتدائية s_0 ، أن يفكك ترميز x_1 باستخدام الرمز بالاعتماد على الحالة s_0 . وبعد تحديد s_1 من s_0 و x_1 ، يمكن لمفكك الترميز أن يفكك ترميز x_2 باستخدام الرمز بالاعتماد على الحالة s_1 . يمكن لمفكك الترميز أن يستمر في تفكيك ترميز كل رمز مصدر، وبالتالي يتم فك ترميز كامل الرمز وعلى نحو فريد. علينا الآن أن نفهم معنى الانتروبية الشرطية في العلاقة (36.2).

2.8.2 الانتروبية الشرطية

يتضح أن الانتروبية الشرطية $H[X|S]$ تلعب نفس الدور في ترميز مصادر ماركوف كالدور الذي تلعبه الانتروبية العادية $H[X]$ في حالة المصادر عديمة الذاكرة. نعيد كتابة (36.2)

$$H[X|S] = \sum_{s \in S} \sum_{x \in \mathcal{X}} q(s) P(x|s) \log \frac{1}{P(x|s)}$$

هذه هي القيمة المتوقعة للمتحول العشوائي $[\log[1/P(X|S)]]$.

العلاقة التالية علاقة انتروبية هامة للمتغيرات العشوائية المقطعة،

$$(37.2) \quad H[X|S] = H[S] + H[X|S]$$

لنرى ذلك،

$$\begin{aligned} H[X|S] &= \sum_{s,x} q(s) P(x|s) \log \frac{1}{q(s)P(x|s)} \\ &= \sum_{s,x} q(s) P(x|s) \log \frac{1}{q(s)} + \sum_{s,x} q(s) P(x|s) \log \frac{1}{P(x|s)} \\ &= H[S] + H[X|S] \end{aligned}$$

يبين التمرين 19.2 أن:

$$H[X|S] \leq H[S] + H[X]$$

بمقارنة هذه مع العلاقة (37.2) نجد

$$(38.2) \quad H[X|S] \leq H[X|S]$$

هذه المتراجحة هامة جداً في نظرية المعلومات. إذا كانت الانتروبية $H[X]$ مقياس لعدم التيقن المتوسط، فإن الانتروبية المشروطة $H[X|S]$ يجب أن ينظر إليها على أنها مقياس لعدم التيقن المتوسط بعد مشاهدة خرج S . إن لم تكن X و S مستقلة إحصائياً، يشير إلى الحدس أن مشاهدة S يجب أن تقلل يعني عدم التيقن المتوسط في X ؛ تحقق هذه المعادلة في الواقع هذا.

مثال 2.8.2. لندرس الشكل (16.2) ثانية. يتضح من التماثل أن في الحالة المستقرة يكون $p_X(0) = p_X(1) = 1/2$ ، وبالتالي $H[X] = 1$ بت. مشروطاً بـ $S=00$ ، يكون X إثنائياً ذو تابع $\{0.1, 0.9\}$ pmf، ومن ثم $H[X|00] = -0.1 \log 0.1 - 0.9 \log 0.9 = 0.47$ بت. وبالمثل $H[X|11] = 0.47$ بتاً، و $H[X|10] = H[X|01] = 1$ بت. حل معادلات الحالة الثابتة في (31.2) هو $q[00] = q[11] = 5/12$ و $q[01] = q[10] = 1/12$. وهكذا، فإن معدل الانتروبية المشروطة، مأخوذ على الحالات، هو $H[X|S] = 0.558$ بت.

لأجل هذا المثال، من غير المناسب استخدام رماز البادئة الحرة لخرج المصدر لكل حالة سابقة. تكمن المشكلة في أن المصدر إثنائي، وبالتالي فإن طول رماز البادئة الحرة سيكون 1 لكل رمز بغض النظر عن الحالة، ومع ذلك، وكما في حالة المصادر عديمة الذاكرة، فإن استخدام الرموز الثابتة إلى متغيرة الطول هو الحل لهذه المشاكل ذات أحجام الأبجدية الصغيرة والقيود على أطوال كلمات الرماز. ليكن $E[L(X^n)]_{\min,s}$ هو الحد الأدنى للطول المتوقع لرماز البادئة الحرة لـ X^n مشروطاً على البدء بالحالة s . بتطبيق (13.2) على الحالة هنا نجد:

$$H[X^n|s] \leq E[L(X^n)]_{\min,s_0} < H[X^n|s] + 1$$

نفترض كما في السابق أن سلسلة ماركوف تبدأ بالحالة المستقرة S_0 . وبالتالي فإنها تبقى في الحالة المستقرة في كل وقت مقبل. نفترض كذلك أن حالة العينة الأولية معروفة في مفكك الترميز. عندها تستمر حالة العينة لتكون معروفة في كل وقت مقبل. وباستخدام رماز طول متوقع أدنى كل حالة عينة أولية:

$$(39.2) \quad H[X^n|S_0] \leq E[L(X^n)]_{\min,S_0} < H[X^n|S_0] + 1$$

بما أن مصدر ماركوف يبقى في الحالة المستقرة، فإن معدل الانتروبية لكل رمز مصدر بإعطاء الحالة هو $H(X|S_0)$. يفترض المنطق (ويثبت التمرين 32.2) أن:

$$(40.2) \quad H[X^n|S_0] = nH[X|S_0]$$

بتعريف $\bar{L}_{\min,n} = E[L(X^n)]_{\min,S_0}/n$ على أنه طول كلمة الرماز المتوقع الأدنى لكل رمز دخل عند البدء بحالة مستقرة،

$$(41.2) \quad H[X|S_0] \leq \bar{L}_{\min,n} < H[X|S_0] + 1/n$$

تحقق خاصية التوزيع المتساوي المقارب (AEP) في مصادر ماركوف أيضاً. ومع ذلك، فثمة $2^{nH[X|S]}$ سلسلة نموذجية تقريباً²² لها طول n ، لكل منها احتمال يساوي $2^{-nH[X|S]}$. ويترتب على ذلك كما في حالة عديمة الذاكرة أن $H[X|S]$ هو المعدل الأدنى الممكن الذي يمكن عنده ترميز رموز المصدر ضمن إما الترميز القابل لفك الترميز الفريد أو الترميز الثابت إلى ثابت الطول مع احتمال فشل صغير. إن طريقة الإثبات في جوهرها هي نفسها كما في حالة عديمة الذاكرة.

لن يتم إجراء المزيد من تحليل مصادر ماركوف، إذ إن الأفكار الإضافية المطلوبة هي تعديلات طفيفة لحالة العديمة الذاكرة. الغريب أن معظم الرؤى والمفاهيم عن ترميز المصدر تأتي من مصادر عديمة الذاكرة. وفي نفس الوقت يمكن تمثيل معظم المصادر ذات الأهمية التطبيقية بطريقة ماركوف ومن الصعب إيجاد أي منها يمكن تمثيله على أنه عديم الذاكرة. في أثناء التعامل مع المصادر العملية نجمع بين الأفكار من حالة عديمة الذاكرة مع التعديلات المقترحة بذاكرة ماركوف.

يمكن تعميم خاصية التوزيع المتساوي المقارب AEP على فئات أخرى أكثر عمومية من المصادر المقطعة المسماة مصادر الأرجودية. وهي مصادر تتجمع فيها معدلات زمن العينة في المفهوم الاحتمالي لمجموع المعدلات. ليس لدينا آلية لتعريف الأرجودية، كما أن المفاهيم الإضافية التي قد تنشأ من دراسة AEP لهذه الفئة سوف تتألف أساساً من تحسينات رياضية.

9.2 ضغط البيانات العالمي Lempel-Ziv

تختلف خوارزميات ضغط البيانات Lempel-Ziv خوارزميات ترميز المصدر المدروسة في الفقرات السابقة بالطرائق التالية:

- أنها تستخدم رموز متغيرة إلى متغيرة الطول فيها كل من عدد رموز المصدر المرمزة وعدد البتات المرمزة في كلمة الرمز متغيران. وعلاوة على ذلك، والرموز هي زمنية متفاوتة.
- لا تتطلب معرفة مسبقة بإحصاءات المصدر، لكنها تتكيف مع الوقت بحيث يخفض طول كلمة الرمز المتوسطة L إلى الحد الأدنى ضمن مفهوم سنناقشه فيما بعد. تسمى مثل تلك الخوارزميات عامة.
- استخدمت على نطاق واسع في التطبيقات العملية؛ فهي تزود طريقة جديدة لفهم ضغط المعطيات العام على الرغم من وجود مخططات جديدة.

تم تطوير خوارزميات ضغط Lempel-Ziv في 1977-1978. استخدمت أول خوارزمية، LZ77 [37]، ويستخدم سلسلة مطابقة في نافذة منزلقة. واستخدمت الثانية، LZ78 [38]، قاموساً متكيفاً. اعتمدت خوارزمية LZ78 منذ سنوات عديدة في نظام يونيكس وفي العديد من الأماكن الأخرى. ظهرت استخدامات LZ77 في وقت لاحق (مكدس Stack، مايكروسوفت ويندوز)، ولا تزال تستخدم على نطاق واسع.

سنصف في هذه الفقرة، خوارزمية LZ77. يرافقه وصف عالي المستوى لماذا يعمل. وأخيراً، نعطي تحليلاً تقريبياً لأدائها على مصادر ماركوف، يبين أنها أمثلية²³ على نحو فعال. بكلمات أخرى، على الرغم من أن هذه الخوارزمية تعمل دون معرفة بإحصاءات المصدر، فهي تضغط بشكل كبير كما أنها أفضل خوارزمية مصممة لتعمل مع هذه الإحصائيات.

1.9.2 خوارزمية LZ77

تضغط الخوارزمية LZ77 السلسلة $x = x_1, x_2, \dots$ من أبجدية مقطعة معطاة X بحجم $M = |X|$. في هذه المرحلة، لا نفترض أي نموذج احتمالي للمصدر، لذلك فإن x ببساطة هي سلسلة من الرموز، وليست سلسلة من رموز عشوائية. تمثل سلسلة جزئية $(x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ من x بـ x_m^n .

تحافظ الخوارزمية على أحدث w رمز مصدر مُرَمَّر في الذاكرة. وهذا ما يسمى نافذة منزلقة ذات حجم w . إن العدد w كبير، ويمكن اعتباره ضمن النطاق من 2^{10} إلى 2^{20} . يتم اختيار المعامل w ليكون عدداً ذا أساس 2. ويزداد كل من التعقيد والأداء مع زيادة w .

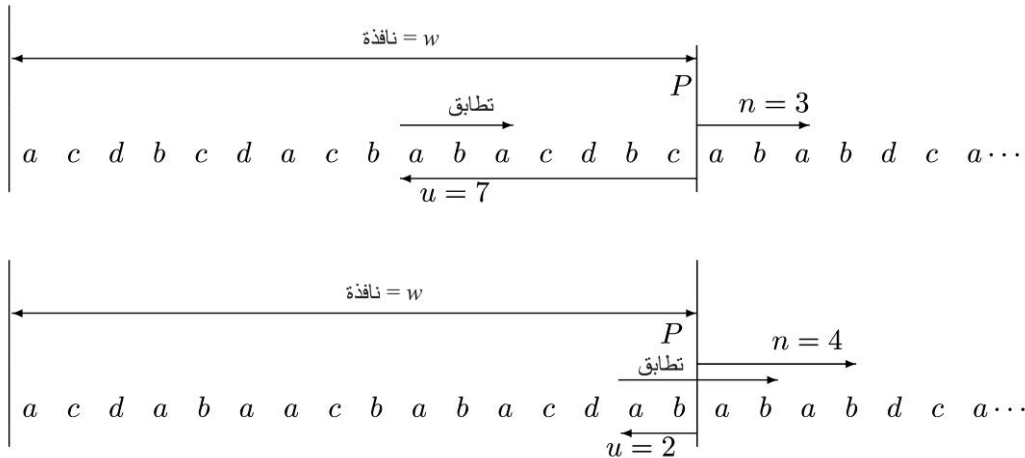
²² ثمة تفاصيل إضافية هنا فيما إذا كانت السلاسل النموذجية تتضمن الحالة الابتدائية أم لا، لكن هذه الاختلافات تصبح عديمة الأهمية مع ازدياد قيمة n .

²³ يقدم المرجع [36] لـ Wyner and Ziv برهاناً لهذه الأمثلية لمصادر أرجودية المقطعة.

باختصار، تعمل الخوارزمية على النحو التالي. لنفترض أنه في زمن محدد، تم ترميز رمز المصدر x_1^P . يبحث المرز عن التطابق الأطول، وليكن من الطول n ، بين السلسلة n غير المرزعة بعد x_{P+1}^{P+n} والسلسلة المخزنة x_{P+1}^{P+n-u} بدءاً من النافذة ذات الطول w . تكمن الفكرة الخوارزمية الذكية في LZ77 في ترميز هذه السلسلة المؤلفة من n رمزاً ببساطة عن طريق ترميز الأعداد الصحيحة n و u ؛ أي، بالإشارة إلى الحدث السابق من هذه السلسلة في النافذة المنزقة. إذا حافظ المرز على نافذة متطابقة، فيمكنه البحث عن السلسلة x_{P+1}^{P+n-u} وترميزها، ومواكبة المرز.

وبدقة أكثر، تعمل الخوارزمية LZ77 على النحو التالي:

1. رمز أول w رمز في رماز الطول الثابت دون ضغط، باستخدام $\lceil \log M \rceil$ بتاً لكل رمز. (وبما أن $w \lceil \log M \rceil$ ستكون جزءاً مهماً من إجمالي عدد البتات المرزعة، فإن كفاءة ترميز هذا الجزء غير مهمة، على الأقل من الناحية النظرية.)
 2. اجعل المؤشر $P = w$. (وهذا يدل على أن كافة الرموز لغاية الرمز x_P تم ترميزها.)
 3. أوجد أكبر قيمة $n \geq 2$. بحيث $x_{P+1}^{P+n} = x_{P+1}^{P+n-u}$ من أجل بعض قيم u في المجال $1 \leq u \leq w$. (أوجد أطول تطابق بين الرموز غير المرزعة بعد بدءاً من $P + 1$ وسلسلة من الرموز بدءاً من النافذة؛ لتكن n طول أطول مطابقة و u مسافة العودة إلى النافذة إلى بدء تلك المطابقة.) يجري ترميز السلسلة x_{P+1}^{P+n} بترميز العددين الصحيحين n و u .
- فيما يلي مثالان لإيجاد أطول موافقة. في المثال الأول، طول المطابقة هو $n = 3$ وتبدأ المطابقة $u = 7$ رمزاً قبل المؤشر. وفي المثال الثاني، طول المطابقة 4 وتبدأ $u = 2$ رمزاً قبل المؤشر. يوضح هذا أن السلسلة ومطابقتها يمكن أن تتداخل.



في حال عدم وجود تطابق لـ $n \geq 2$ ، عندها، وبصرف النظر عما إذا كانت الموافقة موجودة لأجل $n = 1$ ، افرض $n = 1$ ورمز مباشرة رمز المصدر الوحيد x_{P+1} دون ضغط.

4. رمز العدد الصحيح n إلى كلمة رماز من الرماز الإثنائي - الأحادي. يجري، في هذا الرماز، ترميز العدد الصحيح n إلى التمثيل الإثنائي n ، مسبوقاً ببدائة مؤلفة من $\lfloor \log_2 n \rfloor$ صفرًا؛ أي،

n	بدائة	تمدد بأساس 2	كلمة رماز
1		1	1
2	0	10	010
3	0	11	011
4	00	100	00100
5	00	101	00101
6	00	110	00110
7	00	111	00111
8	000	1000	0001000

وهكذا فإن كلمات الرماز التي تبدأ بـ $0^k 1$ تتوافق مع مجموعة 2^k من الأعداد الصحيحة في المجال $1 - 2^{k+1} \leq n \leq 2^k$. هذا الرماز هو

- رمز بادئة حرة (صورة الشجرة الإثنائية المقابلة). ويمكن ملاحظة أن لكلمة رماز العدد الصحيح n طولاً $2\lfloor \log n \rfloor + 1$ ؛ وسنرى لاحقاً أن هذا مهملاً مقارنة مع طول ترميز u .
5. إذا كان $n > 1$ ، رمز العدد الصحيح الموجب $w \leq u$ باستخدام رماز الطول الثابت ذي الطول w بت. (عند هذه النقطة يعرف المرمز n ، ويمكنه ببساطة العد إلى الورا بقيمة u في السلسلة التي فك ترميزها سابقاً للعثور على المجموعة n المناسبة، حتى ولو لم يكن ثمة تداخل على النحو الوارد أعلاه).
6. اجعل المؤشر P على القيمة $P + n$ وارجع إلى الخطوة (3). (كرر ذلك إلى الأبد).

2.9.2 لماذا يعمل LZ77

إن الدافع وراء LZ77 هو نظري معلوماتي. إن الفكرة الأساسية هي أنه إذا كان ثمة مصدر مجهول، وليكن، مصدر ماركوف ذو انتروبي $H[X|S]$ ، ثم يفترض تابع كتلة الاحتمال AEP أنه من أجل n كبيرة، ثمة ما يقارب $2^{nH[X|S]}$ سلسلة مصدر نموذجية بطول n . بالمقابل، فإن نافذة بحجم w تحتوي على w سلسلة مصدر بطول n . هذا يعني أنه إذا كانت $w \ll 2^{nH[X|S]}$ لا يمكن أن نجد في النافذة تسلسلاً نمطياً بطول n ، مما يشير إلى أن تطابقات بطول n غير مرجحة. وبالمثل، إذا كانت $w \gg 2^{nH[X|S]}$ ، فمن المرجح أن تكون معظم التسلسلات النموذجية في النافذة، مما يشير إلى أن تطابقات بطول n أو أكثر مرجحة.

تقترح المناقشة الآتية، كما هي، أنه من أجل تحقيق تطابق نموذجي كبير بحجم n_t ، فيجب أن تكون النافذة w كبيرة أسياً، بالمقدار $2^{n_t H[X|S]}$ ، مما يعني:

$$(42.2) \quad n_t \approx \frac{\log w}{H[X|S]} \quad \text{حجم تطابق نموذجي}$$

يتطلب ترميز توافق $\log w$ بتاً لموضع التطابق و $2\lfloor \log n_t \rfloor + 1$ للتطابق ذي حجم n_t . وبما أن n_t يتناسب مع $\log w$ ، فيكون $\log n_t$ مهملاً بالمقارنة مع $\log w$ لقيم w كبيرة. وهكذا، ومن أجل حالة نموذجية، تستخدم $\log w$ بتاً لترميز n_t رمزا. وبالتالي، من (42.2)، يكون المعدل المطلوب، مقاساً بالبت لكل رمز مصدر، $\bar{L} \approx H[X|S]$ تقريباً.

البرهان المذكور آنفاً ليس دقيقاً جداً، ولكن الخلاصة أنه من أجل حجم نافذة كبير جداً، يتم تقليل \bar{L} إلى القيمة المطلوبة عندما يعرف المصدر ويتم استخدام رماز بادئة حرة ثابت إلى متغير.

ينطوي عدم الدقة الأنف على أكثر من مجرد تجاهل عوامل التقريب في تابع كتلة الاحتمال AEP. فثمة قضية أكثر عمقاً هي أن سلسلة رموز المصدر الواجب ترميزها خاصة نوعاً ما إذ إنها تبدأ عند نهاية التطابقات السابقة. وتأتي الصعوبة الأخرى من إهمال الازدواجية في السلاسل النموذجية ضمن النافذة.

تم جعل هذا البرهان أكثر دقة من قبل وينر وزيف [36].

3.9.2 المناقشة

سنقوم بتلخيص الأفكار الأساسية وراء الخوارزمية LZ77:

1. ليكن N_x عدد تكرارات الرمز x في نافذة ذات حجم كبير جداً w . يحقق المصدر WLLN، فيكون تردد الظهور النسبي لـ x في النافذة هو $N_x/w \approx p_x(x)$ ستحقق العلاقة $N_x/w \approx p_x(x)$ باحتمال كبير. وبالمثل، لتكن $N_x n$ عدد تكرارات x^n التي تبدأ في النافذة. فإن التردد النسبي $N_x n/w \approx p_x(x^n)$ سيحقق $N_x n/w \approx p_x(x^n)$ باحتمال كبير لقيم w كبيرة جداً. إن هذه المجموعة من الترددات النسبية مع الاحتمالات هي ما يجعل LZ77 خوارزمية عامة لا تحتاج إلى معرفة مسبقة بإحصائيات المصدر.²⁴
2. كما هو موضح في الفقرة السابقة، فإن احتمال سلسلة مصدر نموذجية x^n لمصدر ماركوف هو $2^{-nH[X|S]}$. إذا كانت $w \gg 2^{nH[X|S]}$ ، فإن $N_x n \approx w p_x(x^n)$ ، ووفقاً لعنصر السابق، يجب أن تكون كبيرة وأن تحدث x^n في النافذة باحتمال كبير. وعلى نحو مواز، إذا كانت $w \ll 2^{nH[X|S]}$ ، فإن x^n ربما لن تحدث. وبالتالي فإن التطابق سيحدث عادة من أجل $n \approx (\log w)/H[X|S]$ حينما تصبح w كبيرة جداً.

²⁴ كما يقول السيد Yogi Berra، 'يمكنك رصد كل شيء فقط بالمشاهدة'.

3. أخيراً، فإن الأمر يتطلب نحو $\log w$ بتا لنشير إلى أفضل تطابق في النافذة. يستخدم الرمز الإثنائي - الأحادي $2[\log n] + 1$ بتا لترميز الطول n من التطابق. ومن أجل n نموذجية، يكون بحدود $2\log(\log w)/H[X|S]$ وهو مهمل لقيم w كبيرة بما يكفي مقارنة مع $\log w$.

بالتالي، تتطلب LZ77 حوالي $\log w$ بتا مُرمزاً لكل مجموعة من نحو $(\log w)/H[X|S]$ من رموز المصدر، أي إنها تقريباً تحقق الكفاءة المثلى لـ $\bar{L} = H[X|S]$ بت/رمز، فيما w تصبح كبيرة جداً.

يمكن النظر إلى المصادر المقطعة، كما تظهر في الممارسة العملية، في كثير من الأحيان ضمن مقاييس زمنية مختلفة. إما على مدى فترات زمنية طويلة جداً، أو عبر تسلسل عرضها على مختلف الرموز المادية التي تشغّل نفس الخوارزمية، ونادراً ما نجد هيكلًا موحدًا، متفاوتة في بعض الأحيان من لغة إلى أخرى، أو متفاوتة من نص في لغة لبيانات من شيء آخر.

أما ضمن أطر زمنية أقصر، متوافقة مع ملف واحد أو نوع تطبيق واحد، فغالباً ما يكون هناك هيكل أكثر، كما في النماذج المتماثلة من وثائق من اللغة نفسها. هنا من المنطقي أكثر النظر إلى خرج المصدر كمقطع ذي طول محدود، ولنقل، الخرج من مصدر ماركوف الأرجودي.

تشير الرؤية الأنفة لمقاييس زمنية مختلفة أيضاً إلى أن وجود نافذة أكبر لا يؤدي بالضرورة إلى تحسين أداء الخوارزمية LZ77. إنه يشير إلى أن التطابقات الطويلة ستكون أكثر احتمالاً في الأجزاء الأخيرة من النافذة، بحيث إن ترميز الطول الثابت لموضع النافذة ليس هو الطريقة الأفضل. استخدمنا كلمات رماز أقصر للتطابقات الأكثر حداثة، فإنها تتطلب وقتاً أقصر لترميز فعال لتبدأ بالحدوث عندما تتغير إحصاءات المصدر فجأة. ويصبح من المنطقي أن يبدأ الترميز من نافذة اعتباطية معروفة لكل من المرمز ومفكك الترميز بدلاً من ملء النافذة بأكملها بمعطيات قبل البدء في استخدام الخوارزمية LZ77.

10.2 خلاصة عن ترميز المصدر المقطع

إن ترميز المصدر المقطع مهم لكل من المصادر مقطعة من قبيل الملفات النصية وملفات الحاسوب وأيضاً بوصفه طبقة داخلية للسلاسل التماثلية المقطعة زمنياً والمصادر التماثلية. من الضروري التركيز على طيف مخرجات المصدر المحتملة بدلاً من التركيز على خرج محدد. ومن المهم أيضاً التركيز على النماذج الاحتمالية وذلك لتحقيق أفضل ضغط للمخرجات الأكثر شيوعاً مع اهتمام أقل بالمخرجات النادرة جداً. إن تقنيات الترميز العامة، مثل LZ77، المصممة للعمل بشكل جيد في ظل عدم وجود نموذج احتمال، تتطلب نماذج احتمال لفهم وتقييم كيفية عملها.

إن ترميز المصدر المتغير الطول هو أبسط وسيلة لتزويد ضغط جيد لمخرجات المصدر الشائعة على حساب المخرجات النادرة. إن الحاجة إلى كلمات رماز متغيرة الطول متتالية يؤدي إلى المفهوم غير الاحتمالي لقابلية فك الترميز الفريدة. تزود رمازات البادئة الحرة فئة بسيطة من رمازات فك الترميز الفريد. إن كلاً من رمازات البادئة الحرة ورمازات فك الترميز الفريد الأكثر عمومية تحقق متراجحة كرافت على عدد كلمات الرماز المحتملة لكل طول. علاوة على ذلك، ثمة إجراء بسيط، لأية مجموعة من الأطوال تحقق متراجحة كرافت، لبناء رماز بادئة حرة مع تلك الأطوال. وحيث إن الطول المتوقع، وخصائص هامة أخرى للرماز، تعتمد فقط على أطوال كلمات الرماز (وكيف تم تخصيصها لرموز المصدر)، فليس ثمة سبب لاستخدام رمازات متغيرة الطول التي ليست أيضاً ذات بادئة حرة.

في المصادر المقطعة عديمة الذاكرة DMS باحتمالات معلومة لرموز رماز المصدر، فإن الانتروبية هي الحد الأدنى على الطول المتوقع لرماز فك الترميز الفريد. تزود خوارزمية هوفمان طريقة بسيطة لإيجاد رماز بادئة حرة متغير الطول أمثل (بمعنى الحد الأدنى لطول كلمة الرماز المتوقع). خوارزمية هوفمان هي أيضاً مفيدة لاستخلاص خصائص رمازات الطول المتغير المثلى (انظر التمارين 12.2 و 18.2).

تمتد جميع خصائص الرمازات المتغيرة الطول تمتد لتشمل الرمازات الثابتة إلى المتغيرة الطول. هنا يتم تجزئ تسلسل خرج المصدر إلى كتل مؤلفة من n رمزاً، يرمز كل بوصفه رمزاً واحداً من أبجدية مجموعات المصدر ذات n عنصراً. أما من أجل المصادر المقطعة عديمة الذاكرة DMS فإن الحد الأدنى المتوقع لطول كلمة الرماز المتوقع يقع بين $H[U]$ و $H[U] + 1/n$. وبالتالي يمكن لرمازات البادئة الحرة ذات الطول الثابت إلى متغير الطول أن تقترب من حدود الانتروبية بالقدر المرغوب.

إن إحدى مساوئ الرمازات الثابتة إلى المتغيرة الطول هي أن البتات تترك المرمز بمعدل متغير نسبة إلى الرموز الداخلة. وبالتالي إذا كان

للمرموز الواردة معدل ثابت، فيجب أن تُغذى البتات إلى القناة بمعدل ثابت (ربما مع بعض فترات الجمول)، ثم يجب صف البتات المرمة في أرتال، وهناك احتمال إيجابي أن يحدث طفحان لأي رتل ذي طول منتهى.

ثمة وجهة نظر بديلة تتمثل بدراسة الرمازات ثابتة الطول إلى ثابتة الطول. هنا، ومن أجل المصادر المقطعة العديمة الذاكرة DMS، يمكن تقسيم مجموعة الرموز المحتملة من المصدر إلى مجموعة نموذجية ومجموعة غير نموذجية. وبحسب تابع كتلة الاحتمال AEP فإن لقيم n الكبيرة $2^{nH[U]}$ مجموعة نموذجية مؤلفة من n عنصراً باحتمال كلي يقترب من 1 مع ازدياد قيمة n . يتطلب ترميز مجموعات نموذجية مؤلفة من n تقريباً $H[U]$ بت لكل رمز، وبالتالي يقترب من حدّ الانتروبية دون مشكلة الأرتال المذكورة أنفاً، ولكن، بطبيعة الحال، مع وجود أخطاء في بعض الأحيان.

وكما هو مفصل في النص، يمكن استخدام تابع كتلة الاحتمال AEP لدراسة سلوك خوارزميات ترميز مصدر اعتباطية على المدى الطويل لبيان أن حدود الانتروبية لا يمكن تجاوزها دون نسبة فشل تقترب من الواحد.

تمتد النتائج الأنفة عن المصادر المقطعة العديمة الذاكرة بسهولة إلى مصادر ماركوف الأرجودية. لا يُجري النص هذا التحليل بالتفاصيل إذ لا يفترض أن يكون لدى القراء المعرفة اللازمة عن سلاسل ماركوف (انظر [7] لتحليل تفصيلي). إن الشيء المهم هنا هو أن نرى أن مصادر ماركوف يمكنها نمذجة سلاسل مؤلفة من n عنصراً لأي n مرغوبة، وبالتالي يمكنها إلى حد ما نمذجة المصادر العامة (على حساب نماذج معقدة جداً). من الناحية العملية، فإن رمازات المصدر العامة، مثل LZ77 عادة ما تكون طريقة أكثر منطقية للتعامل مع مصادر معقدة وغير معروفة إلى حد ما.

11.2 تمارين

1.2 أشار الفصل الأول إلى أن الإشارات الصوتية يمكن أن تحول إلى معطيات إثنائية عن طريق أخذ العينات بمعدل 8000 مرة بالثانية والتكميم بمعدل 8 بت لكل رمز مما ينتج إشارة 64 Kb/s. كما أشار إلى أن رموزات الكلام الحديثة يمكن أن تنتج إشارة كلام هاتفية بنوعية جيدة ومعدل (6-16Kb/s). إذا كان الهدف ببساطة إعادة إنتاج الكلمات ضمن كلام مفهوم دون الاهتمام بتعريف المتحدث، أو المعلومات، الخ...، ضع تقديراً للمعدل المطلوب، واشرح رأيك. (ملاحظة: لا توجد "إجابة صحيحة" في هذا السؤال الغامض. حيث يهدف إلى الاعتماد على طريقة السؤال والإجابة).

2.2 بفرض أن V و W متحولات عشوائية مقطعة مُعرَّفة على فضاء احتمال باحتمالية ارتباط $p_{vw}(v, w)$ والمطلوب:

(a) برهن دون اعتماد مفهوم الاستقلالية أن: $E[V + W] = E[V] + E[W]$.

(b) برهن أنه إذا كان V و W متحولين عشوائيين مستقلين، فإن $E[V \cdot W] = E[V] \cdot E[W]$.

(c) بفرض أن V و W غير مستقلين، أعط مثالا يحقق العلاقة: $E[V \cdot W] \neq E[V] \cdot E[W]$ ومثالاً آخر يحقق العلاقة:

$$E[V \cdot W] = E[V] \cdot E[W]$$

(d) بفرض أن V و W مستقلتين وأن σ_V^2 و σ_W^2 تباعد الإشارتين V و W على الترتيب. برهن أن تباعد الإشارة $V + W$ يعطى بالعلاقة:

$$\sigma_{V+W}^2 = \sigma_V^2 + \sigma_W^2$$

3.2 حل التمارين التالية: من أجل قيمة rv الصحيحة الموجبة N ، برهن أن: $E[N] = \sum_{n>0} \Pr(N \geq n)$.

(b) برهن بالصيغة الرياضية التي تراها مناسبة أنه من أجل متغير rv عشوائي موجب X تتحقق العلاقة $E(X) = \int_0^\infty \Pr(X \geq a) da$

(c) أوجد متراجحة ماركوف، التي تقول إنه من أجل $a \geq 0$ والمتغير المتحول العشوائي الموجب X تتحقق العلاقة: $\Pr(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$.

تلميح: ارسم $\Pr(X \geq a)$ كنسبة للمتباعد a وقارن مساحة المستطيل الممتد من 0 حتى a على المحور الأفقي ومن 0 حتى $\Pr(X \geq a)$ مع مساحة المنطقة الموافقة لـ $E[X]$.

(d) أوجد متراجحة تشيبيشيف والتي تقول إن $\Pr(|Y - E[Y]| \geq b) \leq \frac{\sigma_Y^2}{b^2}$ من أجل أي متغير Y بقيمة وسطية منتهية $E[Y]$ وتباعد منتهي σ_Y^2 .

تلميح استخدم الطلب (c) مع: $(Y - E[Y])^2 = X$.

4.2 بفرض أن X_1, X_2, \dots, X_n سلسلة من معاملات rv والموزعة بشكل مستقل بتابع كثافة احتمالي $f_X(x)$ ، مع ملاحظة أن

$$\Pr\{X_n = \alpha\} = 0 \text{ لكل قيم } \alpha \text{ وأن } \Pr\{X_n = X_m\} = 0 \text{ من أجل } m \neq n$$

(a) أوجد $\Pr\{X_1 \leq X_2\}$ [اعط الجواب كقيمة عددية وليس علاقة؛ لا يطلب أي حسابات والاكتفاء بالتوسع بالعلاقة العامة].

(b) أوجد $\Pr\{X_1 \leq X_2; X_1 \leq X_3\}$ (بكلمات أخرى أوجد احتمال أن يكون X_1 أصغر العناصر بين $\{X_1, X_2, X_3\}$). [هنا أيضاً فكر

— لا تحسب]

(c) بفرض أن N دليل أول إشارة rv في السلسلة أصغر من X_1 ، والذي يحقق: $\Pr\{N = n\} = \Pr\{X_1 \leq X_2; X_1 \leq X_3; \dots; X_1 \leq X_n\}$

أوجد $\Pr\{N \geq n\}$ كنسبة للمتغير n . تلميح: توسيع للطلب (b).

(d) برهن أن $E[N] = \infty$. تلميح: استخدم الجزء a من السؤال 3.2.

(e) افرض أن X_1, X_2, \dots سلسلة متحولات عشوائية iid أخذ كل منها من مجموعة منتهية من القيم. اشرح عدم إمكانية إيجاد

$\Pr\{X_1 \leq X_2\}$ بدون معرفة تابع كتلة الاحتمال pmf. اشرح لماذا تكون $E[N] = \infty$.

5.2 بفرض أن X_1, \dots, X_n سلسلة من n متحول عشوائي اثنائي. وبفرض أن $\Pr\{X_m = 1\} = \Pr\{X_m = 0\} = \frac{1}{2}$ وأن Z اختبار

النديّة للسلسلة X_1, \dots, X_n أي، $Z = X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n$ (حيث $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$ و $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$).

(a) بفرض أن $n > 1$ ، هل Z مستقلة عن X_1 ؟

(b) هل Z, X_1, \dots, X_{n-1} مستقلة؟

(c) هل Z, X_1, \dots, X_n مستقلة؟

(d) هل Z مستقلة عن X_1 إذا كان $\frac{1}{2} \neq \Pr\{X_i = 1\}$ ؟ افترض أن $n=2$.

6.2 نعرف رموز بادئة حرة على أنه رموز ليس فيه كلمة رموز بادئة لأي كلمة رموز.

(a) برهن أن رموزات البادئة الحرة يتم فك ترميزها بشكل فريد. (استخدم تعريف قابلية فك الترميز الفريد في الفقرة 1.3.2)

(b) أوجد مثالا عن رموز بادئة حرة ذي كلمة رموز طولها (1, 2, 2) بحيث لا يكون رموزاً ذا لاحقة حرة. هل يمكن فك ترميز كلمة رموز حال وصول آخر بت منها إلى مفكك الترميز؟ برهن أن مفكك الترميز يحتاج لزمان انتظار طويل اعتباطي قبل فك الترميز (وهذا هو سبب الحاجة لتعريف حذر لقابلية فك الترميز الفريد).

(c) هل يوجد رموز بطول كلمة رموز (1, 2, 2) يمكن اعتباره ذا بادئة حرة ولاحقة حرة معاً. اشرح إجابتك.

7.2 الخوارزمية الموضحة بالعلاقة (2.2) والخاصة بإنشاء رموزات البادئة الحرة من مجموعة أطوال كلمات رموز تستخدم فرضية ترتيب الأطوال في البداية. أعط مثال عن فشل هذه الخوارزمية في حال عدم ترتيب الأطوال أولاً.

8.2 بفرض أننا نريد (ولأسباب محددة) ترميز مصدر رموز ذات أبجدية D -Ary (حيث $D > 2$ وعدد صحيح) بدلاً من الأبجدية الإثنائية. يمكن توسيع التطوير المطبق في الفقرة 3.2 إلى حالة D -Ary، باستخدام أشجار D -Ary بدلاً من استخدام الأشجار الإثنائية لتمثيل رموزات البادئة الحرة. عمم متراجحة كرافت، (2.1)، إلى حالة D -Ary وبين لماذا تبقى صالحة الاستخدام.

9.2 بفرض لدينا رموز بادئة حرة يملك احتمالات رموز p_1, p_2, \dots, p_M بأطوال l_1, l_2, \dots, l_M . افرض أن الطول المتوقع \bar{L} يحقق:

$$\bar{L} = H[X] \text{ والمطلوب:}$$

(a) برهن أن $p_i = 2^{-l_i}$ من أجل كل i .

(b) اشرح لماذا تعتبر سلسلة الأرقام الإثنائية المرمزة هي أرقام إثنائية iid متساوية الاحتمالات. (تلميح: استخدم الشكل 4.2 لشرح هذه الظاهرة وشرح لماذا تعتبر هذه النتيجة صحيحة، دون الاعتماد على برهان عام).

10.2 (a) بين أن الرموز المكون من M كلمة رموز يحقق متراجحة كرافت، الطول الأعظمي بحده الأقصى $M-1$. اشرح لماذا تضمن هذه الحالة أن يكون عدد الرموزات نهائياً.

(b) بفرض أن $S(M)$ عدد أشجار الرموز الكامل والتي تحتوي على M عقدة انتهائية. اعتبر شجرتين مختلفتين إذا كانت كلمات الرموز الموافقة لهما مختلفة. أي تجاهل مجموعة رموز المنبع والتطابق بين رموز المنبع وكلمات الرموز. برهن أن $S(2) = 1$ وأنه من أجل $M > 2$ فإن: $S(M) = \sum_{j=1}^{M-1} S(j)S(M-j)$ حيث $S(1) = 1$ عادة.

11.2 (برهان متراجحة كرافت من أجل الرموزات القابلة لفك الترميز الفريد) (a) افرض أن رموزاً قابلاً لفك الترميز الفريد وله الأطوال l_1, \dots, l_M . ولبرهان أن: $\sum_j 2^{-l_j} \leq 1$ ، برهن العلاقة التالية من أجل كل عدد صحيح $n \geq 1$:

$$\left[\sum_{j=1}^M 2^{-l_j} \right]^n = \sum_{j_1=1}^M \sum_{j_2=1}^M \dots \sum_{j_n=1}^M 2^{-(l_{j_1} + l_{j_2} + \dots + l_{j_n})}$$

(b) بين أن هناك حداً واحداً في الجانب الأيمن من كل سلسلة من كلمات الرموز n (أي، لترميز مجموعة واحدة عدد عناصرها n ، x^n) حيث $l_{j_1} + l_{j_2} + \dots + l_{j_n}$ هو الطول الكلي لتلك السلسلة.

(c) بفرض أن A_i عدد السلاسل التي تملك الطول i ، برهن أن:

$$\left[\sum_{j=1}^M 2^{-l_j} \right]^n = \sum_{j=1}^{nl_{\max}} A_i 2^{-i}$$

(d) استخدم قابلية فك الترميز الفريدة حد A_i من الأعلى وبرهن أن:

$$\left[\sum_{j=1}^M 2^{-l_j} \right]^n \leq n l_{\max}$$

(e) بأخذ الجذر من المرتبة n وجعل $n \rightarrow \infty$ ، برهن متراجحة كرافت.

12.2 نفرض وجود منبع بأبجدية حجمها $M = |X| = 4$ وله احتمالات رموز $\{1/3, 1/3, 2/9, 1/9\}$.

- (a) استخدم خوارزمية هوفمان لإيجاد رموز بادئة حرة مثالي لهذا المنبع.
 (b) استخدم خوارزمية هوفمان لإيجاد رموز بادئة حرة مثالي آخر له مجموعة أطوال مختلفة.
 (c) أوجد رموز بادئة حرة مثالي آخر ولكن لا يمكن أن ينتج عن خوارزمية هوفمان.

13.2 لدينا أبجدية من $M = 4$ رموزاً باحتمالات $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq p_4 > 0$.

- (a) إذا كان $p_1 = p_3 + p_4$ برهن وجود رموز هوفمان يملك أطوال متساوية وبرهن وجود رموز هوفمان آخر ذي كلمة رموز بطول 1 وأخرى بطول 2 واثنين آخرين بطول 3.
 (b) أوجد القيمة العظمى لـ p_1 ، (p_{\max}) يكون عندها $p_1 = p_3 + p_4$.
 (c) أوجد القيمة الصغرى لـ p_1 ، (p_{\min}) يكون عندها $p_1 = p_3 + p_4$.
 (d) برهن أنه إذا كان $p_1 > p_{\max}$ فإن كل رموز هوفمان يملك كلمات رموز بطول 1.
 (e) برهن أنه إذا كان $p_1 > p_{\max}$ فإن كل رموز بادئة حرة مثالي يملك كلمات رموز بطول 1.
 (f) برهن أنه إذا كان $p_{\min} > p_1$ فإن كل كلمات الرموز في أي رموز هوفمان لها طول 2.
 (g) بفرض أن $M > 4$. أوجد أصغر قيمة p'_{\max} بحيث $p_1 > p'_{\max}$ تضمن أن رموز هوفمان يملك كلمات رموز بطول 1.

14.2 بفرض وجود منبع ذو M رموزاً متساوية الاحتمال:

- (a) ليكن $k = \lceil \log M \rceil$. بين أن أطوال كلمة الرموز الممكنة في رموز هوفمان، هي k و $k-1$.
 (b) كتابع للقيمة M ، أوجد عدد كلمات الرمز التي تملك الطول $k = \lceil \log M \rceil$. وما هو طول كلمة الرموز المتوقع \bar{L} مقاساً بالبت لكل رمز منبع.
 (c) عرّف $y = M/2^k$ ، اكتب $\bar{L} - \log M$ كتابع للمتغير y . أوجد القيمة العظمى لهذا التابع ضمن المجال $1/2 < y \leq 1$. هذا يوضح أن حد الانتروبية، $\bar{L} < H[X] + 1$ غير مقيد في هذه الحالة المتساوية الاحتمال.

15.2 بفرض لدينا منبع مقطّع عديم الذاكرة يملك M رموزاً بأبجدية $\{1, 2, \dots, M\}$ و باحتمالات مرتبة $p_1 > p_2 > \dots > p_M > 0$.

- افرض أن $p_1 < p_{M-1} + p_M$. لتكن l_1, l_2, \dots, l_M أطوال رموز بادئة حرة ذي طول أصغري متوقع لهذا المنبع.
 (a) برهن أن $l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_M$.
 (b) برهن أنه عند استخدام خوارزمية هوفمان لتوليد الرموز الأنف فإن: $l_M \leq l_1 + 1$. (تلميح: تعامل فقط مع أول خطوتين من الخوارزمية).
 (c) برهن أن: $l_M \leq l_1 + 1$ عند استخدام خوارزمية هوفمان أو لا لتوليد رموز بادئة حرة ذي طول أصغري متوقع.
 (d) افرض أن $M = 2^k$ من أجل عدد صحيح k . حدّد l_1, \dots, l_M .
 (e) افرض أن $2^k < M < 2^{k+1}$ من أجل عدد صحيح k . حدّد l_1, \dots, l_M .

16.2 (a) ادرس توسيع إجرائية هوفمان لرموزات ثلاثية الرموز $\{0, 1, 2\}$. فكّر بدلالة كلمات رموز بوصفها أوراقاً في أشجار ثلاثية.

- افرض أن $M = 4$ رموزاً. لاحظ أنه لا يمكنك رسم شجرة ثلاثية كاملة بأربع أوراق. بالبدء بشجرة ثلاثية وتوسيع الشجرة عن طريق تحويل الأوراق إلى عقد متوسطة، بين عند أي قيم للأبجدية M يمكن بناء شجرة ثلاثية كاملة.
 (b) اشرح كيفية تعميم إجرائية هوفمان لدعم الرموز الثلاثية معتمداً على نتيجة الطلب السابق.

(c) استخدم خوارزمتك من أجل مجموعة الاحتمالات $\{0.3, 0.2, 0.2, 0.1, 0.1, 0.1\}$.

17.2 بفرض أن X تملك M رمزا، $\{1, 2, \dots, M\}$ باحتمالات مرتبة $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_M > 0$. افرض أن X' هو المنبع المخفّض بعد أول خطوة من خوارزمية هوفمان.

(a) عبر عن الانتروبية $H[X]$ للمنبع الأصلي بدلالة الانتروبية $H[X']$ للمنبع المخفّض كما يلي:

$$H[X] = H[X'] + (p_M + p_{M-1}) H(\gamma) \quad (43.2)$$

حيث $H(\gamma)$ تابع الانتروبية الإثنائية المحدد بالعلاقة: $H(\gamma) = -\gamma \log \gamma - (1 - \gamma) \log(1 - \gamma)$. أوجد القيمة المطلوبة من γ لتحقيق العلاقة (43.2).

(b) في شجرة الرماز المولدة بواسطة خوارزمية هوفمان، لتكن v_1 العقدة المتوسطة التي تمثل عقد الأوراق للرموز M و $M-1$. وبفرض $q_1 = p_M + p_{M-1}$ هي احتمال الوصول للعقدة v_1 ضمن شجرة الرماز. وبشكل مشابه لتكن v_2, v_3, \dots هي العقد المتوسطة المتسلسلة والمولدة بواسطة خوارزمية هوفمان. كم عدد العقد المتوسطة الموجودة بما في ذلك العقدة الجذر لكامل الشجرة؟

(c) لتكن q_1, q_2, \dots احتمالات الوصول للعقد الوسيطة v_1, v_2, \dots (لاحظ أن احتمال الوصول للعقدة الجذر يساوي 1). برهن أن $\bar{L} = \sum_i q_i$. تلميح: لاحظ أن $\bar{L} = \bar{L}' + q_1$.

(d) عبر عن $H[X]$ كمجموع للعقد المتوسطة. يجب أن يحوي الحد ذو الترتيب i على q_i والانتروبية الإثنائية $H(\gamma_i)$ لقيمة γ_i تحدد لاحقاً. قد يكون مفيداً تعريف α_i على أنها احتمال الانتقال للأعلى من العقدة المتوسطة v_i ، شرطية على الوصول إلى v_i . (تلميح: انظر الجزء a)

(e) أوجد (بدلالة الاحتمالات و الانتروبية الآنفة) الشروط التي تتحقق عندها $\bar{L} = H[X]$.

(f) هل تعتبر الصيغ \bar{L} و $H[X]$ الآنفة خاصة برمازات هوفمان فقط؟ أو يمكن تطبيقها (باستخدام احتمالات وانتروبية العقدة المتوسطة المعدلة) على أي رماز بادئة حرة اعتباطي كامل؟

18.2 ادرس الرمز العشوائي المقطع X الذي يملك $M+1$ رمزاً تحقق $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_M > 0$ و $p_{M+1}=0$. افرض توليد رماز بادئة حرة خاص بالرمز X وهذا الرماز يحتوي على كلمة رماز ل $M+1$ (افرض على سبيل المثال أن P_{M+1} موجبة وذات قيمة صغيرة جداً لذلك تقرب من الصفر).

(a) أوجد \bar{L} لرماز هوفمان يتضمن الرمز $M+1$ بدلالة \bar{L} لرماز هوفمان يحذف كلمة رماز الرمز $M+1$.

(b) افرض أنه بدلاً من رمز واحد باحتمال صفر، يوجد n رمزا مشابهاً. أعد حل الطلب (أ) لهذه الحالة.

19.2 تبين المعادلة (12.2) أنه إذا كان X و Y رمزين عشوائيين مقطعين ومستقلين، فإن انتروبية الرمز العشوائي XY تحقق العلاقة:

$$H[XY] = H[X] + H[Y] \quad \text{هنا نريد إظهار أنه بدون افتراض الاستقلالية فإن: } H[XY] \leq H[X] + H[Y]$$

(a) بين أن:

$$H[XY] - H[X] - H[Y] = \sum_{x \in X, y \in Y} p_{XY}(x, y) \log \frac{p_X(x) p_Y(y)}{p_{X,Y}(x, y)}$$

(b) بين أن $H[XY] - H[X] - H[Y] \leq 0$ ، أي $H[XY] \leq H[X] + H[Y]$

(c) لتكن X_1, X_2, \dots, X_n رموزا عشوائية مقطعة وليست بالضرورة مستقلة. استخدم الطلب (b) لبيان أن

$$H[X_1 X_2 \dots X_n] \leq \sum_{j=1}^n H[X_j]$$

20.2 ادرس الرمز العشوائي X بأبجدية $\{1, 2, \dots, M\}$ وتابع كتلة الاحتمال $\{p_1, p_2, \dots, p_M\}$. هذا التمرين يشترك علاقة تسمى

متراجحة فانو بين الانتروبية $H[X]$ والاحتمال p_1 لأول رمز. وتستخدم هذه العلاقة لبرهان عكس نظرية ترميز ضجيج القناة.

ليكن Y رمزاً عشوائياً يأخذ القيمة 1 عندما $X = 1$ والقيمة 0 خلاف ذلك. ومن أجل الطلبات من (a) وحتى (d) اعتبر M و p_1

ثابتان.

(a) عرّف عن $H[Y]$ بدلالة تابع الإنتروبية الإثنائية: $H_b(\alpha) = -\alpha \log(\alpha) - (1 - \alpha) \log(1 - \alpha)$.

(b) ماهي الإنتروبيا الشرطية $H\{X|Y = 1\}$ ؟

(c) بيّن أن $H\{X|Y = 0\} \leq \log(M - 1)$ وبين كيف يمكن تحقيق هذا الحد بتساوٍ عند الاختيار المناسب للاحتتمالات p_2, \dots, p_M .

ادمج هذا مع الطلب (c) للحد الأعلى $H\{X|Y\}$

(d) أوجد العلاقة بين $H[X]$ و $H[XY]$.

(e) استخدم $H[Y]$ و $H\{X|Y\}$ للحد الأعلى $H[X]$ وبيّن أن الحد يمكن تحقيقه بتساوٍ عند الاختيار المناسب للاحتتمالات p_2, \dots, p_M .

(f) من أجل قيم M السابقة نفسها، وبفرض أن p_1, p_2, \dots, p_M اعتباطية وبفرض أن p_{\max} هي القيمة الأعظمية للمجموعة $\{p_1, \dots, p_M\}$.

هل يبقى الحد الأعلى الناتج في الطلب (d) صحيحاً إذا استبدلنا p_1 بالقيمة p_{\max} ؟ اشرح ذلك.

21.2 يشع منبع مقطع بدون ذاكرة رموز X_1, X_2, \dots iid و لرمز عشوائي X يملك الرموز $\{a, b, c\}$ بالاحتمالات المتسلسلة التالية $\{0.5, 0.4, 0.1\}$

(a) أوجد الطول المتوقع \bar{L}_{\min} لأفضل رمز خالي البادئة متغير الطول من X .

(b) أوجد الطول المتوقع $\bar{L}_{\min,2}$ كنسبة للبتات بالرمز لأفضل رمز خالي البادئة متغير الطول من X^2 .

(c) من أجل أي DMS هل تتحقق العلاقة التالية: $\bar{L}_{\min} \geq \bar{L}_{\min,2}$ ؟ اشرح إجابتك

22.2 من أجل X DMS بأبجدية $\mathcal{X} = \{1, 2, \dots, M\}$ ، ليكن $\bar{L}_{\min,1}$ و $\bar{L}_{\min,2}$ و $\bar{L}_{\min,3}$ تعبر عن الأطوال الوسطية كنسبة للبتات بالرمز

من أجل رمز هوفمان \mathcal{X} و \mathcal{X}^2 و \mathcal{X}^3 بالترتيب. برهن أن $\bar{L}_{\min,3} \leq \frac{2}{3}\bar{L}_{\min,2} + \frac{1}{3}\bar{L}_{\min,1}$.

23.2 (ترميز Run-Length)، بفرض X_1, X_2, \dots سلسلة رموز إثنائية عشوائية حيث $p_X(a) = 0.9$ و $p_X(b) = 0.1$. نرمز هذا المنبع بتقنية

ترميز متغيرة إلى متغيرة الطول تسمى Run-Length. يقابل خرج المنبع بأرقام وسيطة عن طريق إحصاء عدد مرات وجود a بين كل

b متتالية. وبالتالي يحدث خرج وسيط عند كل حدوث للرمز b . وبما أننا لا نريد للأرقام الوسيطة أن تصح كبيرة جداً، يُستخدم

الرقم الوسيط 8 على الرمز a الثامن ويبدأ العد من جديد عند تلك النقطة. وبالتالي تظهر المخرجات عند كل b وعند كل ثامن a .

فعلى سبيل المثال أول سطرين يدلان على سلسلة من مخارج المنبع والخرج المتوسط المقابل لها.

b	a	a	a	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	a	A	a	a	b	
0				3										8						2	0
0000				0011										1						0100	0000

المرحلة النهائية من الترميز هي تخصيص كلمة رماز 1 للمتغير الصحيح الوسطي 8 وتخصيص كلمة رماز ذات 4 بتات أولها 0 ويتبع

بثلاثة بتات إثنائية تمثل قيمة العناصر من 0 حتى 7. وهذا موضح في السطر الثالث والمطلوب:

(a) بين لماذا يكون الرماز الكلي قابل لفك الترميز بشكل فريد؟

(b) أوجد العدد الكلي المتوقع من بتات الخرج الموافقة لكل b . يتضمن هذا العدد البتات الأربعة لترميز الحرف b وبت الترميز الواحد

لكل سلسلة متتابعة من 8 أحرف a التي تسبق الحرف b .

(c) باعتبار ساسلة من 10^{20} رمز ثنائي ضمن المرمز بين أن عدد بتات b الموجودة في رمز الدخل تملك احتمالية عالية قريبة من 0.1.

(d) قارن بين الجزأين (b) و (c) لإيجاد \bar{L} العدد الموقع من بتات الخرج ضمن رمز الدخل.

24.2 (a) بفرض وجود DMS يشع h و t باحتمال 0.5 لكل منهما ومن أجل $\varepsilon = 0.01$ احسب T_ε^5 ؟

(b) أوجد T_ε^5 من أجل $Pr(t) = 0.9$ و $Pr(h) = 0.1$ و $\varepsilon = 0.01$ ؟

25.2 بفرض لدينا منبع DMS بأبجدية من رمزين $\{a, b\}$ حيث $p_X(a) = 2/3$ و $p_X(b) = 1/3$ وبفرض أن $X^n = X_1, \dots, X_n$ سلسلة

رموز عشوائية من المنبع تحقق $n = 100,000$ والمطلوب:

- (a) بفرض $W(X_j) = -\log 2/3$ من أجل $X_j = a$ و $-\log 1/3$ من أجل $X_j = b$. أوجد تباعد $W(X_j)$.
- (b) من أجل $\varepsilon = 0.01$ يطلب تقدير الحد على احتمال المجموعة النموذجية المحددة بالعلاقة 2.4.2.
- (c) بفرض N_a عدد بنات a في السلسلة $X^n = X_1, \dots, X_n$. وبالتالي فإن N_a الخاص بـ rv هو مجموع n iid rv 's. يطلب تحديد هذه rv .
- (d) عبّر عن rv $W(X^n)$ كتابع لـ rv N_a . ولاحظ كيف يعتمد ذلك على n .
- (e) عبّر عن المجموعة النموذجية للحدود N_a (كمثال $\{x^n: \alpha < N_a < \beta\}$) واحسب α و β .
- (f) أوجد القيمة المتوسطة والتباعد لـ N_a . قَرِّب $\Pr\{T_\varepsilon^n\}$ باستخدام تقريب نظرية النهاية المركزية. يُقِيم تقريب نظرية النهاية المركزية للمجموعة النموذجية لتبدو نموذجية.

26.2 من أجل rv 's الناتجة في المثال السابق، أوجد $\Pr\{N_a = i\}$ من أجل $i = 0, 1, 2$. أوجد احتمالية كل سلسلة منفردة x^n من أجل قيم i السابقة. أوجد السلسلة المحددة x^n التي تملك احتمالية أعظمية من أجل كل قيم عينات X^n . ما هي n -string الأكثر احتمالاً وبرهن لماذا تعتبر هذه السلاسل نموذجية؟

27.2 بفرض X_1, X_2, \dots سلسلة رموز iid بأبجدية نهائية. من أجل طول كتلة n وأي عدد صغير $\varepsilon > 0$ نعرف المجموعة الجيدة من الصفوف من الرتبة n كما يلي:

$$G_\varepsilon^n = \{x^n: p_{X^n}(x^n) > 2^{-n[H[X]+\varepsilon]}\}$$

- (a) بيّن كيف يمكن اشتقاق G_ε^n من المجموعة النموذجية T_ε^n .
- (b) بيّن أن: $\Pr(G_\varepsilon^n) \geq 1 - \frac{\sigma_W^2}{n\varepsilon^2}$ حيث W هو لوغارتيم تابع كتلة الاحتمال لـ X .
- (c) حدد الحد الأعظمي من العناصر في G_ε^n والتي تكون من الشكل $|G_\varepsilon^n| < 2^{n[H[X]+\alpha]}$ ثم حدد قيمة α . (من المفترض أن تجد أصغر قيمة لـ α يمكن إيجادها، ولكن لس لتبرهن أنه لا يمكن استخدام قيمة أصغر في الحد الأعلى).
- (d) بفرض أن: $G_\varepsilon^n - T_\varepsilon^n$ مجموعة الصفوف النونية المتوضعة في G_ε^n وغير الموجودة في T_ε^n . أوجد الحد الأعظمي لـ $|G_\varepsilon^n - T_\varepsilon^n|$ من الشكل $|G_\varepsilon^n - T_\varepsilon^n| \leq 2^{n[H[X]+\beta]}$ ثم أوجد β الأصغرية.
- (e) أوجد نهاية $|G_\varepsilon^n - T_\varepsilon^n|/|T_\varepsilon^n|$ عندما $n \rightarrow \infty$.

28.2 المجموعة النموذجية T_ε^n المعرفة في النص غالباً ما تدعى علاقة ويكلي النموذجية. بفرض لدينا منبع مقطع بدون ذاكرة وبفرض أن $N_j(x^n)$ عدد الرموز في السلسلة النونية x^n المأخوذة عند القيمة j . بالتالي يمكن تعريف المجموعة النموذجية القوية S_ε^n بالعلاقة:

$$S_\varepsilon^n = \left\{ x^n: p_j(1-\varepsilon) < \frac{N_j(x^n)}{n} < p_j(1+\varepsilon); j \in \mathcal{X} \right\}$$

$$(a) \text{ بيّن أن: } p_{X^n}(x^n) = \prod_j p_j^{N_j(x^n)}$$

(b) بيّن أن كل x^n في المجموعة S_ε^n تملك الاحتمال

$$H[X](1-\varepsilon) < \frac{-\log p_{X^n}(x^n)}{n} < H[X](1+\varepsilon)$$

(c) بيّن أنه إذا كان $x^n \in S_\varepsilon^n$ فإن $x^n \in T_{\varepsilon'}^n$ حيث: $\varepsilon' = H[X]$ ، أي أن $S_\varepsilon^n \subseteq T_{\varepsilon'}^n$

(d) بيّن أنه من أجل $\delta > 0$ وأي عدد كبير n فإن:

$$\Pr(X^n \notin S_\varepsilon^n) \leq \delta$$

تلميح: بأخذ كل حرف z على نحو منفصل، $1 \leq j \leq M$ ، بين أنه لكل قيم n الكبيرة $\frac{\delta}{M}$ $\Pr\left(\left|\frac{N_j}{n} - p_j\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\delta}{M}$

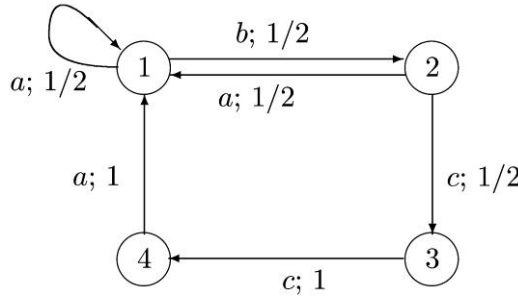
(e) بيّن أنه من أجل $\delta > 0$ وأي عدد كبير n فإن:

$$(44.2) \quad (1 - \delta)2^{n[H(X)-\epsilon]} < |S_\epsilon^n| < 2^{n[H(X)+\epsilon]}$$

لاحظ أن الجزأين (d) و (e) تمثل نفس النظرية للمجموعة النموذجية القوية مثل النظرية 1.7.2 التي تدل على المجموعة المثالية الضعيفة. إن n المطلوبة لتحقيق العلاقة (44.2) (بأخذ العلاقة بين ϵ و ϵ') أكبر جدا من تلك التي تحقق العلاقة (27.2). سنستخدم مماثلة القوة فيما بعد في برهان نظرية ترميز القناة الضخحية.

29.2 المتغير العشوائي D_n في الفقرة 4.7.2 يعرف كطول سلسلة البداية للبتات المرمزة المطلوبة لترميز أول n بت من دخل المنبع. فمن أجل ترميز Run-Length المبين في المثال 23.2 أوجد سلاسل الدخل وسلاسل الخرج المرمزة الموافقة المطلوبة لترميز رسالة المنبع الأولى وانطلاقاً من هذا أوجد تابع pmf لـ D_1 . تلميح: يجب ترميز 8 أحرف مصدر كحد أدنى قبل أن تتمكن من فك ترميز X_1 .
(b) أوجد تابع pmf لـ D_2 . أحد أهداف هذا التمرين إقناعنا أن D_n هو متحول عشوائي rv مفيد لإثبات النظريات، لكنه ليس مفيد للحساب التفصيلي. كما يبين أيضاً وبوضوح أن D_n يمكنه أن يعتمد على أكثر من أحرف المصدر n الأولى

30.2 سلسلة ماركوف S_0, S_1, \dots تبدأ بالحالة المستقرة من اللحظة 0 وتملك أربع حالات $S = \{1, 2, 3, 4\}$. وبالتالي فإن منبع ماركوف الموافق X_1, X_2, \dots يملك أجدية المنبع $X = \{a, b, c\}$ بحجم 3 والمطلوب:



(a) أوجد احتمالات الحالة المستقرة $\{q(s)\}$ لسلسلة ماركوف.

(b) أوجد $H[X_1]$.

(c) أوجد $H\{X_1|S_0\}$.

(d) أعط وصفاً للمنبع القابل لفك الترميز الفريد والذي يحقق $\bar{L} = H\{X_1|S_0\}$. افترض أن الحالة البدائية معروفة لكاشف المرمز. وشرح لماذا يمكن لمفكك المرمز ملاحقة الحالة بعد اللحظة 0.

(e) بفرض أنه تتم مراقبة خرج المنبع بدون معرفة الحالة. ما هو العدد الأعظمي من رموز المنبع التي يجب مراقبتها قبل معرفة الحالة؟

31.2 مستخدماً القاعدة (37.2) من أجل $n=2$ وبفرض رموز عشوائية مقطعة. يطلب اشتقاق العلاقة التالية:

$$H[X_1, \dots, X_n] = H[X_1] + \sum_{k=2}^n H[X_k|X_1, \dots, X_{k-1}]$$

تلميح: استخدم قاعدة السلسلة من أجل $n=2$ في (37.2) واسأل نفسك إذا كانت المجموعة k من الرموز هي ذاتها رمز عشوائي.

32.2 بفرض وجود سلسلة ماركوف أرجودية مقطعة S_0, S_1, \dots بتوزيع حالة بدائي اعتباطي والمطلوب:

(a) باستخدام العلاقة الأساسية للإنترابية الشرطية بين أن: $H\{S_2|S_0S_1\} = H\{S_2|S_1\}$.

(b) بمساعدة التمرين (31.2) ومن أجل $n \geq 2$ بين أن:

$$H[S_1S_2 \dots S_n|S_0] = \sum_{k=1}^n H[S_k|S_{k-1}]$$

(c) بسط ذلك عندما تكون S_0 في الحالة المستقرة.

(d) من أجل منبع ماركوف يخرج X_1, X_2, \dots بين لماذا تتحقق العلاقة: $H\{X_1 \dots X_n|S_0\} = H\{S_1 \dots S_n|S_0\}$. يمكن تقييد هذه إلى $n =$

2 في الحالة المستقرة.

(e) استنتج العلاقة (40.2).

33.2 نفذ خوارزمية LZ77 على السلسلة 000111010010101100 بفرض أن طول النافذة $W = 8$ والنافذة البدائية مشار تحتها بخط.

يجب تحليل بقية السلسلة باستخدام خوارزمية ليمبل-زيف Lempel-Ziv

34.2 بفرض تطبيق خوارزمية LZ77 على السلسلة الإثنائية $x_1^{10,000} = 0^{5000}1^{4000}0^{1000}$. هذا يعني وجود 5000 تكرار للصفر متبوع

ب 4000 تكرار للواحد ثم 1000 تكرار للصفر. افرض أن حجم النافذة $w = 1024$

(a) بيّن كيفية ترميز السلسلة السابقة واعط السلسلة المرمزة شارحاً سلاسلها الجزئية.

(b) ما هو طول السلسلة المرمزة؟

(c) افرض أن حجم النافذة أصبح $W = 8$ ، ما هو طول السلسلة المرمزة في هذه الحالة؟ (لاحظ أن نافذة بهذا الحجم الصغير ستعمل

فقط للأمثلة البسيطة حقيقة مثل هذا المثال)

(d) صمّم نموذجاً لمنبع ماركوف بحالتين والذي يعتبر نموذجاً جيداً لخرج المصدر. فقط استخدم الحدس هنا.

(e) أوجد الإنتروبيا الموافقة لنموذج المنبع السابق بوحدة البت/رمز المنبع.

35.2 (a) بيّن أنه إذا تم اختيار رمز خالي البادئة مثالي (في حالة الطول المتوقع الأصغري) من أجل أي تابع كتلة احتمال pmf (يحقق

الشرط $p_i \leq p_j$ فإن طول كلمة الترميز يحقق $l_i \leq l_j$ ، واستخدم ذلك لبرهان أنه من أجل $z \geq 1$ فإن:

$$l_j \geq \lfloor \log z \rfloor + 1$$

(b) فعالية المقارب للرمز خالي البادئة من أجل الأعداد الصحيحة الموجبة يعرف بأنه $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{l_j}{\log j}$ ، ما هي فعالية المقارب للرمز الأحادي-

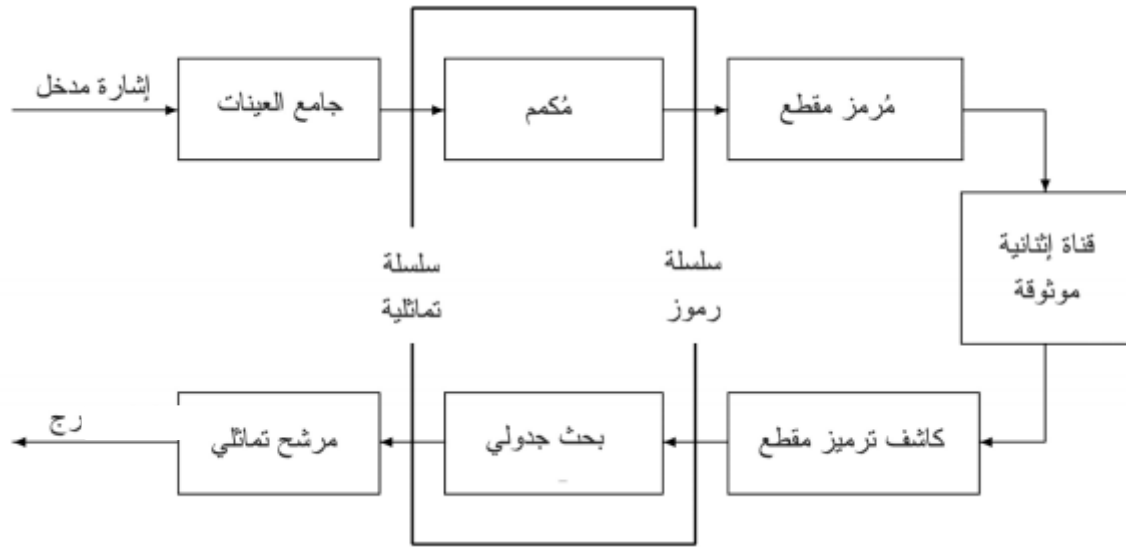
الثنائي؟

(c) بيّن كيف يتم إنشاء رمز خالي البادئة من أجل الأعداد الصحيحة الموجبة عندما تكون فعالية المقارب تساوي 1.

3. التكميم

1.3 مقدمة في التكميم

ناقش الفصل السابق ترميز وفك ترميز المنابع المتقطعة. تعتبر المنابع المتقطعة موضع اهتمام في حد ذاتها (نص، ملفات الحاسوب، إلخ...) بالإضافة إلى أنها تكون بمثابة الطبقة الداخلية لترميز متتابعات (سلاسل) المنبع التماثلي ومنابع الموجة (انظر الشكل 1.3). يتناول هذا الفصل ترميز وفك ترميز تتابع من القيم التماثلية. يسمى ترميز المنبع للقيم التماثلية عادةً بالتكميم. مع ملاحظة أن هذا هو أيضاً الطبقة الوسطى لترميز/فك الترميز الموجة.



الشكل 1.3: ترميز وفك ترميز المنابع المتقطعة، منابع التتابع التماثلي ومنابع الموجة. إن التكميم والذي هو موضوع هذا الفصل هو الطبقة الوسطى وينبغي أن يكون مفهوماً قبل محاولة فهم الطبقة الخارجية والتي تتعامل مع منابع الموجة.

ستتم نمذجة القيم المدخلة إلى المكمم على شكل تتابع U_1, U_2, \dots من المتغيرات العشوائية التماثلية. الدافع وراء ذلك هو أكثر من نمذجة مدخل مرمرز المنبع المتقطع على شكل تتابع من الرموز العشوائية. وعليه، ينبغي تصميم المكمم بحيث يستجيب لمجموعة من المدخلات المحتملة لا أن يكون مصمماً فقط لتتابع وحيد من المدخلات العددية. ومن المستحسن أيضاً لمعالجة المدخلات النادرة جداً بشكل مختلف عن معالجة المدخلات الشائعة جداً، وتعد كثافة الاحتمال الخيار المثالي لهذا الغرض. بشكل مبدي، فإن القيم U_1, U_2, \dots ستؤخذ على أنها متغيرات عشوائية تماثلية مستقلة وموزعة بشكل متماثل Independent and identically distributed random variables (iid) وفق تابع كثافة احتمال (pdf) معطى $f_U(u)$.

يطابق المكمم بالتعريف، تسلسل الدخل U_1, U_2, \dots مع تسلسل قيم عشوائية متقطعة V_1, V_2, \dots . والهدف هو أن تمثل كل U_m بـ V_m من أجل كل m بأقل تشوه ممكن. على فرض أن المرمرز/مفكك الترميز في الطبقة الداخلية في الشكل (1.3) يمكن فك ترميزه بطريقة وحيدة سيظهر التسلسل V_1, V_2, \dots في خرج المرمرز المتقطع وسيمر عبر الطبقة الوسطى (يشار له بجدول البحث) لتمثيل الدخل U_1, U_2, \dots . تدعى جهة الخرج لطبقة المكمم بجدول البحث لأن الأبجدية لكل المتغيرات العشوائية المتقطعة V_m هي مجموعة منتهية من القيم الحقيقية، وعادةً ما يتم تحويلهم إلى مجموعة أخرى من الرموز كأعداد صحيحة من 1 إلى M من أجل M رمز أبجدي. لذا سيطلب تابع بحث في جهة الخرج من أجل إعادة للقيمة العددية V_m .

كما تمت مناقشته في الفقرة (1.2)، إذا تم حصر الخرج إلى M قيمة ممكنة عندها لا يمكن تمثيل إشارة الدخل U_m بشكل جيد. بزيادة M يتحسن التكميم وينقص التشوه نموذجياً ولكن بدون التخلص منه نهائياً.

عندما يتم تكميم قيم عشوائية تماثلية U إلى قيم عشوائية متقطعة V ، يتم تعريف المتوسط التريبيعي للتشوه على النحو $E[(U - V)^2]$. يستخدم

المتوسط التربيعي للتشوه (والذي يدعى بالمتوسط التربيعي للخطأ (MSE) mean-squared error في هذا الفصل لقياس التشوه. سيتضح عند دراسة تحويل الموجة إلى تتابع في الفصل القادم أن المتوسط التربيعي للتشوه هو وسيلة قياس ملائمة لتحويل تشوه التتابع إلى تشوه بشكل الموجة.

هناك بعض المساوئ عند قياس التشوه بمفهوم المتوسط التربيعي للتشوه. تستند على سبيل المثال رموزات الكلام الفعالة إلى نماذج الكلام البشري. تستفيد من حقيقة أن المستمعين من الناس يكونون أكثر حساسية لبعض أنواع أخطاء إعادة البناء من الآخرين، على سبيل المثال السماح بأخطاء كبيرة عندما تكون الإشارة عالية أكثر من أن تكون الإشارة ناعمة. إن ترميز الكلام هو موضوع اختصاصي ولا نملك الوقت لعرضه (انظر المرجع [10]). إلا أن فهم الضغط بالنسبة لقياس المتوسط التربيعي للتشوه سيطور العديد من المفاهيم الضرورية للدراسات المتقدمة.

سنعتبر فيما يلي، التكميم السلمي (scalar) أولاً حيث سيتمّ تكميم القيم العشوائية التماثلية في التتابع بشكل منفصل بالنسبة للقيم العشوائية الأخرى. ثم سيتمّ التعامل مع التكميم الشعاعية (vector). وهنا سيتمّ أولاً التجزئة إلى كتل من القيم العشوائية n وكل صف من الكتل n -tuple يتمّ تكميمه على حدة.

ستكون المقاربة الأولية للتكميم السلمي والشعاعية بتصغير المتوسط التربيعي للتشوه الخاضع للقيود على حجم أبجدية التكميم. لاحقاً، سنتعامل مع تصغير المتوسط التربيعي للتشوه الخاضع للقيود على انتروبية الخرج المكتم. هذه هي المقاربة الأنسب للتكميم إذا كان تتابع الخرج المكتم رمزاً ترميز منع بطريقة فعالة، أي لتخفيض عدد البتات المرمرزة في الرمز المكتم لأقل من الحالة الانتروبية الموافقة.

2.3 التكميم السلمي

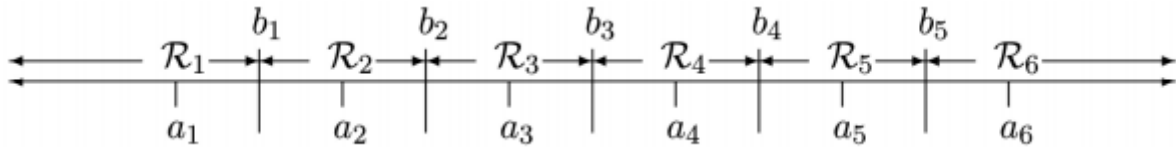
يُقسم المكتم السلمي مجموعة الأعداد الحقيقية \mathcal{R} إلى M مجموعة جزئية $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_M$ تدعى بمناطق التكميم. على فرض أن كل منطقة تكميم هي مجال؛ سيتبين لنا قريباً صحة هذا الفرض، تمثل كل منطقة \mathcal{R}_j بنقطة تمثيل $a_j \in \mathcal{R}_j$. عندما يولد المنبع عدد ما $\mathcal{R} \in$ ، يتمّ تكميم هذا العدد إلى النقطة a_j . يمكن اعتبار المكتم السلمي كدالة $\{v(u): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ تتقابل فيها القيم الحقيقية التماثلية u مع القيم الحقيقية المنقطعة $v(u)$ حيث $v(u) = a_j$ من أجل $u \in \mathcal{R}_j$.

يتمّ مُقابلة التتابع التماثلي للرموز ذات القيم الحقيقية u_1, u_2, \dots بتتابع مقطّع $v(u_1), v(u_2), \dots$ من خلال المكتم. وباعتبار u_1, u_2, \dots قيم عينات من تتابع عشوائي U_1, U_2, \dots . يُنتج التتابع $v(u)$ متحولاً عشوائياً V_k لكل U_k ، يأخذ القيمة a_j إذا كان $U_k \in \mathcal{R}_j$. وبهذا يكون كل خرج مكتم V_k هو قيمة عشوائية مقطّعة بأبجدية $\{a_1, \dots, a_M\}$. يتمّ ترميز التتابع العشوائي المقطّع V_1, V_2, \dots بأعداد إثنائية حيث يتمّ إرسالها ثم فك ترميزها وإعادتها إلى نفس التتابع المقطّع. هذا يفرض أن الإرسال خالٍ من الأخطاء.

سندرس أولاً كيفية اختيار مناطق التكميم $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_M$ ، وكيفية اختيار نقاط التمثيل الموافقة. لنفرض بشكل مبدي أن المناطق هي مجالات مرتبة كما في الشكل (2.3) بحيث:

$$\mathcal{R}_1 = (-\infty, b_1], \mathcal{R}_2 = (b_1, b_2], \dots, \mathcal{R}_M = (b_{M-1}, \infty)$$

هكذا يتمّ تحديد مكتم ذو M مستوى و $M-1$ نقطة نهاية مجال b_1, \dots, b_{M-1} ونقاط تمثيل M وهي: a_1, \dots, a_M .



الشكل 2.3: مناطق التكميم ونقاط التمثيل

كيف يمكننا اختيار مناطق ونقاط التمثيل من أجل قيمة معينة لـ M بحيث يكون متوسط الخطأ التربيعي أصغر ما يمكن؟ يتمّ التعامل مع هذا السؤال بطريقتين:

- بفرض لدينا مجموعة من نقاط التمثيل $\{a_j\}$ ، كيف نختار المجالات $\{\mathcal{R}_j\}$ ؟
- بفرض لدينا مجموعة من المجالات $\{\mathcal{R}_j\}$ ، كيف نختار نقاط التمثيل $\{a_j\}$ ؟

1.2.3 اختيار المجال من أجل نقاط تمثيل معطاة

من السهل اختيار المجالات الموافقة لمجموعة من نقاط التمثيل المعطاة $\{a_j; 1 \leq j \leq M\}$ من أجل أي $u \in \mathbb{R}$ ، يكون الخطأ التربيعي لـ a_j هو $(u - a_j)^2$ الذي يتم جعله أصغر ما يمكن (من أجل نقاط تمثيل ثابتة $\{a_j\}$) من خلال تمثيل u بأقرب نقطة تمثيل a_j . هذا يعني، على سبيل المثال، إذا كانت u محصورة بين a_j و a_{j+1} عندها يتم تحويل u إلى النقطة الأقرب لهاتين النقطتين. وبهذا يجب أن يقع الحد b_j بين المجالين R_j و R_{j+1} وفي منتصف المسافة بين نقطتي التمثيل a_j و a_{j+1} ، حيث $1 \leq j \leq M - 1$. يعطى b_j بالعلاقة: $b_j = \frac{a_j + a_{j+1}}{2}$ وهذا يحدد كل منطقة تكثير، ويظهر لماذا نعبر عن كل منطقة بمجال. مع ملاحظة أن تصغير قيمة المتوسط التربيعي للتشوه لا يتعلق بالنموذج الاحتمالي لـ U_1, U_2, \dots

2.2.3 اختيار نقاط التمثيل لمجالات محددة

للإجابة عن السؤال الثاني، سيكون النموذج الاحتمالي لـ U_1, U_2, \dots مهماً. على سبيل المثال، من المعلوم بأن كل U_k لها قيمة متقطعة وتحوي فقط عينة واحدة في كل مجال، سيتم اختيار هذه العينات على أنها نقاط التمثيل. لنفرض الآن بأن القيم العشوائية لـ $\{U_k\}$ هي قيم عشوائية تماثلية مستقلة وموزعة بشكل متماثل مع دالة الكثافة الاحتمالية لـ $f_U(u)$ من أجل قيم معطاة من النقاط $\{a_j\}$ ، تحول $V(U)$ كل عينة $u \in R_j$ إلى a_j . يعطى المتوسط التربيعي للتشوه بالعلاقة:

$$(1.3) \quad \text{MSE} = E[(U - V(U))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} f_U(u)(u - v(u))^2 du = \sum_{j=1}^M \int_{R_j} f_U(u)(u - a_j)^2 du$$

للحصول على أصغر قيمة للمعادلة (1.3) في المجموعة a_j ، من الضروري اختيار كل a_j من أجل إيجاد أصغر قيمة للتكامل الموافق (تذكر أن المناطق تعتبر ثابتة هنا). تشير الدالة $f_j(u)$ إلى تابع كثافة الاحتمال الشرطي لـ U حيث $u \in R_j$.

$$(2.3) \quad f_j(u) \approx \begin{cases} \frac{f_U(u)}{Q_j} & \text{if } u \in R_j; \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

حيث $Q_j = \Pr\{U \in R_j\}$ من أجل المنطقة R_j :

$$(3.3) \quad \int_{R_j} f_U(u)(u - a_j)^2 du = Q_j \int_{R_j} f_j(u)(u - a_j)^2 du$$

نحصل على أصغر قيمة للمعادلة (3.3) باختيار a_j بحيث يكون متوسط المتغير العشوائي وفق تابع كثافة الاحتمال للتابع $f_j(u)$. نلاحظ أنه من أجل أي قيمة عشوائية Y وقيمة حقيقية a يكون:

$$\overline{(Y - a)^2} = \overline{Y^2} - 2a\overline{Y} + a^2$$

يتم إيجاد أصغر قيمة عندما يكون $a = \overline{Y}$.

هذا يستوجب مجموعة من الشروط التي يجب أن تحققها نقاط النهاية $\{b_j\}$ والنقاط $\{a_j\}$ لإيجاد المتوسط التربيعي للخطأ المناسب. يجب أن تكون كل b_j النقطة المتوسطة بين a_j و a_{j+1} ، وكما يجب أن تكون كل a_j متوسط القيم العشوائية للمتحوّل العشوائي U_j وفق تابع الكثافة الاحتمالية $f_j(u)$. بكلمات أخرى، يجب أن يكون a_j المتوسط الشرطي لـ U بشرط أن تكون $U \in R_j$. يتبين أنه من الضروري تحقق هذه الشروط من أجل إيجاد أصغر قيمة للمتوسط التربيعي للخطأ وذلك من أجل عدد معين M من نقاط التمثيل. ولكن هذه الشروط ليست كافية، كما سيوضح عبر مثال في نهاية الفصل، إلا أنها تعطينا فكرة أولية حول إيجاد أصغر قيمة للمتوسط التربيعي للخطأ.

2.3.3 خوارزمية لويد ماكس Lloyd-Max

هي خوارزمية²⁵ لإيجاد نقاط النهاية $\{b_j\}$ ونقاط التمثيل $\{a_j\}$ التي تحقق الشروط الضرورية. وبوجود هذه الشروط تكون الخوارزمية واضحة جداً، كان إسهام Lloyd و Max من خلال تحديد المشكلة وتطوير الشروط الضرورية. تقوم الخوارزمية ببساطة بأمثلة الأقسام الجزئية السابقة، حيث يتم أمثلة نقاط النهاية $\{b_j\}$ من أجل مجموعة معينة من $\{a_j\}$ ، ومن ثم يتم أمثلة النقاط $\{a_j\}$ من أجل نقاط النهاية الجديدة. الخوارزمية هي كالتالي: بفرض أن عدد مستويات المكمم هي M وتابع كثافة احتمال للتابع $f_U(u)$ محدد القيمة.

1. يتم اختيار مجموعة اعتباطية (عشوائية) تتألف من M نقطة تمثيل $a_1 < a_2 < \dots < a_M$.

2. من أجل كل j ، $1 \leq j \leq M-1$ ، يتم تحديد $b_j = 1/2 (a_{j+1} + a_j)$.

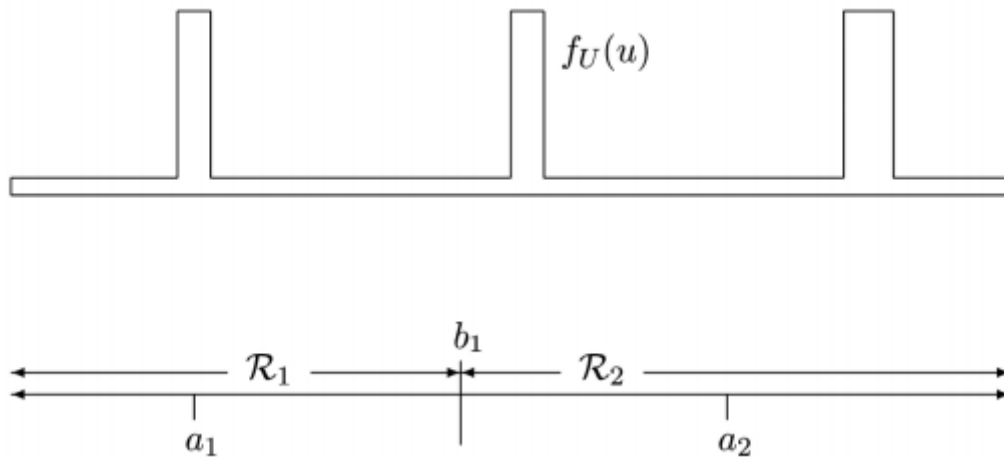
3. من أجل كل j ، $1 \leq j \leq M$ ، يتم تحديد a_j مساوية للمتوسط الشرطي لـ $U \in (b_j - 1, b_j]$ (تعطى b_0 و b_M القيمتين $-\infty$ و $+\infty$ على التوالي).

4. نكرر الخطوتين 2 و 3 حتى تصبح التحسينات المضافة على المتوسط التريبيعي للخطأ مهملة ثم نتوقف.

يتناقض المتوسط التريبيعي للخطأ (أو يبقى كما هو) عند كل تنفيذ للخطوتين الثانية والثالثة.

بما أن المتوسط التريبيعي للخطأ لا يأخذ قيمة سالبة، فهو يقترب من حد معين. تنتهي الخوارزمية عندما يصبح التحسين على المتوسط التريبيعي للخطأ أقل من قيمة معينة $\varepsilon > 0$ ، عندها يجب أن تنتهي الخوارزمية بعد عدد محدد من تكرار الخطوات.

مثال 1.2.3: يبين هذا المثال أن الخوارزمية يمكن أن تؤدي إلى نهاية صغيرة محلية لـ MSE عوضاً عن النهاية الصغرى الشاملة. لنفرض أنه لدينا مكّم، عدد نقاط التمثيل فيه $M = 2$ ، ومتحول عشوائي U تابع كثافة الاحتمال له $f_U(u)$ فيه ثلاث ذروات، كما هو واضح في الشكل (3.3).



الشكل 3.3: مثال على مناطق ونقاط التمثيل التي تحقق شروط اللويد ماكس دون التقليل من المتوسط التريبيعي للتشوه.

من الواضح أنه يجب أن تُغطي المنطقة الواحدة على اثنتين من هذه القمم، مما يؤدي إلى القليل من التشوه، بينما سيمثل الباقي القمم الأخرى، مما يؤدي إلى تشوه قليل. في الشكل، تقع كلا القمّتين في أقصى اليمين من \mathcal{R}_2 بالإضافة إلى وقوع النقطة a_2 بينهما. يجب على النقاط والمناطق أن تحقق الشروط الضرورية ولا يمكن أن تتحسن محلياً. يمكن ملاحظة أن القمة في أقصى اليمين من الشكل أكثر احتمالية من القمم الباقية. وبالتالي سيكون المتوسط التريبيعي للتشوه أقل إذا كانت \mathcal{R}_1 تغطي القمّتين في أقصى اليسار وبالتالي فإن خوارزمية Lloyd-Max هي من نوع خوارزميات Hill-climbing.

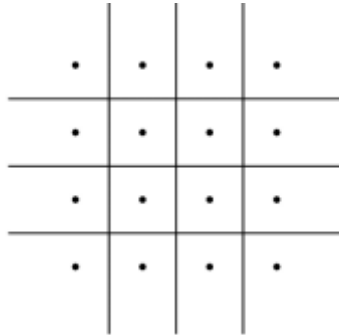
²⁵ طورت هذه الخوارزمية بشكل مستقل من قبل S. P. Lloyd في العام 1957، و J. Max في العام 1960. أجريت أبحاث لويد في مخابر شركة بل وأصبحت شائعة على نطاق واسع على الرغم من أنها لم تنشر حتى العام 1982 [16]. بينما نشرت أبحاث ماكس [18] في العام 1960.

نبدأ بمجموعة اعتباطية من القيم، يتم تعديل هذه القيم حتى يتم الوصول إلى قمة الهضبة، حيث تصبح أية تحسينات إضافية غير ممكنة.²⁶ طريقة أخرى معقولة لحل هذه الحالة هي أن نحاول مع العديد من نقاط البدء المختارة عشوائياً ثم نطبق خوارزمية Lloyd-Max على كل منها ثم نأخذ الحل الأفضل، لكن هذا لا يقدم نتائج مرضية حيث لا يوجد أي طريقة عامة لتحديد متى نجد الحل الأفضل.

3.3 التكميم الشعاعي

بنفس طريقة ترميز المنابع للمنابع المتقطعة سنعالج تكميم n متحول منبع في آن واحد. هذا ما يدعى بالتكميم الشعاعي، وبما أن n صف من القيم العشوائية يمكن أن ينظر له كمتجه (شعاع) قيم عشوائية في فضاء متجهي ذي n بعد. سنركز على الحالة التي يكون فيها $n = 2$ حيث بإمكاننا رسم الشكل التوضيحي.

أحد المقاربات الممكنة لحل هذه الحالة هي تكميم كل بعد بشكل مستقل عبر مكتم سلمي. ينتج عنه شبكة مستطيلة لمناطق التكميم كما يظهر في الأسفل. المتوسط التربيعي للخطأ للبعد الواحد هو ذاته للمكتم السلمي باستخدام نفس عدد البتات للبعد الواحد. هكذا يكون لأفضل مكتم شعاعي ثنائي البعد خطأ متوسط تربيعي للبعد الواحد على الأقل مساوياً لأفضل مكتم سلمي.



الشكل 4.3: مكتم مستطيل ثنائي البعد.

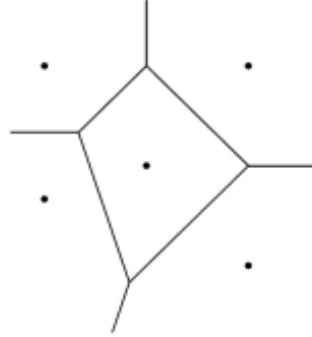
لإيجاد أصغر خطأ متوسط تربيعي لمكتم شعاعي ثنائي البعد لديه M نقطة تمثيل، نستخدم نفس الطريقة التي استخدمناها في المكتم السلمي. لتكن (U', U) قيمتين عشوائيتين جرى تكميمهما معاً. بفرض أنه تم اختيار مجموعة مؤلفة من M نقطة تمثيل ثنائية البعد $\{(a_j, a'_j)\}$ حيث $1 \leq j \leq M$. على سبيل المثال، في الشكل أعلاه، هناك 16 نقطة تمثيل، يعبر عنها بنقاط صغيرة. أي من نقاط التمثيل يجب اختيارها إذا كان لدينا زوج من العينات (u', u) ومجموعة معينة M من نقاط التمثيل؟ الجواب سهل، بما أن التحويل من (u', u) إلى (a'_j, a_j) ينتج خطأ تربيعياً مساوياً للقيمة $(u - a_j)^2 + (u' - a'_j)^2$ ، فيجب اختيار النقطة (a'_j, a_j) الأقرب إلى (u', u) في الفضاء الإقليدي.

بالتالي، يجب أن تكون المنطقة R_j هي مجموعة النقاط (u', u) الأقرب إلى (a'_j, a_j) منها إلى أي نقاط تمثيل أخرى. وهكذا تكون المناطق $\{R_j\}$ هي مناطق المسافة الدنيا؛ تدعى هذه المناطق *مناطق فورونوي Voronoi* لنقاط التمثيل المعطاة. إن حدود مناطق Voronoi هي منصفات متعامدة بين نقاط التمثيل المتجاورة. وبالتالي فإن مناطق المسافات الدنيا هي بالعموم مناطق مُضَلَع مُحدَّب، كما هو موضَّح بالشكل أدناه. يمكن جعل المتوسط التربيعي للخطأ أصغر ما يمكن كما في الحالة السلمية، وذلك من أجل مجموعة معينة من المناطق عبر اختيار نقاط التمثيل لتكون وسائط شرطية ضمن هذه المناطق. ثم بعد الحصول على المجموعة الجديدة من نقاط التمثيل، يمكن تصغير المتوسط التربيعي للخطأ عبر استخدام مناطق Voronoi للنقاط الجديدة. يعطينا نسخة ثنائية الأبعاد لخوارزمية Lloyd-Max، والتي يجب أن تتقارب إلى نهاية صغرى محلية للمتوسط التربيعي للخطأ. ويمكن تعميم هذا مباشرة على أي بعد من الدرجة n .

كما رأينا سابقاً، تقوم خوارزمية Lloyd-Max فقط بإيجاد النهاية الصغرى المحلية للمتوسط التربيعي للخطأ من أجل المكتمات السلمية. تصبح مشكلة النهاية المحلية الصغرى أسوأ من أجل المكتمات الشعاعية. حيث على سبيل المثال، عندما تكون U_1, U_2 ، توزعاً من القيم المتماثلة المستقلة عن بعضها، من السهل رؤية أن المكتم السلمي في الشكل (4.3) يحقق شروط Lloyd-Max عندما يحققها المكتم السلمي

²⁶ قد يكون من الأفضل أن نطلق على هذا خوارزمية هبوط الوادي، لأن المطلوب هو الحد الأدنى، وبسبب عدم القدرة على استخدام المناظير في قعر الوادي للعثور على وادٍ أكثر عمقاً.

الموافق (انظر التمرين 10.3). سيتضح قريباً أنه من غير الضروري أن تكون القيمة الصغرى للمتوسط التربيقي للخطأ. كان التكميم الشعاعي موضوع بحثي للعديد من الباحثين لعدة سنوات. المشكلة هي أن تعقيد التكميم يزداد بشكل أسي بازدياد n . ويعتبر انخفاض المتوسط التربيقي للخطأ مع ازدياد n بقبول جداً ، إلا في حال كانت قيم العينات غير مستقلة إحصائياً بدرجة عالية.



الشكل 5.3: مناطق Voronoi.

4.3 التكميم المرمز انتروبياً

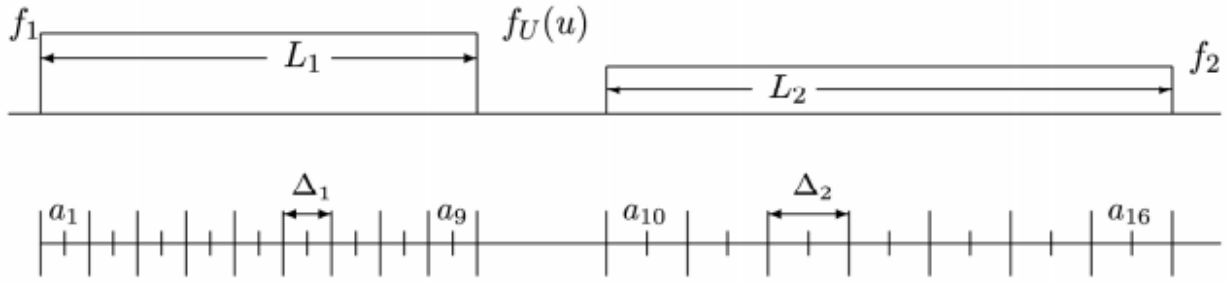
يجب علينا الآن أن نتساءل فيما إذا كان تقليل المتوسط التربيقي للخطأ لعدد معطى M من نقاط التمثيل هو المشكلة الحقيقية. إن الحد الأدنى المتوقع من عدد البتات لكل رمز \bar{L}_{min} والمطلوب لترميز خرج المكمم المذكور في الفصل الثاني ليكون محكوماً بانتروبية خرج المكمم $H[V]$ وليس بحجم أبجدية التكميم M . لذا فإن توقع ترميز منبع فعال للخرج المكمم يتطلب منا حقاً المحاولة لتقليل المتوسط التربيقي للخطأ لانتروبية معينة $H[V]$ أكثر من عدد معين من نقاط التمثيل.

تسمى هذه المقاربة التكميم المرمز انتروبياً ويكون دائماً متضمناً في المقاربة ذات الطبقات لترميز المنبع الممثل في الشكل (1.3). إن ترميز المنبع المتقطع القريب من حد الانتروبية هو بشكل مشابه غالباً ما يسمى بترميز الانتروبية، لذا فإن التكميم المرمز انتروبياً يعود لتقنيات التكميم المصممة لتكون متبوعة بترميز الانتروبية.

يتم تحديد الانتروبية $H[V]$ لخرج المكمم فقط باحتمالات مناطق التكميم. لذا فإنه من أجل مجموعة معينة من المناطق وعند اختيار نقاط تمثيل كشرط فهذا يعني تقليل تشوهم بدون تغيير الانتروبية. ومع ذلك من أجل مجموعة معينة من نقاط التمثيل فإن المناطق المثلى ليست بالضرورة أن تكون مناطق Voronoi (على سبيل المثال، في المكمم السلمي، تعد النقطة الفاصلة بين منطقتين متجاورتين ليست بالضرورة أن تكون متساوية البعد عن نقطتي التمثيل).

على سبيل المثال ومن أجل مكمم سلمي بشرط $H[V] \leq 1/2$ وتابع كثافة احتمالي غوسي من أجل U ، فإن الاختيار المعقول هو ثلاث مناطق. المنطقة الوسطى لها احتمالية عالية $1 - 2p$ والمناطق الخارجية لها احتمالية منخفضة تساوي الاحتمالية p بحيث يكون $H[V] \leq 1/2$. إن تقليل المتوسط التربيقي للخطأ الخاضع لشرط الانتروبية من أجل المكيمات السلمية هو بالأحرى مشكلة كبيرة. يمكن الحصول على نظرة عميقة عن المشكلة بالنظر للحالة التي تكون فيها انتروبية الهدف كبيرة. أي أنه عندما يكون عدد النقاط كبيراً فيمكن استخدامها لتحقيق متوسط تربيقي للخطأ منخفض؛ إلا أنه ومن حسن الحظ فإن هذه الحالة تمثل أغلب الحالات العملية.

مثال 1.4.3. اعتبر في المثال البسيط التالي، أن المكمم ذو متوسط تربيقي أصغري للخطأ وهو يستخدم القيود على عدد نقاط التمثيل M بالمقارنة مع المكمم الذي يستخدم القيود على الانتروبية $H[V]$.



الشكل 6.3: مقارنة بين القيود على M والقيود على H[V].

يُظهر المثال جزءاً ثابتاً من تابع كثافة الاحتمال $f_U(u)$ والذي يأخذ فقط قيمتين موجبتين، هما $f_U(u) = f_1$ في المجال L_1 و $f_U(u) = f_2$ في المجال L_2 ، وأن $f_U(u) = 0$ فيما عدا ذلك. يمكننا التكميم بشكل منفصل بسبب التباعد الكبير بين المجالين، دون القيام بأي نقطة تمثيل في المنطقة بين المجالين. ليكن M_1 و M_2 هو عدد نقاط التمثيل في كل مجال. لدينا في الشكل $M_1 = 9$ و $M_2 = 7$. وليكن $\Delta_1 = L_1/M_1$ و $\Delta_2 = L_2/M_2$ أطوال مناطق التكميم بين المجالات، مع الإشارة إلى أن لكل منطقة تكميم في مجال معطى الطول نفسه، كما وتكون نقاط التمثيل في مركز كل مجال تكميم. يكون المتوسط التريبيعي للخطأ والمشروط في منطقة التكميم ذات الطول Δ_i ، بحيث يكون هذا الخطأ ذا توزيع منتظم في مجال الطول Δ_i ، والذي يحسب بسهولة ليكون $\Delta_i^2/12$. إن احتمال الوجود في منطقة تكميم معينة ذات مقياس Δ_i هو $f_i \Delta_i$ ، وعليه يعطى كامل المتوسط التريبيعي للخطأ وفق:

$$(4.3) \quad \text{MSE} = M_1 \frac{\Delta_1^2}{12} f_1 \Delta_1 + M_2 \frac{\Delta_2^2}{12} f_2 \Delta_2 = \frac{1}{12} \Delta_1^2 f_1 L_1 + \frac{1}{12} \Delta_2^2 f_2 L_2$$

يمكن أن يتمّ تصغير هذا الخطأ من أجل Δ_1 و Δ_2 بوجود القيد $M = M_1 + M_2 = L_1/\Delta_1 + L_2/\Delta_2$ وبتجاهل القيد أن M_1 و M_2 هي أعداد صحيحة (وهذا منطقي من أجل M كبيرة). يظهر التمرين (4.3) أن المتوسط التريبيعي للخطأ الأصغري يحدث عندما يتمّ اختيار Δ_i لتتناسب عكسياً مع الجذر التكعيبي لـ f_i ، وبكلمات أخرى:

$$(5.3) \quad \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \left(\frac{f_2}{f_1} \right)^{1/3}$$

هذا يعني أن مقياس منطقة التكميم يتناقص مع زيادة كثافة الاحتمال، وهذا واقعي، لأننا نبذل أكبر جهد ممكن حيث يوجد الاحتمال الأكبر. إن الأمر المفاجئ هو كون التأثير قليل جداً، يتناسب طردياً مع الجذر التكعيبي.

قد يكون الأمر الأكثر مفاجأة إذا جعلنا المتوسط التريبيعي للخطأ أصغرياً مع إخضاع الانتروبية لقيد في هذا المثال، وبين التمرين (4.3) ذلك حيث في حدود المعدل المرتفع، إن كافة فواصل التكميم لها الطول نفسه. يدعى المكتم السلمي عندما تكون كل الفواصل لها الطول نفسه بالمكتم المنتظم. ستوضح الفقرات القادمة أن المكتمات السلمية المنتظمة لها خصائص مميزة من أجل تكميم ذي معدل مرتفع.

5.3 التكميم المرمرز انتروبياً ذات المعدل المرتفع

يركز هذا القسم على المكتمات ذات معدلات التكميم المرتفعة حيث يمكن أن نجعل مناطق التكميم صغيرة بشكل كافٍ مما يجعل كثافة الاحتمال ثابتة تقريباً ضمن كل منطقة.

سوف نرى ضمن هذه الشروط كيف يمكن لمكتم سلمي منتظم متبوع بترميز انتروبي متقطع أن يكون أمثلياً (بدلالة المتوسط التريبيعي للتشوه) ضمن صف المكتمات السلمية. يمكن أن يستغل احتمال توزيع المتحولات العشوائية المفترض تكميمها عند مستوى الترميز المتقطع للمنبع. لاحظ أن هذه الأمثلة للمكتمات السلمية المنتظمة تقوم بشكل رئيس على افتراض أن متوسط مربع التشوه هو معيار مناسب للتشوه. هذا يعني بأن المكتم المنتظم يمكن أن يستخدم كمكتم شامل مع فقد بسيط جداً للمثالية. يكون في ترميز الصوت على سبيل المثال، تشوه محدد في مستويات الإشارة المنخفضة أكثر ضرراً من التشوه نفسه عند مستويات الإشارة العالية.

نفترض في الفقرات التالية أن خرج المنبع هو تتابع من المتغيرات العشوائية ذات القيم التماثلية الصحيحة المستقلة والموزعة بانتظام U_2

... U_1 ، ذات تابع كثافة احتمالية $f_U(u)$ لكل منها. نفترض أيضاً أن تابع كثافة الاحتمال أملس (smooth) بشكل كافٍ والتكميم جيد بشكل كافٍ أيضاً بحيث تكون هذه الكثافة الاحتمالية ثابتة تقريباً في كل منطقة تكميم.

تعدّ الإشارة التماثلية للإنتروبية $H[X]$ للقيم العشوائية المقطّعة هي مشتق الإنتروبية $h[U]$ لقيم عشوائية تماثلية. بعد تعريف $h[U]$ فإنه سيتمّ مقارنة خصائص $H[U]$ و $h[U]$.

سوف يتمّ لاحقاً تحليل أداء المكمم السلمي النموذجي المتبوع بترميز الإنتروبية. سيوضح قريباً أن هناك مفاضلة بين معدل المكمم والمتوسط التربيعي للخطأ بين المنبع والخرج المكمم. وسنرى أيضاً أن المكمم النموذجي هو أيضاً مثالي بشكل كبير فيما بين المكممات السلمية عند المعدلات العالية.

سيتمّ لاحقاً تحليل أداء المكممات الشعاعية النموذجي المتبوع بترميز الإنتروبية وسيتمّ إيجاد مفاضات مماثلة فيها. النتيجة الرئيسية هي أن المكممات الشعاعية يمكن لها أن تحقق ربحاً أكبر من المكممات السلمية (انخفاض المتوسط التربيعي للخطأ لمعدل تكميم معين) إلا أن الانخفاض في المتوسط التربيعي للخطأ هو على الأكثر من مرتبة $\pi e/6 = 1.42$.

تحسب التغيرات في المتوسط التربيعي للخطأ لمختلف طرائق التكميم، وبشكل مشابه التغيرات في مستويات الطاقة على الألفية بالديسيبل dB من قبل مهندسي الاتصالات. يعرف عدد الديسيبل الموافق لانخفاض α في المتوسط التربيعي للخطأ على أنه $10 \log_{10} \alpha$. يسمح استخدام المقياس اللوغاريتمي للعناصر المختلفة للمتوسط التربيعي للخطأ أو ربح الاستطاعة بجمعها عوضاً عن ضربها.

إن الدافع لاستخدام الديسيبل بدلاً عن استخدام سلالم قياس لوغاريتمية أخرى، مثل اللوغاريتم الطبيعي أو اللوغاريتم ذي الأساس 2، هو سهولة القيام بالعمليات الحسابية الذهنية الصعبة. إن المعامل للعدد 2 هو $10 \log_{10} 2 = 3.010\dots$ dB وهي تقريباً 3 ديسيبل، وهكذا يكون $2^2 = 4$ تساوي 6 ديسيبل و 8 تساوي 9 ديسيبل. بما أن 10 تساوي 10 ديسيبل، يمكننا أن نرى أيضاً أن 5 تساوي $10/2$ أو 7 ديسيبل، ويمكننا بسهولة استنتاج أن 20 تساوي 13 ديسيبل وهكذا... إن معامل التحديد 1.42 في المتوسط التربيعي للخطأ كما هو مبين أعلاه هو بالتالي انخفاض بمقدار 1.53 ديسيبل.

كما في الحالة غير المستمرة (المقطّعة)، فإنه من الممكن التعميم على منابع تماثلية ذات ذاكرة إلا أن هذا لن تجري مناقشته في هذا السياق.

6.3 الإنتروبية التفاضلية

إن الإنتروبية التفاضلية $h[U]$ لمتغير القيمة العشوائية U مشابهة للإنتروبية $H[X]$ الرمز العشوائي المتقطع X ، حيث هناك العديد من أوجه التشابه، وأيضاً العديد من الاختلافات المهمة. نعتبر عن تعريف الإنتروبية التفاضلية للقيمة العشوائية الحقيقية التماثلية U وفق تابع كثافة الاحتمال $f_U(u)$ على النحو التالي:

$$h[U] = \int_{-\infty}^{\infty} -f_U(u) \log f_U(u) du$$

يمكن أن يكون التكامل محدوداً فقط في المنطقة التي تكون فيها $f_U(u) > 0$ ، كوننا نفسر $0 \log 0$ على أنه 0 وأن $f_U(u)$ أملس والتكامل موجود وقيمتها متناهية. يستعرض التمرين (7.3) مثلاً عندما يكون $h(U)$ لا متناهي.

كما في السابق، أساس التكاملات هو 2 ووحدة $h[U]$ هي بت لكل رمز منبع. إن الإنتروبية التفاضلية $h[U]$ على غرار $H[X]$ هي القيمة المتوقعة لـ $-\log f_U(U)$ حيث ترمز rv للمتغيرات العشوائية. يعطى لوغاريتم الكثافة المشتركة لعدة متغيرات عشوائية كمجموع لوغاريتمات توابع كثافة احتمال كل متغير عشوائي، والتي يمكن استخدامها لاستنتاج AEP بشكل مشابه للحالة المتقطّعة.

إن الإنتروبية التفاضلية $h[U]$ على عكس $H[X]$ يمكن أن تأخذ قيمة سالبة حيث يعتمد هذا على الخرج المقيس. يمكن رؤية هذا عبر المثالين التاليين:

مثال 1.6.3. توزيعات منتظمة: ليكن $f_U(u)$ توزعاً منتظماً على المجال $[a, a + \Delta]$ وطوله Δ ؛ وهذا يعني أن $f_U(u) = 1/\Delta$ من أجل $u \in [a, a + \Delta]$ و $f_U(u) = 0$ خلاف ذلك. ينتج عن ذلك أن $-\log f_U(u) = \log \Delta$ حيث $f_U(u) > 0$ وأن:

$$h[U] = E[-\log f_U(U)] = \log \Delta$$

مثال 2.6.3. توزع غوص: ليكن $f_U(u)$ توزع غوصي له متوسط m ومعامل تباين σ^2 فإن:

$$f_U(u) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

عندئذ يكون:

$$-\log f_U(u) = \frac{1}{2} \log 2\pi\sigma^2 + (\log e) (u-m)^2 / (2\sigma^2)$$

ونظراً لأن:

$$E[(U-m)^2] = \sigma^2$$

$$h[U] = E[-\log f_U(U)] = \frac{1}{2} \log(2\pi\sigma^2) + \frac{1}{2} \log e = \frac{1}{2} \log(2\pi e\sigma^2)$$

يمكن من خلال هذه العلاقات رؤية أنه إذا كانت Δ أو σ^2 صغيرة بشكل كافٍ، جعل الانتروبية التفاضلية سالبة، وعندما تكون Δ أو σ^2 كبيرة بشكل كافٍ تكون عندها الانتروبية التفاضلية موجبة.

إذا تم تكبير القيمة العشوائية U إلى αU حيث أن معامل التكبير $\alpha > 0$ ، عندها تزداد الانتروبية التفاضلية بمقدار $\log \alpha$ ، في هذه الأمثلة وبشكل عام أيضاً. أي أن $h[U]$ ليست ثابتة بالتقييس (scaling)، لكن يجب ملاحظة أن الانتروبية التفاضلية تكون ثابتة بترجمة تابع كثافة الاحتمال. أي يكون لمتغير عشوائي ومقدار تأرجحه حول المتوسط الانتروبية التفاضلية نفسها.

أحد الخواص المهمة للانتروبية هي أنها لا تعتمد على تسمية عناصر الأبجدية أي أنها غير متغيرة في التحويلات العكسية. تعد الانتروبية التفاضلية مختلفة جداً في هذا السياق، وكما بينا سابقاً، فإنها تتغير حتى عبر أصغر تحويل مثل تغير معامل التقييس. يعود سبب ذلك إلى أن كثافة الاحتمال هي احتمال القياس لواحدة الطول، ولهذا فهي تعتمد على قياس الطول. في الواقع، وكما سنرى بوضوح لاحقاً، يتناسب هذا مع حقيقة أن ترميز المنبع للمنابع التماثلية يعتمد أيضاً على حد الخطأ لكل وحدة قياس.

تعريف: الانتروبية التفاضلية لمصفوفة n -tuple من المتحولات العشوائية $U^n = (U_1, \dots, U_n)$ مع تابع كثافة احتمال مشترك $f_{U^n}(u^n)$ هي:

$$h[U^n] = E[-\log f_{U^n}(U^n)]$$

للإنتروبية التفاضلية خاصية أخرى على غرار الانتروبية، أنه إذا كان U و V متحولين عشوائيين مستقلين عن بعضهما بعضاً، فإن الانتروبية للمتحوّل المشترك UV ذو تابع كثافة الاحتمال $f_{UV}(u, v) = f_U(u) f_V(v)$ هي $h[UV] = h[U] + h[V]$. إن هذا يأتي من حقيقة أن لوغاريتم كثافة الاحتمال المشترك للمتحوّلات العشوائية المستقلة هو جمعي أي أن:

$$-\log f_{UV}(u, v) = -\log f_U(u) - \log f_V(v)$$

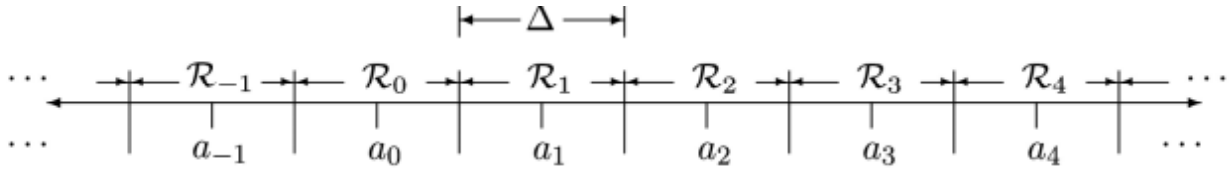
وبالتالي فإن الانتروبية التفاضلية لشعاع عشوائي U^n ، الموافق لشريط n من المتحوّلات العشوائية المستقلة والموزعة بانتظام

$$h[U^n] = nh[U] \text{ هي ذات كثافة } f_U(u) \text{ لكل منها، } U_1, U_2, \dots, U_n$$

7.3 أداء الكممات السلمية المنتظمة ذات المعدل العالي

يركز هذا الفصل على تحليل أداء الكممات السلمية المنتظمة ذات المعدل العالي. يتابع الملحق A تحليل الأداء للحالة غير المنتظمة ويُظهر أن الكممات المنتظمة تكون فعلياً أمثلية عند حدود المعدلات العالية.

إن كل حيز تكميم من أجل كمم سلمي منتظم، \mathcal{R} له الطول Δ نفسه. أي بكلمات أخرى تقسم \mathbb{R} (أو الأجزاء من \mathbb{R} التي تكون فيها $f_U > 0$) إلى حيزات متساوية، كل منها بطول Δ .

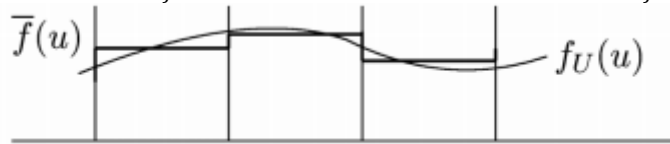


الشكل 7.3: المكتم السلمي المنتظم.

بفرض أنه يوجد مناطق تكميم كافية لتغطية المنطقة التي يكون فيها $f_U(u) > 0$ من أجل التوزيع الغوسي، وعلى سبيل المثال، يتطلب هذا عدداً لانهاياً من نقاط التمثيل $-\infty < z < \infty$. إذاً في هذا المثال، يتوافر لمتحول التكميم العشوائي غير المستمر V أبجدية لانهاية قابلة للعد. بشكل واضح، تحصر المكتمات العملية عدد النقاط في منطقة محددة \mathcal{R} بحيث يكون $\int_{\mathcal{R}} f_U(u) du \approx 1$. إذا افترضنا أن Δ صغيرة بشكل كاف بحيث يكون تابع كثافة الاحتمال $f_U(u)$ ثابت تقريباً في أي حيز تكميم. وبشكل أدق نعرف $\bar{f}(u)$ على أنه متوسط قيمة $f_U(u)$ (أنظر الشكل (8.3)) عبر حيز التكميم المتضمن u وفق المعادلة:

$$(6.3) \quad \bar{f}(u) = \frac{\int_{\mathcal{R}_j} f_U(u) du}{\Delta} \quad \text{for } u \in \mathcal{R}_j$$

من المعادلة (6.3) فإننا نجد: $\Delta \bar{f}(u) = \Pr(\mathcal{R}_j)$ من أجل كل عدد صحيح j و $u \in \mathcal{R}_j$.



الشكل 8.3: الكثافة المتوسطة لكل \mathcal{R}_j .

تقوم فرضية المعدل العالي على اعتبار أن $f_U(u) \approx \bar{f}(u)$ من أجل كافة $u \in \mathbb{R}$. هذا يعني أن $f_U(u) = \Pr(\mathcal{R}_j) / \Delta$. كما أن هذا يعني أن تابع كثافة الاحتمال المشروط $f_{U|\mathcal{R}_j}(u)$ للتابع U الذي يشترط فيه أن $u \in \mathcal{R}_j$ يساوي تقريباً:

$$f_{U|\mathcal{R}_j}(u) \approx \begin{cases} 1/\Delta, & u \in \mathcal{R}_j; \\ 0, & u \notin \mathcal{R}_j. \end{cases}$$

بالنتيجة، يكون المتوسط الشرطي a_j تقريباً في مركز المجال \mathcal{R}_j ، ويعطى المتوسط التربيعي للخطأ بشكل تقريبي وفق:

$$(7.3) \quad \text{MSE} \approx \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{1}{\Delta} u^2 du = \frac{\Delta^2}{12}$$

وذلك من أجل كل مجال تكميم \mathcal{R}_j ، وبالتالي هذا هو أيضاً المتوسط التربيعي الكلي للخطأ.

لندرس فيما يلي انتروبية خرج المكتم V . يعطى احتمال p_j من أجل $V = a_j$ وفق:

$$(8.3) \quad p_j = \int_{\mathcal{R}_j} f_U(u) du \quad \text{and, for all } u \in \mathcal{R}_j, \quad p_j = \bar{f}(u)\Delta$$

وعليه تكون انتروبية متحول التقطيع العشوائي V وفق:

$$(9.3) \quad \begin{aligned} H[V] &= \sum_j -p_j \log p_j = \sum_j \int_{\mathcal{R}_j} -f_U(u) \log[\bar{f}(u)\Delta] du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} -f_U(u) \log[\bar{f}(u)\Delta] du \end{aligned}$$

$$(10.3) \quad = \int_{-\infty}^{\infty} -f_U(u) \log[\bar{f}(u)\Delta] du - \log \Delta$$

حيث جرى جمع التكمالات المنفصلة (disjoint) في تكامل وحيد. وبالنهاية باستخدام تقريب المعدل العالي $f_U(u) \approx \bar{f}(u)$ تصبح المعادلة السابقة: 27

$$(11.3) \quad \begin{aligned} H[V] &\approx \int_{-\infty}^{\infty} -f_U(u) \log[f_U(u)\Delta] du \\ &= h[U] - \log \Delta \end{aligned}$$

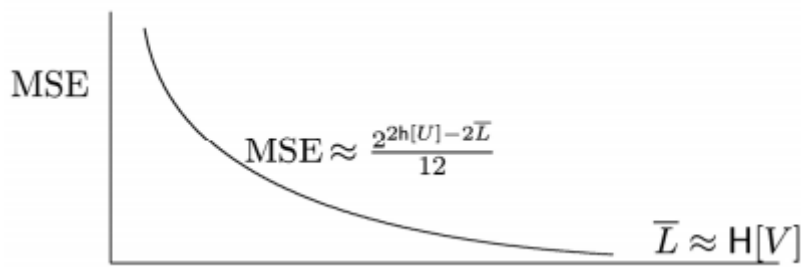
بما أن سلسلة U_1, U_2, \dots مداخل مكتم هي متحولات عشوائية مستقلة موزعة بشكل متشابه عديمة الذاكرة، فإن سلسلة الخرج V_1, V_2, \dots هي سلسلة iid لرموز عشوائية تمثل نقاط التكميم، أي منبع متقطع عديم الذاكرة. يمكن إذاً استخدام رماز مصدري source code قابل للكشف (الفك) ترميز وحيد لتشفير سلسلة الخرج هذه إلى سلسلة خانات ثنائية عند معدل متوسط $H[V] \approx h[U] - \log \Delta$ بت/رمز. تكون قيمة المتوسط التريبي لخطأ التكميم عند المستقبل، خلال إعادة بناء التابع الأصلي تقريباً $MSE \approx \Delta^2/12$.

يوضح الشكل (9.3) النتائج الهامة التي حصلنا عليها من هذا التحليل ونلخصها وفق ما يلي:

- يعتمد المعدل \bar{L} للمكتم المنتظم المتبوع بترميز الانتروبية المتقطع وفقاً لفرضية المعدل العالي على الانتروبية التفاضلية $h[U]$ للمنبع ولخطوة التكميم Δ فقط. ولا يعتمد على أي ميزة أخرى لتابع كثافة الاحتمال للمنبع $f_U(u)$ ولا على أي ميزة للمكتم، مثل عدد النقاط M طالما أن حيزات المكتم تغطي $f_U(u)$ بشكل تام ودقيق.
- يرتبط المعدل $\bar{L} \approx H[V]$ بالمتوسط التريبي للخطأ من خلال المعامل Δ وفق:

$$(12.3) \quad \bar{L} \approx h(U) - \log \Delta; \quad MSE \approx \frac{\Delta^2}{12}$$

لاحظ أن كل تخفيض في Δ بمقدار 2 سوف يقلل MSE بمقدار 4 ويزيد من معدل الإرسال المطلوب $\bar{L} \approx H[V]$ بمقدار 1 بت/رمز. يعبر مهندسو الاتصالات عن ذلك بأن كل تخفيض إضافي بمقدار 1 بت/رمز يقلل المتوسط التريبي للتشويه بمقدار 4 dB. 28 يوضح الشكل (9.3) الخطأ MSE كتابع لـ \bar{L} .



الشكل 9.3: MSE كتابع للمعامل \bar{L} من أجل المكتمات السلمية ذات التقريب بمعدل عالٍ، لاحظ أن أي تغيير في انتروبية المنبع

$h(U)$ سيزيح الخط البياني لليمين أو اليسار، كما أن $\log MSE$ خطي بميل مقداره -2 وتابع لـ \bar{L}

إن المبدلات التقليدية التماثلية/الرقمية (A/D) ذات b-bit هي نفسها مكتمات سلمية منتظمة تتميز بـ 2^b مستوي وتغطي مجالاً محدداً \mathcal{R} مع فواصل (حيزات) تكميم $\Delta = 2^{-b}|\mathcal{R}|$. يجب أن تُقيس عينات الدخل بحيث يكون احتمال كون $u \notin \mathcal{R}$ (احتمال الفيض) صغيراً. إن علاقة المقايضة من أجل تقييس ثابت للدخل هي تلك التي إذا ازداد b بمقدار 1 بت فإن MSE تنقص بمعامل قدره 4.

27 يقدم التمرين (6.3) بعض التبصر حول طبيعة التقريب في هذه الحالة. وعلى نحو خاص الفرق بين $h[U] - \log \Delta$ و $H[V]$ هو $\int_{-\infty}^{\infty} f_U(u) \log[\bar{f}(u)/f_U(u)] du$ هذه الكمية هي عادة غير موجبة وتصبح قيمتها معدومة مع Δ عند Δ^2 . وبشكل مشابه، خطأ التقريب في MSE يصبح منعدماً عند Δ^4 .
28 أعطيت القيمة x بالديسبل dB وفق العلاقة $10 \log_{10} x$. ستم مناقشة هذا القياس العام والمفيد جداً بالتفصيل في الفصل السادس.

لا تكون مبدلات (A/D) التقليدية متبوعة بشكل مباشر بترميز الانتروبية. يُستخدم الخيار التقليدي للتحويل التماثلي الرقمي بهدف تشكيل إشارة رقمية ذات معدل عالٍ جداً بحيث يمكن أن تعالج بشكل أفضل عن طريق معالج إشارة رقمية (DSP). تضغط الإشارة الرقمية فيما بعد باستخدام خوارزميات خاصة من أجل تطبيقات معينة (صوت، صورة، الخ...). تبسط الطبقات غير المتداخلة المبينة في الشكل (1.3) بشكل كبير جداً ما يجري عملياً، ويفضل عادة رؤية الضغط بدلالة طبقات الشكل (1.3) ثم استخدام DSP كطريقة لتوظيف الخوارزميات الناتجة. تعطينا العلاقة $H[V] \approx h[u] - \log \Delta$ تفسيراً جيداً للانتروبية التفاضلية وهي توضح أنه يجب أن يكون هناك علاقة مقايضة بين MSE وانتروبية التمثيل، تحدد هذه العلاقة الانتروبية التفاضلية بطريقة مبسطة جداً للمكيمات السلمية المنتظمة ذات المعدل العالي. $H[V]$ هي انتروبية النسخة الأفضل لـ U ، كما يتعلق الحد الإضافي $\log \Delta$ بالارتياح ضمن كل فترة تكميم، وهي تبين بشكل واضح كيف يؤثر مقياس U في العلاقة $h[U]$. يعتبر الملحق A أن المكيمات السلمية غير المنتظمة ضمن فرضية المعدل العالي ويوضح أنه لا يوجد كسب في حدود المعدل العالي عند استخدام المكيمات غير المنتظمة.

8.3 المكيمات ثنائية البعد ذات المعدل العالي

نحل فيما يلي أداء المكيمات المنتظمة ثنائية البعد (2D) ضمن حدود المعدل العالي، كما ويدرس الملحق B حالة المكيمات غير المنتظمة ويبين من جديد أن المكيمات المنتظمة أمثلية ضمن شروط المعدل العالي.

تعمل المكيمات ثنائية البعد 2D بمنبعين للعينات في الوقت نفسه $u = (u_1, u_2)$ وهذا يعني أن أبجدية المنبع هي $U = \mathbb{R}^2$. بفرض وجود منبع للرموز المستقلة الموزعة بشكل متماثل فإن تابع كثافة الاحتمال المشترك هو $f_U(\mathbf{u}) = f_{U_1}(u_1)f_{U_2}(u_2)$ والانتروبية التفاضلية المشتركة $h[U] = 2h[U]$.

يعتمد المكيم ثنائي البعد كما هو عليه الحال في المكيم السلمي المنتظم، على منطقة تكميم منتظمة \mathcal{R} (خلية تكميم)²⁹ التي تغطي (ترصف) المستوي ثنائي البعد. هناك خيار معقول واحد في الحالة أحادية البعد للمنطقة \mathcal{R} تدعى فاصل طول Δ ، ولكن يتوافر للأبعاد الأعلى عدة خيارات مقبولة. إن الخيارات الأهم في حالة مستوي ثنائي البعد هي المربعات والمسدسات، ولكن بتوفر العديد من الخيارات في أبعاد أكثر.

نلاحظ أنه إذا غطت منطقة \mathcal{R} الفراغ \mathbb{R}^2 فإن أي مجال مقيس $a\mathcal{R}$ من \mathcal{R} سوف يرصف أو يغطي أيضاً \mathbb{R}^2 وكذلك أي تدوير أو إزاحة في \mathcal{R} .

لندرس أن أداء مكيم ثنائي البعد ذا خلية أساسية \mathcal{R} يتمحور مركزها عند نقطة المركز 0. يشار إلى مجموعة الخلايا التي يفترض أنها ترصف المنطقة \mathcal{R} وفق $\{R_j; j \in \mathbb{Z}^+\}$ ³⁰ حيث $R_j = \mathbf{a}_j + \mathcal{R}$ هي مركز الخلية R_j . ليكن $A(\mathcal{R}) = \int_{\mathcal{R}} d\mathbf{u}$ هي مساحة الخلية الأساسية، يعطى تابع كثافة الاحتمال الوسطي في الخلية R_j بالعلاقة $P_r(R_j)/A(R_j)$. نعرف كما فعلنا سابقاً $\bar{f}(\mathbf{u})$ على أنه تابع كثافة الاحتمال الوسطي في المنطقة R_j التي تحتوي على \mathbf{u} . تُشكل فرضية المعدل العالي من جديد، أي نفترض أن المنطقة \mathcal{R} صغيرة بشكل كافٍ بحيث يكون $f_U(\mathbf{u}) \approx \bar{f}(\mathbf{u})$ من أجل كافة قيم \mathbf{u} .

تدل الفرضية $f_U(\mathbf{u}) \approx \bar{f}(\mathbf{u})$ على أن تابع كثافة الاحتمال الشرطي هو شرطي على $\mathbf{u} \in R_j$ ويقرب بوساطة العلاقة التالية:

$$(13.3) \quad f_{U|R_j}(\mathbf{u}) \approx \begin{cases} 1/A(\mathcal{R}), & \mathbf{u} \in R_j; \\ 0, & \mathbf{u} \notin R_j \end{cases}$$

يساوي المتوسط الشرطي تقريباً a_j مركز المنطقة R_j ، ويكون المتوسط التريبي للخطأ لكل بعد لخلية التكميم الأساسية \mathcal{R} المتمركز عند 0 مساوياً تقريباً للقيمة:

²⁹ يقال عن مستوي ثنائي الأبعاد بأنه مرصوف (مغطى - مبلط) إذا كانت المنطقة، إضافة إلى الإزاحة والتدوير سوف تغطي المستوي، دون أي تداخل. على سبيل المثال المربعات والمسدسات تغطي المستوي ("تبلط المستوي"). أيضاً، المستطيلات، والمثلثات متساوية الأضلاع مع التدوير ترصف المستوي.

³⁰ يدل \mathbb{Z}^+ على مجموعة من الأعداد الصحيحة الموجبة، لذلك $\{R_j, j \in \mathbb{Z}^+\}$ يدل على مجموعة من المناطق المبلطة (المغطاة بالبلط)، مرقمة بطريقة عشوائية.

$$(14.3) \quad \text{MSE} \approx \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}} \|\mathbf{u}\|^2 \frac{1}{A(\mathcal{R})} d\mathbf{u}$$

الجانب الأيمن من العلاقة (14.3) هو المتوسط التربيعي للخطأ من أجل منطقة التكميم \mathcal{R} باستخدام تابع كثافة احتمال ثابتة القيمة ندل عليها بالرمز MSE_c . تعد الكمية $\|\mathbf{u}\|$ بأنها طويلة الشعاع u_1, u_2 وبالتالي $\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2$ ، لذلك يمكن إعادة كتابة MSE_c وفق العلاقة التالية:

$$(15.3) \quad \text{MSE} \approx \text{MSE}_c = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}} (u_1^2 + u_2^2) \frac{1}{A(\mathcal{R})} du_1 du_2$$

تقاس MSE_c بوحدات طول مربعة بشكل مشابه لـ $A(\mathcal{R})$ وبالتالي تكون النسبة $G(\mathcal{R}) = \text{MSE}_c/A(\mathcal{R})$ كمية بدون أبعاد وتسمى فترة الاستظام الثانية. نستطيع أن نثبت بقليل من الجهد أن $G(\mathcal{R})$ لها قيمة ثابتة للتقييس، والتحويل والتدوير، ولا تعتمد على شكل المنطقة \mathcal{R} وكما سنرى لاحقاً فإن $G(\mathcal{R})$ هي التي تحدد الأداء الجيد لشكل محدد كمنطقة تكميم. بالتعبير عن:

$$\text{MSE}_c = G(\mathcal{R})A(\mathcal{R})$$

فإننا نلاحظ أن MSE هو جداء حد يمثل الشكل وحد يمثل المساحة والتي يمكن اختيارها بشكل مستقل عن بعضها بعضاً.

نبين فيما يلي قيمة $G(\mathcal{R})$ لبعض الأشكال العامة:

- المربع: من أجل مربع Δ فإن $A(\mathcal{R}) = \Delta^2$. بتقسيم العلاقة (15.3) إلى حدين فإننا نجد أن كل واحد منهما متطابقاً مع الحالة السلمية وأن $\text{MSE}_c = \Delta^2/12$ لذلك $G(\text{Square}) = 1/12$.
- السداسي: بما أن الشكل السداسي يتألف من 6 مثلثات متساوية الأضلاع Δ فإن قيمة $A(\mathcal{R}) = 3\sqrt{3}\Delta^2/2$ وأن $\text{MSE}_c = 5\Delta^2/24$ لذلك تكون قيمة G من أجل شكل سداسي $G(\text{hexagon}) = 5/(36\sqrt{3})$.
- الدائرة: من أجل دائرة بنصف قطر r فإن $A(\mathcal{R}) = \pi r^2$ و $\text{MSE}_c = \Delta^2/4$ ، لذلك فإن $G(\text{circle}) = 1/4\pi$.

لا تعد الدائرة منطقة تكميم مقبولة، حيث لا يمكنها تغطية (رصف) المستوي. من جهة أخرى ومن أجل المساحة المعطاة فإن هذا الشكل (أي الدائرة) هو الذي يقلل MSE_c . للتأكد من ذلك نلاحظ أنه من أجل أي شكل آخر فإنه يمكن نقل المساحات التفاضلية البعيدة عن المركز إلى المركز مما يقلل من قيمة MSE_c ؛ وبذلك فإن الدائرة هي الشكل ثنائي البعد 2D الذي يقلل $G(\mathcal{R})$. يفسر هذا أيضاً لماذا يكون $G(\text{Hexagon}) < G(\text{square})$ وذلك لأن الشكل السداسي يتمحور حول المركز أكثر من المربع.

باستخدام تقريب المعدل العالي من أجل أي عملية تغطية محددة، تملك كل خلية تكميم \mathcal{R} نفس الشكل والمساحة وتابع كثافة الاحتمال الشرطي المنتظم تقريباً. وبالتالي تقترب قيمة MSE_c من قيمة MSE من أجل كل منطقة تكميم وذلك من أجل جميع قيم MSE . الاعتبار التالي هو انتروبية خرج المكمم. إن احتمال وقوع U في المنطقة \mathcal{R}_j هو:

$$p_j = \int_{\mathcal{R}_j} f_U(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \quad \text{and, for all } \mathbf{u} \in \mathcal{R}_j, p_j = \bar{f}(\mathbf{u})A(\mathcal{R})$$

خرج المكمم هو رمز عشوائي متقطع V مع تابع كتلة الاحتمال pmf (probability mass function) p_j من أجل كل رمز j . تعطى الانتروبية مما سبق V كما يلي:

$$\begin{aligned} H[V] &= - \sum_j p_j \log p_j \\ &= - \sum_j \int_{\mathcal{R}_j} f_U(\mathbf{u}) \log[\bar{f}(\mathbf{u})A(\mathcal{R})] d\mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int f_U(\mathbf{u}) [\log \bar{f}(\mathbf{u}) + \log A(\mathcal{R})] d\mathbf{u} \\
&\approx - \int f_U(\mathbf{u}) [\log f_U(\mathbf{u}) d\mathbf{u} + \log A(\mathcal{R})] \\
&= 2h[U] - \log A(\mathcal{R})
\end{aligned}$$

حيث أُستخدم تقريب المعدل العالي $f_U(\mathbf{u}) \approx \bar{f}(\mathbf{u})$. نلاحظ أنه بسبب كون $\mathbf{U} = U_1 U_2$ من أجل قيم المتغيرات U_1, U_2 المستقلة والموزعة بشكل متماثل فإن الانتروبية التفاضلية لـ U هي $2h[U]$.

يمكن أن يستخدم منبع ترميز ذو كفاءة مميزة لترميز سلسلة خرج مكتم إلى سلسلة بنات ذات معدل وسطي لكل رمز يساوي:

$$(16.3) \quad \bar{L} \approx \frac{H[V]}{2} \approx h[U] - \frac{1}{2} \log A(\mathcal{R}) \quad \text{bits/symbol}$$

إن قيمة المتوسط التربيعي لخطأ التكميم في المستقبل لإعادة بناء التسلسل الأصلي للإشارة يساوي تقريباً قيمة MSE المعطاة في المعادلة (14.3).

لدينا الاستنتاجات المهمة التالية لمكتم ثنائي البعد منتظم يقع ضمن مقارنة المعدل العالي:

- يعتمد المعدل \bar{L} مع احترام شرط المعدل العالي كلياً على الانتروبية التفاضلية $h[U]$ للمنبع والمساحة $A(\mathcal{R})$ لخلية التكميم الأساسية \mathcal{R} . وهو لا يعتمد على أي من ميزات تابع كثافة احتمال المنبع $f_U(u)$ ، ولا يعتمد أيضاً على شكل منطقة المكتم، أي أنه لا يعتمد على لحظة الاستنظام التالية $G(\mathcal{R})$.
- هناك علاقة مقايضة فيما بين المعدل \bar{L} و MSE المحكوم بالمساحة $A(\mathcal{R})$. إن زيادة معدل البت لكل رمز في العلاقة (14.3) بمقدار واحد يقلل $A(\mathcal{R})$ بمقدار بمعامل قدره 4 وهذا بدوره يقلل قيمة MSE بمقدار 4، أي 6 dB.
- تسمى النسبة $G(\text{square}) / G(\text{Hexagon})$ التي تساوي $3\sqrt{3}/5 = 1.0392$ ربح التكميم للشكل السداسي بالنسبة للشكل المربع. إن المتوسط التربيعي لخطأ المكتم من أجل $A(\mathcal{R})$ و \bar{L} محددتين في حالة الشكل السداسي أقل منها لحالة الشكل المربع بالمقدار 1.0932 (0.17 dB). هذا الربح المخيب للأمل قليل بالمقارنة مع تعقيد كل من المناطق ثنائية البعد والشكل السداسي ويشير إلى أن المكتمات السلمية المنتظمة هي خيارات جيدة عند المعدل العالي.

9.3 خلاصة التكميم

يعد التكميم هاماً من أجل تحويل الإشارات التماثلية إلى سلسلة من النبضات الرقمية إضافة إلى كونها تشكل طبقة متوسطة في رقمنة digitizing منابع الأمواج التماثلية. إن التكميم السلمي المنتظمة هي أبسط وأكثر المقاربات العملية في التكميم. لقد جرى قبل الوصول إلى هذه الخلاصة توظيف مقاربتين للمكتمات السلمية المثالية. هدفت المقاربة الأولى إلى تقليل التشويه المتوقع الخاضع لعدد ثابت M من مناطق التكميم، بينما هدفت المقاربة الثانية إلى تقليل التشويه المتوقع الخاضع لانتروبية ثابتة لخرج المكتم، وقد أتبع كل طريقة بالامتداد نحو التكميم الشعاعي.

كان التركيز في كلتا المقاربتين على تقليل التشويه أو المتوسط التربيعي للخطأ MSE من أجل كل من التكميم الشعاعي والتكميم السلمي وذلك بشكل مرادف لبعض طرائق قياس التشويه الأخرى. إن MSE كما سنرى لاحقاً هو مقياس التشويه الطبيعي عند الانتقال من الأمواج إلى سلاسل من القيم التماثلية. يعد MSE على أية حال غير ملائم لبعض المنابع الخاصة بالصوت، إلا أنه وكقدمة للتكميم، يبدو التركيز على MSE مناسباً في بناء التوقع والمقاربة التي نعتد عليها هي بناء الإدراك من خلال استخدام نماذج بسيطة.

المقاربة الأولى هي تقليل MSE في عدد ثابت من المناطق، مما يقود إلى خوارزمية Lloyd-Max التي تجد قيمة محلية صغرى للخطأ MSE. هذه القيمة المحلية الصغرى لسوء الحظ ليست ذات قيمة صغرى شاملة global بالضرورة كما سنجد في عدة أمثلة لاحقة. تبدو المشكلة في حالة التكميم الشعاعي والناجمة عن خوارزمية Lloyd-Max حالة نموذجية نظراً لكون القيمة الصغرى محلية وليست شاملة.

المقاربة الثانية هي تقليل MSE مع وضع حد على انثروبوية الخرج والتي تعد مشكلة صعبة من الناحية التحليلية. هذه المقاربة هي الأنسب في حل ذي طبقتين حيث يكون المكمم متبوعاً بترميز منقطع. بكلمات أخرى، تعد المقاربة الأولى أكثر مناسبة عندما يترتب استخدام التكميم الشعاعي التي لا يمكن أن تكون متبوعة بترميز منبع منقطع بطول ثابت- متغير fixed-to variable-length.

يؤدي التكميم السلمي ذات المعدل العالي إلى نتيجة أكثر بساطة عند اتباعها بترميز الانثروبوية وذلك عندما نجعل مناطق التكميم صغيرة بشكل كاف بحيث تكون كثافة الاحتمال ثابتة تقريباً ضمن كل منطقة. يقلل المكمم السلمي المنتظم الخطأ MSE عند حدود المعدل العالي من أجل قيد الانثروبوية محدد. يوضح المنحني العام المبين في الشكل (9.3) على نحو أبعد من ذلك، المقايضة بين المتوسط التربيعي للخطأ الأصغر وانثروبوية الخرج، حيث يوصف المنبع بشكل كامل عن طريق الانثروبوية التفاضلية في هذه المقايضة؛ وتحلل تقريبات هذه النتيجة في التمرين (6.3). تقود التكميم الشعاعي ثنائية البعد التي تقع تحت تقريب المعدل العالي مع ترميز الانثروبوية إلى نتيجة مشابهة. إن المقايضة بين MSE لكل رمز والانثروبوية لكل رمز باستخدام منطقة تكميم مربعة لرصف المستوي هي نفسها لحالة التكميم السلمي. يقلل استخدام منطقة تكميم سداسية الشكل لرصف المستوي المتوسط التربيعي للخطأ بمعامل قدره 1.0392، لا يشكل فارقاً كبيراً يدعو لبذل الجهد. من الممكن أن تحقق المكممات ثنائية البعد غير المنتظمة متوسط تربيعي للخطأ أصغر بالمقارنة مع استخدام الأشكال السداسية كمنطقة تكميم لرصف المستوي، إلا أن هذا الريح يبقى محدوداً بربح الشكل الدائري الذي يساوي $\pi/3 = 1.0472$ (0.2 db). يقود استخدام مناطق تكميم غير منتظمة ذات معدل عالٍ إلى حد أصغري للخطأ MSE هو أقل من ذلك المحدد في المكمم السلمي غير المنتظم بمقدار 1.0472 وهو ولو تحقق فإنه لا يستحق العناء. يمكن أن يحقق استخدام المكممات بأبعاد أعلى أرباح أعلى بقليل من المكممات السلمية المنتظمة، إلا أن هذا الريح يبقى محدداً بنتائج معلومة نظرية أساسية هي $\pi e/6 = 1.423$ (1.53 dB).

A3 الملحق A: المكيمات السلمية غير المنتظمة

تزدنا القيمة التقريبية للخطأ MSE في المكيمات السلمية المنتظمة ذات المعدل العالي المبينة في الفقرة (7.3) كما يوضح هذا الملحق بقيمة تقريبية دنيا للخطأ MSE لأي مكيم سلمي غير منتظم، وذلك من خلال استخدام تقريب المعدل العالي الذي يجعل من تابع كثافة الاحتمال U ثابتاً في أي منطقة تكميم. يوضح ذلك أيضاً أنه لا توجد أسباب تدعم خيار المكيمات السلمية غير المنتظمة ضمن منطقة المعدل العالي. بفرض وجود مكيم سلمي اعتباطي ذي قيم عشوائية U وتابع كثافة احتمالية $f_U(u)$ ، وبفرض Δ_j عرض حيز (مجال) التكميم ذي الدليل j th أي أن $\Delta_j = |\mathcal{R}_j|$. ليكن كما جرى سابقاً تابع كثافة الاحتمال الوسطي ضمن كل مجال تكميم $\bar{f}(u)$ ، أي:

$$\bar{f}(u) = \frac{\int_{\mathcal{R}_j} f_U(u) du}{\Delta_j} \quad \text{for } u \in \mathcal{R}_j$$

ينص تقريب المعدل العالي على أن $f_U(u)$ له قيمة ثابتة تقريباً ضمن كل منطقة تكميم، أي $f_U(u) \approx \bar{f}(u)$ من أجل كافة قيم u . وبالتالي إذا كان للمنطقة \mathcal{R}_j عرض Δ_j فإن المتوسط الشرطي a_j $U \in \mathcal{R}_j$ ضمن المنطقة \mathcal{R}_j هو تقريباً نقطة المنتصف للمنطقة، والمتوسط التربيعي للخطأ الشرطي MSE_j حيث $U \in \mathcal{R}_j$ هو تقريباً $\Delta_j^2/12$.

بفرض V خرج المكيم، أي القيم العشوائية المتقطعة بحيث $V = a_j$ عندما $U \in \mathcal{R}_j$. إن احتمال كون $V = a_j$ هو $p_j = \int_{\mathcal{R}_j} f_U(u) du$. يعطى المتوسط التربيعي للخطأ غير الشرطي أي $E = [(U - V)^2]$ بالمعادلة:

$$(17.3) \quad MSE \approx \sum_j p_j \frac{\Delta_j^2}{12} = \sum_j \int_{\mathcal{R}_j} f_U(u) \frac{\Delta_j^2}{12} du$$

يمكن تبسيط ما سبق بتعريف $\Delta(u) = \Delta_j$ من أجل $u \in \mathcal{R}_j$. ونظراً لأن كل u تقع ضمن \mathcal{R}_j من أجل قيمة ما j ، فإننا يمكن أن نعرف $\Delta(u)$ لكافة قيم $u \in \mathbb{R}$ وبالتعويض في العلاقة (17.3) نجد:

$$(18.3) \quad MSE \approx \sum_j \int_{\mathcal{R}_j} f_U(u) \frac{\Delta(u)^2}{12} du$$

$$(19.3) \quad = \int_{-\infty}^{\infty} f_U(u) \frac{\Delta(u)^2}{12} du$$

ندرس تالياً انتروبية V . كما في (8.3)، تستخدم العلاقات التالية من أجل p_j :

$$p_j = \int_{\mathcal{R}_j} f_U(u) du \quad \text{and, for all } u \in \mathcal{R}_j, \quad p_j = \bar{f}(u)\Delta(u)$$

$$(20.3) \quad H[V] = \sum_j -p_j \log p_j$$

$$= \sum_j \int_{\mathcal{R}_j} -f_U(u) \log[\bar{f}(u)\Delta(u)] du$$

$$(21.3) \quad = \int_{-\infty}^{\infty} -f_U(u) \log[\bar{f}(u)\Delta(u)] du$$

حيث جرى جمع التكميلات المتعددة عبر المناطق غير المتصلة في تكامل وحيد. نعوض تقريب المعدل العالي $f_U(u) \approx \bar{f}(u)$ في العلاقة (21.3):

$$H[V] = \int_{-\infty}^{\infty} -f_U(u) \log[f_U(u)\Delta(u)] du$$

$$(22.3) \quad h[U] - \int_{-\infty}^{\infty} f_U(u) \log \Delta(u) du$$

لاحظ ذلك التشابه مع العلاقة (11.3).

الخطوة التالية هي تقليل قيمة المتوسط التربيعي للخطأ الخاضع لقيود الانتروبية $H[V]$ ، حيث يتم ذلك بإنفاص قيمة MSE التقريبية في العلاقة (22.3) الخاضع لـ $H[V]$ في العلاقة (19.3) ودنا التمرين (6.3) برؤيا أكثر تعمقاً في دقة التقريبات وتأثيرها في هذا التقليل. نفترض استخدام ضارب لاغرانج لإنجاز التصغير. نظراً لأن المتوسط التربيعي للخطأ MSE ينخفض عندما يزداد $H[V]$ لنقم بتصغير $MSE + \lambda H[V]$. عند زيادة λ فإن MSE يزداد و $H[V]$ ينقص في الحل القائم على التصغير.

يجب من حيث المبدأ، أن يكون التصغير مقيداً وفق قيمة $\Delta(u)$ المقيدة لتمثل مقاسات المجال لأجل مجموعة قابلة للتحقيق من مناطق التكثير. إن القيمة الصغرى لـ $MSE + \lambda H[V]$ ستكون أقل تقييداً بتجاهل هذا القيد. الشيء الجيد الذي يحصل هنا هو أن القيد على الحدود الدنيا يحدث عندما $\Delta(u)$ يصبح مساوياً لقيمة ثابتة، وهذا يتوافق مع مكتم منتظم قابل للتنفيذ. بكلمات أخرى، وبالتوافق مع تقريب المعدل العالي فإن الحد الأدنى لـ MSE لكافة المكتمات السلمية يكافئ الحد الأدنى للخطأ في المكتم السلمي المنتظم. لتوضيح ذلك نستخدم العلاقتين (22.3) و (19.3):

$$MSE + \lambda H[V] \approx \int_{-\infty}^{\infty} f_U(u) \frac{\Delta(u)^2}{12} du + \lambda h[U] - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f_U(u) \log \Delta(u) du$$

$$(23.3) \quad = \lambda h[U] + \int_{-\infty}^{\infty} f_U(u) \left\{ \frac{\Delta(u)^2}{12} - \lambda \log \Delta(u) \right\} du$$

جرى التصغير من أجل كافة حالات $\Delta(u) > 0$ ببساطة عن طريق تخفيض الحد داخل الأقواس الكبيرة من أجل كل قيمة حقيقية للمتحول u . أي باشتقاق القيمة داخل الأقواس بالنسبة لـ $\Delta(u)$ وذلك لكل قيمة u ، حيث نحصل على $\Delta(u)/6 - \lambda(\log e)/\Delta(u)$. بجعل المشتق مساوياً للصفر فإننا نجد العلاقة $\Delta(u) = \sqrt{\lambda(\log e)/6}$. وبأخذ المشتق الثاني نجد أن الحل يقلل التكامل من أجل كل u . الشيء الوحيد الهام هنا هو أن تقليل $\Delta(u)$ مستقل عن u وهذا يعني أن تقليل MSE يقض على قيد تقريب $H[V]$ باستخدام مكتم منتظم. السؤال التالي هو عن معنى تخفيض تقريب بالنسبة إلى قيمة ما هي نفسها تقريب يخضع لقيد. يتضح من التمرين (6.3) أن كلا التقريبين لـ MSE و $H[V]$ هي تقريبات جيدة من أجل Δ ذات قيمة صغيرة، أي من أجل معدل عالٍ. من أجل أي مكتم غير منتظم ذي معدل عالٍ، لنقم بوضع رسم بياني لكل من MSE و $H[V]$ كما في الشكل (9.3). القيم التقريبية المقابلة لـ MSE و $H[V]$ قريبة من القيم المبينة في المخطط (مع اختلاف بسيط لكلا الإحداثيين الشاقولي والأفقي). تقع هذه القيم التقريبية المخططة فوق القيم التقريبية للمكتم السلمي المبينة نتائجه في الشكل (9.3). يقع منحنى أداء MSE بالنسبة إلى المحور $H[V]$ من أجل التقريب إلى المكتم السلمي، إما تحت أو قريب من نقاط أي مكتم غير منتظم.

بيننا كتلخيص لما سبق، أنه من أجل قيمة $H[V]$ كبيرة (أي تكثير ذي معدل عالٍ)، يقلل المكتم السلمي المنتظم بشكل تقريبي MSE فضلاً عن كونه عرضة لقيود الانتروبية. هناك أسباب قليلة لاستخدام المكتمات السلمية غير المنتظمة (عدا حالة المعدل المنخفض)، علاوة على ذلك فإن أداء المتوسط التربيعي للخطأ MSE في المعدل العالي يمكن أن يُقرب بسهولة كما يعتمد فقط على قيود $H[V]$.

B3 الملحق B: المكمم غير المنتظم ثنائي البعد

للإتمام، نحلل فيما يلي أداء المكممات غير المنتظمة ثنائية البعد، وهذا التحليل قريب جداً من المكممات السلمية غير المنتظمة، مع الأخذ بالاعتبار المجموعة الاعتبائية لفترات التكسيم $\{\mathcal{R}_j\}$. بفرض أن $A(\mathcal{R}_j)$ و MSE_j هما المساحة والمتوسط التربيعي للخطأ لكل بعد على التوالي لـ \mathcal{R}_j فنجد:

$$A(\mathcal{R}_j) = \int_{\mathcal{R}_j} d\mathbf{u}; \quad MSE_j = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}_j} \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{a}_j\|^2}{A(\mathcal{R}_j)} d\mathbf{u}$$

حيث \mathcal{R}_j هو متوسط \mathcal{R}_j . ليكن $\bar{f}(\mathbf{u}) = P_r(\mathcal{R}_j)/A(\mathcal{R}_j)$ من أجل كل منطقة \mathcal{R}_j وكل $\mathbf{u} \in \mathcal{R}_j$ ، هو تابع كثافة الاحتمال الوسطي في \mathcal{R}_j ، عندها:

$$p_j = \int_{\mathcal{R}_j} f_U(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \bar{f}(\mathbf{u})A(\mathcal{R}_j)$$

والقيمة غير الشرطية للمتوسط التربيعي للخطأ هي:

$$MSE = \sum_j p_j MSE_j$$

وبفرض $A(\mathbf{u}) = A(\mathcal{R}_j)$ و $MSE(\mathbf{u}) = MSE_j$ ، عندئذ:

$$(24.3) \quad MSE = \int f_U(\mathbf{u}) MSE(\mathbf{u}) d\mathbf{u}$$

وبشكل مشابه نجد:

$$H[V] = \sum_j -p_j \log p_j$$

$$= \int -f_U(\mathbf{u}) \log[\bar{f}(\mathbf{u})A(\mathbf{u})] d\mathbf{u}$$

$$(25.3) \quad \approx \int -f_U(\mathbf{u}) \log[f(\mathbf{u})A(\mathbf{u})] d\mathbf{u}$$

$$(26.3) \quad = 2h[U] - \int f_U(\mathbf{u}) \log[A(\mathbf{u})] d\mathbf{u}$$

يمكن استخدام جداء لاغرانج مرة أخرى للحل في مناطق التكسيم الأمثل وفق تقريب المعدل العالي. نجد بشكل خاص من العلاقتين (24.3) و (26.3) أن:

$$(27.3) \quad MSE + \lambda H[V] \approx \lambda 2h[U] + \int_{\mathbb{R}^2} f_U(\mathbf{u}) \{MSE(\mathbf{u}) - \lambda \log A(\mathbf{u})\} d\mathbf{u}$$

بما أن كل منطقة تكسيم يمكن أن تكون مختلفة فإن مناطق التكسيم لا تحتاج إلى أشكال هندسية التي ترصف إزاحتها المستوي. كما أشير إليه سابقاً، الشكل الذي يقلل الخطأ MSE_c لمنطقة تكسيم محددة هو الدائرة، وبالتالي يمكن أن تكون MSE أقل تحديداً في ضارب لاغرانج باستخدام هذا الشكل. باستبدال $MSE(\mathbf{u})$ بالقيمة $A(\mathbf{u})/(4\pi)$ في العلاقة (27.3) نحصل على:

$$(28.3) \quad MSE + \lambda H[V] \approx \lambda 2h[U] + \int_{\mathbb{R}^2} f_U(\mathbf{u}) \left\{ \frac{A(\mathbf{u})}{4\pi} - \lambda \log A(\mathbf{u}) \right\} d\mathbf{u}$$

القيمة الأمثلية من أجل كل u بشكل منفصل هي $A(u) = 4\pi\lambda \log e$. تتحقق الأمثلية عند استخدام مقياس الدائرة نفسه لكل نقطة u (بشكل مستقل عن كثافة الاحتمال). إن هذا غير قابل للتحقيق، لكنه يزودنا بالحد الأدنى لـ MSE من أجل انتروبية معطاة $H[V]$ في منطقة المعدل العالي. إن التخفيض في MSE في منطقة مربعة هو $\pi/3 = 1.0472$ (0.2 dB). يظهر هذا أنه في المكتم المنتظم مع شكل سداسي هو أمثلي، لكن قيمة $\pi/3$ تزودنا بحد بسيط ممكن لربح مكتم ثنائي البعد؛ إلا أنه وفي كلتا الحالتين يبقى التحسن عن طريق توظيف بعدين قليلاً. يمكن أن يطبق النوع نفسه من التحليل من أجل مكتم ذي n بعد، حيث نستخدم كرة ذات n بعد عوضاً عن استخدام دائرة واحدة. بازدياد قيمة n ، فإن الحد الأدنى للخطأ MSE يقترب من ربح قدره $\pi e/6 = 1.4233$ (1.53 dB) من أجل المكتم السلمي. يعدّ أمراً معروفاً من نتيجة أساسية في نظرية المعلومات أنه يمكن الاقتراب من هذا الربح بشكل اعتباطي عندما $n \rightarrow \infty$.

4. أشكال موجات المنبع والقناة

1.4 مقدمة

ثمة هدف مزدوج لهذا الفصل، الأول أن نفهم ضغط البيانات التماثلية، أي ضغط منابع من قبيل الصوت خرجها عبارة عن تابع زمني قيمته عقدية أو حقيقية تتغير اعتباطياً؛ نشير إلى هذه التوابع على أنها *أشكال موجة* (إشارات). الثاني أن نبدأ بدراسة أشكال الموجات التي تُرسل بشكل نمطي عند دخل قنوات الاتصال وتُستقبل عند خرجها. نحتاج إلى نفس المجموعة من الأدوات الرياضية من أجل فهم وتمثيل كل من إشارات المنبع والقناة، إن تطوير هذه النتائج هو الموضوع الأساسي في هذا الفصل.

تعتبر هذه النتائج عن أشكال الموجة مواضيع معيارية في المناهج الرياضية في التحليل، والمتغيرات الحقيقية والعقدية، والتحليل الوظيفي والجبر الخطي. وقد تمّ ذكرها هنا دون الدقة أو التعميم الموجودين في كتاب رياضي جيد، ولكن بدقة وتفسير أكثر مما هو موجود في معظم الكتب الهندسية.

1.1.4 المنابع التماثلية

يمكن تمثيل خرج العديد من المنابع التماثلية (الصوت كمثال نموذجي) كشكل موجي $u(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ أو $u(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. نهتم غالباً، كما في حالة الصوت، فقط بأشكال الموجة الحقيقية. لكن التعميم البسيط لأشكال موجة عقدية ضروري من أجل تحويل فورييه ونمذجة الحزمة القاعدية لقنوات الاتصال. حيث يمكن النظر إلى تابع ذي قيمة حقيقي بوصفه حالة خاصة من تابع ذي قيمة عقدية، كما أن نتائج التوابع العقدية مفيدة أيضاً للتوابع الحقيقية.

لاحظنا سابقاً أنه يمكن النظر إلى المنابع التماثلية الأكثر تعقيداً مثل الفيديو بوصفها مُقابلة من \mathbb{R} إلى \mathbb{R} ، أي مثل الانتقال من الوضع الأفقي/العمودي والزمني إلى القيم التماثلية الحقيقية، ولكننا للتبسيط سندرس هنا منابع الإشارة فقط.

لنتذكر لماذا من المرغوب تحويل المنابع التماثلية إلى بتات:

- استخدام واجهة تخاطب معيارية إثنائية تفصل مشكلة ضغط منابع عن مشكلات تعديل وترميز القناة.
- يمكن بسهولة تجميع مخرجات المنابع المتعددة مع بعض. يمكن للمجمعات أن تعمل بمُشابكة البتات، أو ببيانات مؤلفة من 8 بتات، أو برزم أطول من منابع مختلفة.
- عندما ينتقل تتابع بتات تسلسلياً عبر روابط متعددة (كما في شبكة)، يمكن تنقية سلسلة البتات الضجيجية (إعادة توليدها) عند كل عقدة وسيطة، بينما يتراكم الضجيج تدريجياً في الإرسال التماثلي الضجيجي.

إن الطريقة الشائعة لترميز شكل موجة إلى تتابع بتات هي كما يلي:

1. قَرَب الإشارة التماثلية $\{u(t); t \in \mathbb{R}\}$ باستخدام عيناتها³¹ $\{u(mT); m \in \mathbb{Z}\}$ عند أزمنة عينة متباعدة بانتظام، $\dots, -T, 0, T, 2T, \dots$

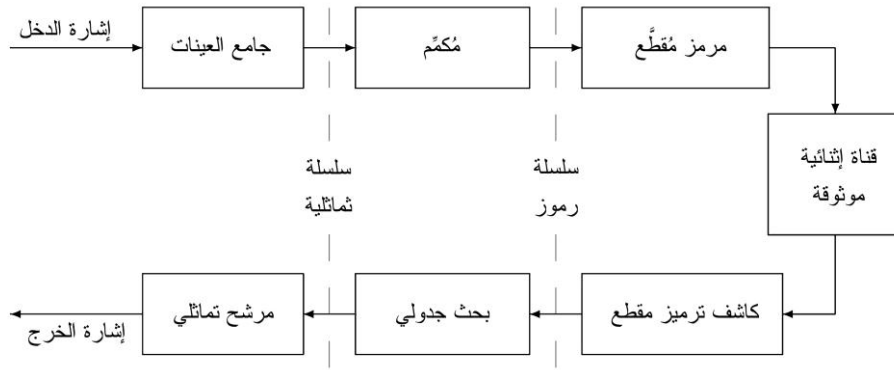
2. كَمَم كل عينة (أو n صف من العينات) إلى منطقة تكميم.

3. رَمَز كل منطقة تكميم (أو لُبنة من المناطق) إلى شريط من البتات.

يوضح الشكل (1.4) هذه الطبقات الثلاث من الترميز، مع الطبقات الثلاث المقابلة لها من فك الترميز.

³¹ يشير التعريف $\{u(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ إلى تابع يُمثل كل عدد حقيقي $t \in \mathbb{R}$ بعدد حقيقي آخر $u(t) \in \mathbb{R}$. وبطريقة مشابهة، يُمثل التابع $\{u(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$ كل رقم حقيقي $t \in \mathbb{R}$ بعدد عقدي $u(t) \in \mathbb{C}$. يُنظر إلى هذه التوابع الزمنية، أي أشكال الموجة، على أنها بدون أبعاد، مما يسمح لنا فصل المعاملات الفيزيائية في مسائل الاتصالات عن شكل الإشارات.

³² تمثل \mathbb{Z} مجموعة الأعداد الصحيحة $-\infty < m < \infty$ بحيث يمثل $\{u(mT); m \in \mathbb{Z}\}$ التسلسل اللانهائي المضاعف للعينات بفرض $-\infty < m < \infty$



الشكل 1.4: ترميز وفك ترميز الشكل الموجي للمنبع.

مثال 1.1.4. في النظام الهاتفي القياسي، يتم ترشيح الصوت إلى 4000 Hz (4 kHz) ثم تؤخذ عينات بمعدل 8000 عينة في الثانية³³. تُكَمَّم كل عينة بعدها إلى واحد من 256 مستوى مُحْتَمَل، ممثلة بـ 8 بتات. وبالتالي تمثل الإشارة الصوتية بنتابع 64 kb/s. (تستخدم الأنظمة اللاسلكية الرقمية الحديثة أنظمة ترميز صوت أكثر تطوراً، تقلل من معدل نقل البيانات إلى نحو 8 kb/s مع فقدان قليل من جودة الصوت). يمكن تعميم عملية أخذ العينات الأنفة بعدة طرائق مختلفة لتحويل الإشارات إلى تتابع من أرقام حقيقية أو عقدية. على سبيل المثال، تُجزئ تقنيات ضغط الصوت الحديثة الإشارة الصوتية أولاً إلى مُقطّعات مدة كل منها 20 msec. ثم تستخدم البنية الترددية لكل مُقطّع لتوليد شعاع من أرقام. يمكن بعدها تكميم الشعاع الناتج وترميزه كما تمّت مناقشته من قبل.

ينبغي النظر إلى الإشارة الإفرادية من منبع تماثلي بوصفها إشارة عيّنة من عملية عشوائية. تُحدّد البنية الاحتمالية الناتجة لإشارات العينة هذه توزع الاحتمال على السلاسل الممثلة لإشارات العينة هذه. ستجري دراسة هذا التوصيف العشوائي في الفصل السابع؛ أما الآن فسنركز على طرائق تمثيل إشارات مُحدّدة بسلاسل وبالعكس.

2.1.4 قنوات الاتصال

نورد فيما يلي بعض الأمثلة على قنوات الاتصال: زوج من الهوائيات يفصل بينها فضاء مفتوح؛ وليزر ومستقبل بصري يفصل بينهما ليف بصري؛ ومرسل ومستقبل للأمواج الميكروية يفصل بينها دليل الموجة. إذا أخذنا مثال الهوائي، يتم تحويل الأمواج الحقيقية على المدخل في مجال الترددات المناسب باستخدام هوائي الدخل إلى أشعة كهرومغناطيسية، يُستقبل جزء منها عند هوائي الاستقبال ويُحوّل إلى شكل موجة. ولأهداف عديدة، يمكن النظر إلى هذه القنوات الفيزيائية على أنها صناديق سوداء، حيث يمكن وصف إشارة الخرج كتابع لإشارة الدخل وضجيج بأنواع مختلفة.

إن النظر إلى هذه القنوات بوصفها صناديق سوداء هو مثال آخر على الوضع في طبقات. يمكن اعتبار الأجهزة البصرية أو الأجهزة الميكروية أو الهوائيات طبقة داخلية حول القناة الفيزيائية الفعلية. سيتمّ اعتماد طريقة العرض الطبقيّة هنا في أغلب الأحيان، لأن فيزياء الهوائيات، والبصريّات، والأمواج الميكروية قابلة للفصل بشكل كبير عن مواضيع الاتصالات الرقمية المطوّرة هنا. إن أحد الاستثناءات هو وصف القنوات الفيزيائية للاتصالات اللاسلكية في الفصل التاسع. وكما سنرى، فإن وصف القنوات اللاسلكية على أنها صندوق أسود يتطلب بعض الفهم للظواهر الفيزيائية الرئيسية.

إن وظيفة مُرَمِّز القناة، أي المُعَدِّل، هي أن يحوّل التتابع الوارد من الأرقام الإثنائية إلى شكل موجة بطريقة يمكن تحويل الإشارات المُخَرَّبَة بالضجيج في المستقبل، باحتمالٍ عالٍ، إلى الأرقام الإثنائية الأصلية. ويتمّ ذلك عادةً أولاً بتحويل التسلسل الإثنائي إلى سلسلة من الإشارات التماثلية، والتي يتم تحويلها فيما بعد إلى شكل موجة. هذا التسلسل - من تسلسل بتات إلى تسلسل تماثلي إلى شكل موجة - هو نفس التسلسل الذي يؤديه مفكك ترميز المنبع، وعكس ما يقوم به مرزم المنبع. إن الطريقة التي ينبغي أن يتمّ إنجاز هذه الوظائف من خلالها، مختلفة للغاية في حالات المنبع والقناة، لكنها جميعاً تتضمن تحويلاً بين أشكال الموجة والتسلسل التماثلي.

³³ نقول نظرية أخذ العينات (الاعتيان) والتي سنناقشها في الفقرة 6.4، إنه إذا كانت الإشارة محدودة قاعدياً بـ W Hz، عندها يمكن تمثيلها بعدد عينات 2W في الثانية. إن تردد أعلى نغمة في البيانو يقارب 4 KHz، والذي هو أعلى كثيراً من معظم الترددات الصوتية.

يجب النظر إلى الإشارات المرغوبة للإرسال والاستقبال عبر القناة بوصفها إشارات عينة لعمليات عشوائية (بنفس الطريقة التي يجب أن ينظر بها إلى إشارات المنبع كإشارات عينة من عملية عشوائية). يهتم هذا الفصل فقط بالعلاقة بين إشارات محددة و سلاسل تماثلية؛ وسيتم تأجيل النتائج الضرورية عن العمليات العشوائية إلى الفصل السابع. إن السبب في وجود كثير من الدقة الرياضية هنا، هو أن هذه الإشارات غير معروفة مسبقاً. بكلمات أخرى، لا يستطيع أحد أن يستخدم المقاربات الهندسية التقليدية لإجراء بعض الحسابات على تابع ويفترض أنها صحيحة إذا ظهر جواب³⁴.

2.4 سلاسل فورييه

إن أبسط مثال لتتابع تماثلي يمكن أن يمثل شكل موجة، ربما يأتي من سلسلة فورييه. إن سلسلة فورييه مفيدة أيضاً في فهم تحويلات فورييه وتحويلات فورييه للإشارة المقطعة زمنياً (DTFTs). وكما سيتم شرحه لاحقاً، ستقتصر دراستنا لهذه المواضيع على الإشارات المحدود الطاقة. تقع النماذج المفيدة لإشارات المنبع والقناة، على الأغلب، في صف محدود الطاقة. تُمثل سلسلة فورييه إشارة، سواءً كانت دورية أم متناهية زمنياً، بوصفها مجموع مُثَلَّ لإشارات جيبية. يتم تحديد كل وزن (معامل) في المجموع بواسطة التابع، ويحدد التابع على نحو رئيس بتسلسل الأوزان. وبالتالي فإن التابع وتسلسل الأوزان هي أساساً تمثيلات متكافئة. يقتصر اهتمامنا هنا حصرياً على الإشارات المحدودة زمنياً بدلاً من الإشارات الدورية³⁵. يُفترض في البداية أن تكون الإشارات محدودة زمنياً لفاصل ما $-T/2 \leq t \leq T/2$ من فترة اعتباطية $T > 0$ قريبة من 0. يُعمم ذلك فيما بعد إلى إشارات محدودة زمنياً مُتمركزة عند زمن اعتباطي. وأخيراً، تُفَعَّع الأشكال الموجية الاعتباطية إلى مُقتطعات متساوية الطول مدة كل منها T ؛ بعد ذلك يُمثل كل مُقتطع بسلسلة فورييه. وهذا يرتبط ارتباطاً وثيقاً بتقنيات ضغط الصوت الحديثة حيث يتم تقطيع الإشارات الصوتية إلى فترات مدة كل منها 20 msec، توَسَّع كل واحدة منها على نحو منفصل إلى ما يشبه سلسلة فورييه.

بفرض تابع عقدي $\{u(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$ لا يساوي الصفر فقط في المجال $-T/2 \leq t \leq T/2$ (أي $u(t) = 0$ من أجل $t < -T/2$ و $t > T/2$). يشار إلى هذا التابع في كثير من الأحيان من الأحيان $\{u(t) : [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{C}\}$. تعطى سلسلة فورييه لمثل هكذا تابع محدود زمنياً بالعلاقة³⁶

$$(1.4) \quad u(t) = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_k e^{\frac{2\pi i k t}{T}} & \text{for } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{elsewhere,} \end{cases}$$

حيث يُمثل الرمز i القيمة $\sqrt{-1}$. تكون مُعاملات سلسلة فورييه \hat{u}_k عقديّة في العموم (حتى وإن كانت $u(t)$ حقيقة)، وهي تُعطى بالعلاقة

$$(2.4) \quad \hat{u}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-2\pi i k t / T} dt, \quad -\infty < k < \infty$$

يمكن استخدام التابع المستطيل المعياري

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } -1/2 \leq t \leq 1/2 \\ 0 & \text{elsewhere,} \end{cases}$$

لتبسيط العلاقة (1.4) على النحو التالي:

³⁴ هذا ليس للتقليل من استخدام التقنيات الحسابية (اليدوية أو الحاسوبية) للحصول على جواب سريع دون الاكترات بالنقاط الدقيقة. تُزوّد مثل هذه التقنيات عادة رؤية وفهماً، إذ يمكن معالجة النقاط الدقيقة لاحقاً. أما في العمليات العشوائية، فلا يعرف أحد مسبقاً أي نواع العينة يمكن أن يُزوّد رؤية حسابية.

³⁵ لا تكون الإشارات الدورية مثيرة للاهتمام من حيث حمل المعلومات؛ إذ بعد مشاهدة الدورة الأولى، فإن بقية الإشارة لا تحمل شيئاً جديداً.

³⁶ سنناقش الحالات التي تتحقق فيها العلاقة (1.4) لاحقاً.

³⁷ إن استخدام i بدلاً من $\sqrt{-1}$ قياسي في كافة المجالات العلمية فيما عدا الهندسة الكهربائية. فالمهندسون الكهربائيون حجزوا الرمز i للدلالة على التيار الكهربائي وبالتالي فهم يستخدمون الرمز z للدلالة على $\sqrt{-1}$.

$$(3.4) \quad u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_k e^{2\pi i k t / T} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

وهذا يعبر عن $u(t)$ كمجموعة خطية من الإشارات الجيبية العقدية المقطعة:

$$(4.4) \quad u(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k \theta_k(t) \quad \text{where } \theta_k(t) = e^{2\pi i k t / T} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

بفرض أن العلاقة (4.4) محققة من أجل مجموعة من المعاملات $\{\hat{u}_k; k \in \mathbb{Z}\}$ ، فإن المناقشة البسيطة التالية ستُظهر سبب تحقيق تلك المجموعة من المعاملات للعلاقة (2.4). يقال بأن الإشارتين العقديتين $\theta_k(t)$ و $\theta_m(t)$ متعامدتان إذا تحققت العلاقة: $\int_{-\infty}^{\infty} \theta_k(t) \theta_m^*(t) dt = 0$. إن الإشارات الجيبية العقدية المقطعة في العلاقة (4.4) متعامدة حيث تحتوي الفترة الزمنية $[-T/2, T/2]$ على عدد صحيح من الدورات لكل منها، أي من أجل $k \neq m \in \mathbb{Z}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta_k(t) \theta_m^*(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{2\pi i (k-m)t / T} dt = 0$$

وبالتالي يمكن اعتبار الجانب الأيمن من (2.4) كما يلي:

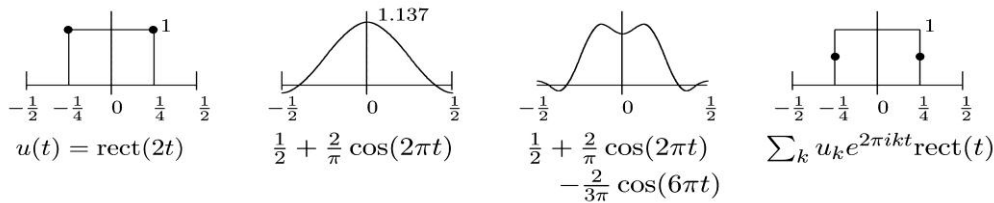
$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-2\pi i k t / T} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_m \theta_m(t) \theta_k^*(t) dt$$

$$= \frac{\hat{u}_k}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |\theta_k(t)|^2 dt$$

$$(5.4) \quad = \frac{\hat{u}_k}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt = \hat{u}_k$$

يدعى المنشور الذي من قبيل الوارد في (4.4) بالمنشور المتعامد. وكما سنبين لاحقاً، يمكن استخدام البرهان الوارد في (5.4) لإيجاد المعاملات في أي منشور متعامد. عند تلك النقطة، يجب الانتباه في تبديل الترتيب في التكامل والجمع الأنفين.

مثال 1.2.4. يوضح هذا المثال والمثال الذي يليه لماذا ليس من الضروري أن تكون (4.4) صحيحة لجميع قيم t . ليكن $u(t) = \text{rect}(2t)$ (انظر الشكل 2.4). افترض تمثيل $u(t)$ بسلسلة فورييه خلال الفترة $-1/2 \leq t \leq 1/2$. كما هو موضَّح، يمكن للسلسلة أن تُقارب إلى $u(t)$ عند كل قيم $t \in [-1/2, 1/2]$ باستثناء الانقطاعات عند $t = \pm 1/4$. تقترب السلسلة عند القيمة $t = \pm 1/4$ من نقطة وسط الانقطاع ولا تعود (4.4) صالحة³⁸ عند $t = \pm 1/4$. ستوضَّح الفقرة التالية كيف نعبر بدقة عن (4.4) لتجنب قضايا التقارب هذه.

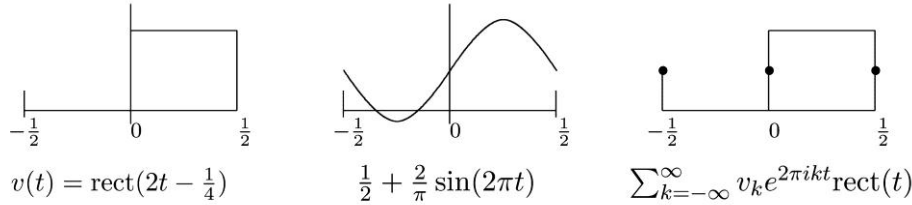


الشكل 2.4: سلسلة فورييه (ضمن المجال $[-1/2, 1/2]$) لنبضة مستطيلة. يصوِّر الشكل الثاني مجموعاً جزئياً باعتبار $k = -1, 0, 1$ ويصوِّر الشكل الثالث مجموعاً جزئياً من أجل $-3 \leq k \leq 3$. يوضح الشكل الأيمن أن السلسلة تتقارب إلى $u(t)$ إلا عند النقاط $t = \mp 1/4$ ، حيث تتقارب إلى $1/2$.

³⁸ يقول معظم المهندسين بما فيه أنا [المؤلف] "ثم ماذا، ومن يهتم إلى أي النقاط تتقارب سلسلة فورييه عند انقطاع شكل الموجة". لسوء الطالع فإن هذا المثال هو قمة جبل الثلج، وعلى وجه الخصوص عند دراسة استيعاب الإشارات زمنياً وإشارات العينة للعمليات العشوائية.

مثال 2.2.4. وعلى نحو مغاير للمثال السابق، لنكن $v(t)$ تساوي 1 من أجل $0 \leq t \leq 1/2$ و 0 فيما عدا ذلك. يُظهر الشكل 3.4 سلسلة فورييه المقابلة خلال الفترة $-1/2 \leq t \leq 1/2$.

ثمة سمة غريبة في هذا المثال هو الانقطاع المنعزل عند $t = -1/2$ حيث تتقارب السلسلة إلى $1/2$. يحدث هذا لأن سلسلة فورييه غير المبتورة $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{v}_k e^{2\pi ikt}$ دورية دورها 1 وبالتالي يجب أن يكون لها نفس القيمة عند $t = -1/2$ و $t = 1/2$. وبشكل عام إذا كان ثمة تابع اعتباطي $\{v(t): [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{C}\}$ فيه $v(-T/2) \neq v(T/2)$ ، فإن سلسلة فورييه خلال تلك الفترة لا يمكن أن تتقارب إلى $v(t)$ عند كلا النقطتين.



الشكل 3.4: تتزاح سلسلة فورييه خلال الفترة $[-1/2, 1/2]$ لنفس النضضة المستطيلة يمينا بمقدار $1/4$. بصور الشكل الأوسط مرة أخرى التوسع الجزئي مع $k = -1, 0, 1$. يُبين الشكل الأيمن أن السلسلة تتقارب إلى $v(t)$ باستثناء النقاط $t = -1/2, 0, 1/2$ والتي تتقارب عند كل منها إلى $1/2$.

1.2.4 الإشارات المحدودة الطاقة

يتم تعريف الطاقة للإشارة $u(t)$ الحقيقية أو العقدية³⁹ بأنها $\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt$. تلعب الطاقة في إشارات المنبع دوراً رئيسياً في تحديد جودة ضغط الإشارات من أجل مستوى معين من التشويه. وكشرح أولي، لنفرض الطاقة في إشارة محدود الزمن $\{u(t): [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{R}\}$ ، تتعلق هذه الطاقة بمعاملات سلسلة فورييه لـ $u(t)$ من خلال معادلة الطاقة التالية التي اشتُقت في التمرين 2.4 بنفس البرهان المستخدم في (5.4):

$$(6.4) \quad \int_{t=-T/2}^{T/2} |u(t)|^2 dt = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{u}_k|^2$$

لنفترض أنه تم ضغط $u(t)$ عن طريق أو لا توليد معاملات سلسلة فورييه لها $\{\hat{u}_k; k \in \mathbb{Z}\}$ ومن ثم ضغط هذه المعاملات. ليكن $\{\hat{u}_k; k \in \mathbb{Z}\}$ هو سلسلة المعاملات المضغوطة هذه. وباستخدام قياس تشويه مربع للمعاملات، يكون التشويه الكلي هو $\sum_k |\hat{u}_k - \hat{v}_k|^2$. لنفترض الآن أنه تم ترميز هذه المعاملات المضغوطة، وإرسالها عبر قناة، ثم تم فك ترميزها على نحو موثوق، ومن ثم أعيد تحويلها إلى إشارة $v(t) = \sum_k \hat{v}_k e^{2\pi ikt/T}$ كما في الشكل (1.4). إن الفرق بين شكل موجة الدخل $u(t)$ والخرج $v(t)$ هو $u(t) - v(t)$ ، الذي له سلسلة فورييه $\sum_k (\hat{u}_k - \hat{v}_k) e^{2\pi ikt/T}$. إن استبدال $u(t) - v(t)$ في العلاقة (6.4) يعطي معادلة طاقة الفرق:

$$(7.4) \quad \int_{t=-T/2}^{T/2} |u(t) - v(t)|^2 dt = T \sum_k |\hat{u}_k - \hat{v}_k|^2$$

وهكذا فإن الطاقة في الفرق بين $u(t)$ وإعادة تركيبها $v(t)$ هي ببساطة T مرة مجموع مربع الاختلافات للمعاملات المُكمّمة. وهذا يعني أن تقلب مربع الفارق في عملية تكميم المعاملات يؤدي بشكل مباشر إلى تقليل الطاقة في فرق الإشارة. تعتبر الطاقة في فرق الإشارة مقياساً شائعاً ومنطقياً للتشويه، ولكن حقيقة كونها ترتبط على نحو مباشر مع متوسط مربع معامل التشويه تُزود مبرراً إضافياً مهماً لاستخدامها على نطاق واسع.

³⁹ لاحظ أن $u^2 = |u|^2$ إذا كانت u حقيقية، ولكن من أجل u عقدية، فإن u^2 يمكن أن تكون سالبة أو عقدية، ونحتاج إلى $[Re(u)]^2 + [Im(u)]^2 = uu^* = |u|^2$ لتوافق الفكرة البديهية للطاقة.

يجب أن يكون هناك على الأقل T وحدة تأخير مُتضمنة في العثور على معاملات فورييه $u(t)$ خلال الفترة $[-T/2, T/2]$ ، ومن ثم إعادة تشكيل $v(t)$ من المعاملات المكممة في المستقبل. وثمة تأخير انتشار ومعالجة إضافي في القناة. وبالتالي يجب أن تكون إشارة الخرج تقريباً مؤخراً للدخل. يُعوض كل هذا التأخير بعمليات استعادة التزامن في المستقبل. ويتم تحديد تأخير التوقيت هذا بحيث تكون $v(t)$ ، وفقاً لتوقيت المستقبل، التقريب المناسب لـ $u(t)$ في المرسل، بحسب توقيت المرسل. تعتبر استعادة التوقيت والتأخير قضايا مهمة، ولكنها منفصلة إلى حد كبير عن المشكلات التي تهمنا حالياً. وهكذا وبعد إدراك أن توقيت المستقبل مؤخر عن توقيت المرسل، يمكن تجاهل التأخير في الوقت الراهن.

تخيّل بعد ذلك معاملات فورييه \hat{u}_k على أنها قيم عينة لمتغيرات عشوائية مستقلة وتخيّل أن $u(t)$ المعطاة في (3.4) على أنها قيمة عينة من العملية العشوائية المقابلة (سيتم شرح ذلك بدقة في الفصل 7). تساوي الطاقة المتوقعة في هذه العملية العشوائية T مرة مجموع قيم متوسط مربع المعاملات. وبالمثل، فإن الطاقة المتوقعة في الفرق بين $u(t)$ و $v(t)$ تساوي T ضعف مجموع تشوهات متوسط مربع المعاملات. رأينا في الفصل الثالث، بعملية تقييس، بأن خطأ تكميم المتوسط التريبيعي لمتغير عشوائي تماثلي يتناسب مع تباين ذلك المتغير العشوائي. ومن ثم، فليس مستغرباً أن يكون للطاقة المتوقعة في شكل موجة عشوائية علاقة مماثلة مع التشوه المتوسط التريبيعي بعد الضغط.

ثمة مشكلة عملية واضحة في ضغط إشارة متناهية الاستمرارية عن طريق تكميم مجموعة غير منتهية من المعاملات. أحد الحلول الواضحة: اضغط فقط تلك المعاملات ذات القيمة المتوسطة التريبيعية الهامة. حيث القيمة المتوقعة لـ $\sum_k |\hat{u}(t)|^2$ متناهية لتتابع متناهية الطاقة، يمكن، بتجاهل المعاملات الصغيرة، جعل التشويه المتوسط التريبيعي صغيراً بالقدر المرغوب وذلك باختيار مجموعة كبيرة متناهية من المعاملات. يتم بعدها بسهولة اختيار $\hat{v}_k = 0$ في العلاقة (7.4) لكل قيمة تم تجاهلها من k .

سيتم تطوير البرهان السابق بعناية بعد تطوير الأدوات اللازمة. ثمة نوعان من الأفكار المهمة في الوقت الراهن. أولاً، تُعتبر الطاقة في إشارة منبع عاملاً مهماً في ضغط البيانات، وثانياً، سيكون لإشارات المنبع المرغوبة طاقة متناهية يمكن ضغطها عن طريق ضغط عدد مُنتاهي من المعاملات.

لندرس بعد ذلك الإشارات المستخدمة للإرسال على القناة. إن الطاقة المستخدمة خلال أي فترة زمنية منتهية T مُحددة من قبل كل من الوكالات التنظيمية والقيود الفيزيائية على المرسلات والهوائيات. يمكن دراسة إشارات باستطاعة محدودة لكنها غير متناهية الطاقة والاستمرارية (من قبيل الإشارات الجيبية البسيطة). من جهة أولى، لا تدوم الأشكال الموجية الفيزيائية إلى الأبد (إذ قد تتلف المرسلات أو تصبح مُلغاة)، لكن من ناحية أخرى، يمكن لنماذج الإشارات الفيزيائية أن تستمر مدة لا نهائية، تُمنج حيويات فيزيائية أطول بكثير من أي مقياس زمن في مجال الاتصالات. ومع ذلك، ولأسباب سوف تتكشف تدريجياً، ستقتصر إشارات القناة في هذا الكتاب على الإشارات ذات الطاقة المتناهية.

ثمة سبب مهم آخر للتركيز على الإشارات المتناهية الطاقة. ليس فقط لأنها النماذج المناسبة لإشارات المنبع والقناة، ولكن لأن لديها أيضاً خصائص بسيطة وعامة. تعتمد هذه الخصائص على قيد إضافي يسمى *قابلية القياس* التي ستُشرح في الفقرة التالية. تسمى هذه التتابع المحدودة الطاقة القابلة للقياس لتتابع L_2 . وإذا كانت مقيدة بالزمن، فسيكون لديها دائماً سلسلة فورييه. وإذا لم تكن مقيدة بالزمن، فسيكون لديها دائماً تحويل فورييه. ولعل الخاصية الأكثر أهمية، على أية حال، هي أنه يمكن معاملتها التابع L_2 بشكل أساسي مثل الأشعة التقليدية (انظر الفصل الخامس).

قد ندسأل عما إذا كان وجود محدودية للتتابع ذات الطاقة المتناهية يُقيد كثيراً. على سبيل المثال، تستخدم الإشارات الجيبية غالباً لنمذجة الحامل في اتصالات خزمة التمرير، ولإشارات الجيبية طاقة لا نهائية بسبب مدتها اللانهائية. كما سنرى لاحقاً عندما تُعدّل إشارة خزمة قاعدية محدودة الطاقة، بتلك الإشارة الجيبية، إلى خزمة التمرير. فإن لإشارة خزمة التمرير الناتجة طاقة متناهية.

لنأخذ مثلاً آخر، النبضة الواحدية (تابع ديراك دلنا $d(t)$) هي تابع عام يُستخدم لنمذجة الإشارات ذات المساحة الواحدية والتي لا تساوي الصفر فقط ضمن حيز ضيق في محيط $t = 0$ ، ضيق نسبة إلى باقي الفترات المهمة. إن الاستجابة النبضية لمرشح خطي غير متغير زمنياً، هي بالتأكيد، استجابته لنبضة ديراك، تُقرب هذه الاستجابة استجابة المرشح لإشارة فيزيائية ضيقة على نحو كافٍ ولها مساحة واحدية. تزداد الطاقة في تلك الموجة الفيزيائية على نحو كبير كلما ضاق عرض الإشارة. إن للنبضة المربعة التي عرضها ϵ وارتفاعها $1/\epsilon$ ، على سبيل المثال، مساحة واحدية من أجل كل قيم $\epsilon > 0$ لكن لها طاقة $1/\epsilon$ ، تقارب ∞ عندما $\epsilon \rightarrow 0$. يمكن النظر إلى الطاقة في النبضة الواحدية

بكونها إما غير مُعرّفة أو لانهائية، ولكن لا يمكن أبداً النظر إليها على أنها متناهية.

بإيجاز، ثمة العديد من أشكال الموجة المفيدة خارج فئة المتناهية الطاقة. وعلى الرغم من كونها ليست إشارات فيزيائية، فهي نماذج مفيدة لإشارات فيزيائية حيث الطاقة غير مهمة. تُعدّ الطاقة سمةً هامة لإشارات المنبع والقناة، ومع ذلك يمكن لهذه الإشارات أن تقتصر على فئة الطاقة المتناهية.

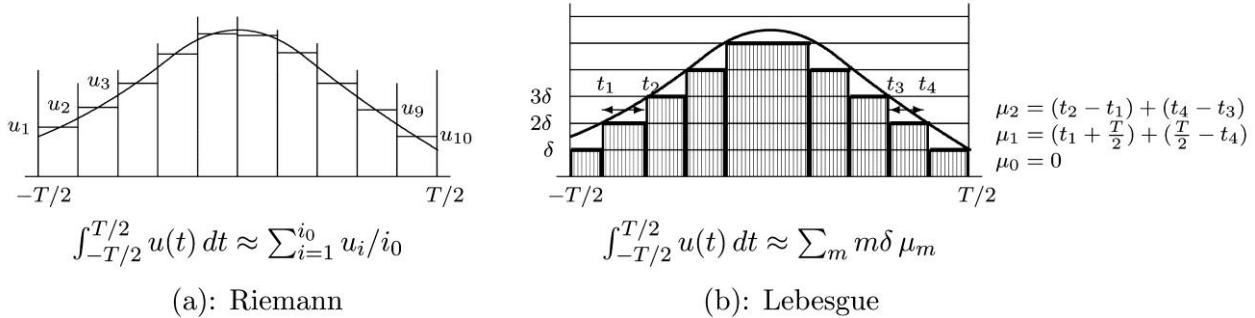
3.4 توابع L_2 وتكامل ليبيسغ Lebesgue في المجال $[-T/2, T/2]$

يُعرّف التابع $\{u(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$ على أنه تابع L_2 إذا كان قابلاً للقياس وفق ليبيسغ، وله تكامل ليبيسغ منتهي $\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt$. تقدم هذه الفقرة فهماً أساسياً وحُدسياً لما هو المقصود بهذه المصطلحات. ويزوّد الملحق براهين النتائج، وأمثلة إضافية، وفهماً أكثر عمقاً. يتطلب الفهم الأعمق للموضوع، مقرر رياضيات جيد في المتغيرات الحقيقية والعقدية. إن الملحق ليس مطلوباً لفهم الهندسة الأساسية للنتائج في هذا الفصل والفصول اللاحقة، لكنه سيزوّد نظرة أكثر تعمقاً.

إن الفكرة الأساسية لتكامل ليبيسغ ليست أكثر تعقيداً من تكامل ريمان الأكثر شيوعاً والذي يُدرّس في مناهج الكلية للمبتدئين. فأيما يوجد تكامل ريمان، يوجد تكامل ليبيسغ أيضاً⁴⁰ وله نفس القيمة. وهكذا فإن جميع الطرائق المألوفة لحساب التكامل بما في ذلك الجداول والعمليات العددية تجري دون تغيير. إن تكامل ليبيسغ أكثر فائدة هنا، ويرجع ذلك جزئياً لأنه يُطبّق على مجموعة أوسع من التوابع، لكن الأهم من ذلك، أنه يُبسّط النتائج الأساسية على نحو كبير.

تهتم هذه الفقرة فقط بالتوابع المحدودة الزمن $\{u(t): [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{C}\}$. وهذه هي التوابع المهمة بالنسبة لسلسلة فورييه، كما أن التقييد بفترة زمنية محددة يُجنّب بعض التفاصيل الرياضية التي من المُفضّل معالجتها لاحقاً.

يبين الشكل (4.4) على نحو بديهي الاختلاف بين تكامل ليبيسغ وتكامل ريمان. يجري تنفيذ تكامل ريمان التقليدي لتابع $u(t)$ ذي قيمة حقيقية غير سالبة خلال فترة $[-T/2, T/2]$ في الشكل 4.4a من خلال تقسيم المجال $[-T/2, T/2]$ ، إلى فترات زمنية i_0 عرض كل منها T/i_0 . يُقرَّب التابع بعد ذلك ضمن الفترة التي ترتبها i بقيمة واحدة u_i ، من قبيل نقطة الوسط للقيم خلال الفترة الزمنية. ثم يُقرَّب التكامل بعد ذلك إلى $\sum_{i=1}^{i_0} (T/i_0) u_i$. إذا كان التابع ناعماً بما فيه الكفاية، فإن لهذا التقريب حدّاً، يدعى تكامل ريمان، عندما $i_0 \rightarrow 0$.



الشكل 4.4: مثال على تكامل ريمان وتكامل ليبيسغ.

لمعاملة نفس التابع باستخدام تكامل ليبيسغ، يُقسّم المحور العمودي إلى فترات، ارتفاع كل منها δ ، كما هو مبين في الشكل 4.4b. ومن أجل الفترة التي ترتبها m ، $[m\delta, (m+1)\delta]$ ،⁴¹ لتكن ε_m هي مجموعة قيم t بحيث $m\delta \leq u(t) < (m+1)\delta$. على سبيل المثال، توضح الأسهم في الشكل 4.4 المجموعة ε_2 وهي تعطي كما يلي:

$$\varepsilon_2 = \{t : 2\delta \leq u(t) < 3\delta = [t_1, t_2) \cup (t_3, t_4]$$

⁴⁰ ثمة تعديل افتراضي طفيف لهذه الجملة ستجري مناقشته في مثال تابع السينك sinc في الفقرة 1.5.4.

⁴¹ يدل التعبير $[a, b]$ على الفترة المغلقة جزئياً $a \leq t < b$. وعلى نحو مشابه، يدل التعبير $(a, b]$ على الفترة المغلقة جزئياً $a < t \leq b$. والتعبير (a, b) على الفترة المفتوحة $a < t < b$ ، والتعبير $[a, b)$ على الفترة المغلقة $a \leq t \leq b$. وفي الحالة الخاصة عندما $a = b$ ، فإن التعبير $[a, a]$ يتألف من نقطة وحيدة a ، بينما تكون (a, a) ، و (a, a) ، و $(a, a]$ فارغة.

كما هو موضح أدناه، إذا كان ε_m مجموع محدد من فترات منفصلة،⁴² وقياسها μ_m هو مجموع أعراض تلك الفترات وبالتالي μ_2 في المثال الآنف تعطى كما يلي:

$$(8.4) \quad \mu_2 = \mu(\varepsilon_2) = (t_2, t_1) + (t_4, t_3)$$

وعلى نحو مشابه، $\varepsilon_1 = [-\frac{T}{2}, t_1) \cup (t_4, \frac{T}{2}]$ and $\mu = (t_1 + \frac{T}{2}) + (\frac{T}{2} - t_4)$ يُقَرَّب تكامل ليبسغ إلى $\sum_m(m\delta)\mu_m$. وتشير المنطقة المظلمة عمودياً في الشكل إلى هذا التقريب. إن تكامل ليبسغ هو، بشكل أساسي، الحد عندما $\delta \rightarrow 0$.

باختصار، إن تقريب ريمان إلى المنطقة التي تحت المنحني، يقسم المحور الأفقي إلى مُتقطعات منتظمة ويجمع المناطق المستطيلة الموافقة. بينما يقسم تقريب ليبسغ المحور العمودي إلى مُتقطعات منتظمة ويجمع قياس عرض أزمنة الارتفاع لكل مُتقطع. في كلا الحالتين، ثمة حاجة إلى عملية تحديد من أجل إيجاد التكامل، وتعرض الفقرة 3.3.4 مثالاً تظهر فيه حدود موجودة في ليبسغ وغير موجودة في حالة ريمان.

1.3.4 إجراء ليبسغ لاتحاد الفترات

لشرح تكامل ليبسغ على نحو أعم، لابد من تحديد إجراء لفئة من المجموعات أكثر عمومية. يُعرَّف الإجراء لفترة I من a إلى b حيث $a \leq b$ بأنه $\mu(I) = b - a \geq 0$. ومن أجل أي اتحاد متناهي لـ ℓ فترة منفصلة، $\mathcal{E} = \bigcup_{j=1}^{\ell} I_j$ ، يُعرَّف الإجراء $\mu(\mathcal{E})$ كما يلي:

$$(9.4) \quad \mu(\mathcal{E}) = \sum_{j=1}^{\ell} \mu(I_j)$$

استُخدم تعريف $\mu(\mathcal{E})$ هذا في (8.4) وهو ضروري للتقريب في الشكل (b4.4) ليتطابق مع المساحة تحت منحنى التقريب. حقيقة أن قياس الفترة لا يعتمد على إدراج نقاط النهاية، تتوافق مع المفهوم الأساسي للمنطقة تحت المنحني. أخيراً، بما أن هذه الفترات الزمنية المنفصلة كلها مُحْتَوَاة في $[-T/2, T/2]$ ، نعتبر أن مجموع أعراضها على الأكثر هو T ، أي:

$$(10.4) \quad 0 \leq \mu(\mathcal{E}) \leq T$$

يمكن أيضاً التعبير عن أي اتحاد متناهي لـ ℓ فترة اعتباطية، $\mathcal{E} = \bigcup_{j=1}^{\ell} I_j$ ، على نحو فريد، بوصفه اتحاداً متناهيلاً لـ ℓ فترة منفصلة على الأكثر، أي، $I'_1, \dots, I'_k, k \leq \ell$ (انظر التمرين 5.4)، ويعطى قياسها كما يلي:

$$(11.4) \quad \mu(\mathcal{E}) = \sum_{j=1}^k \mu(I'_j)$$

يُعرَّف اتحاد مجموعة لانهاية معدودة⁴³ من فترات منفصلة، $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ أيضاً بأنه قابل للقياس ويعطى قياسه كما يلي:

$$(12.4) \quad \mu(B) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\ell} \mu(I_j)$$

إن الجمع في الجهة اليمنى للعلاقة مُحدَّد بين 0 و T لكل ℓ . بما أن $\mu(I_j) \geq 0$ ، فإن المجموع لا يتناقص في ℓ . وبالتالي فإن الحد موجود ويقع بين 0 و T . كما أن الحد مستقل عن ترتيب I_j أيضاً (انظر المثال 4.4).

مثال 1.3.4. ليكن $I_j = (T2^{-2j}, T2^{-2j+1})$ ، لكل عدد صحيح $j \geq 1$. إن قياس الفترة ذات الترتيب j هو $\mu(I_j) = 2^{-2j}$. تصبح

⁴² يُقال عن فترتين إنهما منفصلتان إذا كانتا غير فارغتين، وكان بينهما نقطة واحدة على الأقل لا تقع في أي منهما؛ أي، إن $(0,1)$ و $(1,2)$ منفصلتان. وعلى العكس، تكون المجموعتان متباعدتين إن لم تكن بينهما أي نقطة مشتركة. وبالتالي فإن $(0,1)$ و $[1,2]$ مفككتان ولكن ليستا منفصلتين

⁴³ يقدّم الملحق 4A.1 دراسة أساسية لقابلية العد. يُنصح القارئون الذين ليس لديهم خبرة في قابلية العد للأعداد الكسرية قراءة هذا الملحق.

هذه الفترات الزمنية أصغر وأقرب إلى الصفر كلما ازدادت j . وهي تُرى بوضوح أنها منفصلة. إن قياس الاجتماع $B = \cup_j I_j$ هو $\mu(B) \sum_{j=1}^{\infty} T2^{-2j} = T/3$. تخيل استبدال التابع في الشكل 4.4 بأخر يتأرجح على نحو أسرع فأسرع كلما $t \rightarrow 0$ ؛ يمكن عندها، أن تُمثل B مجموعة نقاط على المحور الأفقي تُوافق شريحة عمودية مُعطاة.

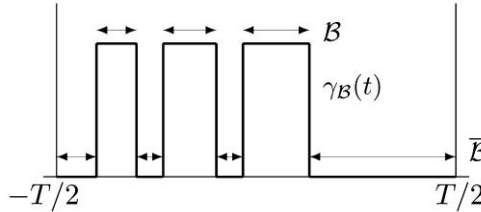
مثال 2.3.4. لنفرض، وعلى نحو مختلف عن المثال السابق، أن $B = \cup_j I_j$ حيث $I_j = [T2^{-2j}, T2^{-2j}]$ ولكل j . تتكون الفترة I_j عندها من نقطة وحيدة $T2^{-2j}$ وبالتالي $\mu(I_j) = 0$. في هذه الحالة يكون $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j) = 0$ لكل l . كما إن حدّها عندما تقترب $0 \rightarrow \ell$ هو أيضاً 0، ولهذا فإن $\mu(B) = 0$ في هذه الحالة. ونجد بنفس البرهان أن قياس أي مجموعة لا نهائية معدودة من النقاط هو 0. يمكن تمثيل أي اتحاد لا نهائي قابل للعد لفترات اعتباطية (ربما متقاطعة) على نحو فريد⁴⁴ بأنه اتحاد قابل للعد (سواءً كان قابلاً للعد منتهياً أو غير منتهٍ) لفترات زمنية منفصلة (انظر المثال 6.4)؛ يُعرّف قياسه من خلال تطبيق (12.4) على هذا التمثيل.

2.3.4 قياس المجموعات الأكثر عمومية

قد يبدو أن فئة اتحاد الفترات المعدودة شاملة بما يكفي لتمثيل أي مجموعة، ولكن اتضح أنها ضيقة جداً لتشمل الأنواع العامة من العلاقات التي شكلت الدافع لمناقشة تكامل ليبيغ. إن أحد التعميمات الحيوية يتطلب أن يكون المتمم \bar{B} (نسبة إلى $[-T/2, T/2]$) لأي مجموعة B قابلة للقياس، قابلاً للقياس أيضاً⁴⁵.

بما أن $\mu([-T/2, T/2]) = T$ وكل نقطة من $[-T/2, T/2]$ تقع إما ضمن B أو \bar{B} ولكن ليست فيهما معاً، فإن قياس \bar{B} يجب أن يكون $\mu(\bar{B}) = T - \mu(B)$. إن السبب في كون هذه الخاصة مهمة ليتوافق تكامل ليبيغ مع المساحة تحت المنحنى، موضّح في الشكل (5.4).

إن تباین المجموعة الجزئية هو خاصية أخرى يجب أن يتضمنها القياس: وهي تنص على أنه إذا كان A و B قابلين للقياس، وكان $A \subseteq B$ عندها يكون $\mu(A) \leq \mu(B)$. ويمكن أن نتبين من الشكل (5.4) ضرورة هذا التباین للتكامل في تمثيل المساحة تحت المنحنى.



الشكل 5.4: ليكن $f(t)$ تابع له القيمة 1 على مجموعة B والقيمة 0 في أي مكان آخر ضمن $[-T/2, T/2]$. عندها $\int f(t) dt = \mu(B)$. يوضح الشكل أيضاً متمم B ، \bar{B} ، ويبيّن أن $1 - f(t)$ تساوي 1 في المجموعة \bar{B} وتساوي الصفر في أي مكان آخر. لذلك فإن $\int [1 - f(t)] dt = \mu(\bar{B})$ ، حيث يجب أن تساوي $T - \mu(B)$ ليتوافق التكامل مع شكل المساحة تحت المنحنى.

قبل تعريف أي المجموعات في $[-T/2, T/2]$ قابل للقياس وأبها غير قابل، سنقدّم تابعاً كالقياس يدعى القياس الخارجي موجود لجميع المجموعات في $[-T/2, T/2]$. من أجل أي مجموعة اعتباطية A ، نقول عن المجموعة B أنها تحتوي A ، إذا كانت $A \subseteq B$ وكانت B اتحاد فترات قابل للعد. ومن ثم يكون القياس الخارجي $u^0(A)$ هو قياس أصغر احتواء لـ A . وعلى نحو الخصوص،⁴⁶

⁴⁴ يُعدُّ مجموع الفترات المنفصلة وكذلك الحدّ في العلاقة (12.4) فريداً، لكن ترتيب الفترات ليس كذلك. ⁴⁵ يستعمل الملحق 4A.1 مجموعة الأرقام الحقيقية في $[-T/2, T/2]$ ليوضح أن المتمم \bar{B} لاتحاد قابل للعد لفترات B ليس بالضرورة أن يكون قابلاً للعد. في هذه الحالة تكون $\mu(\bar{B}) = T - \mu(B)$ ، والتي يبدو أنها صالحة عندما تكون B اتحاداً لفترات قابلاً للعد.

[لمجموعة من الأعداد الحقيقية بشكل أساسي الحد الأدنى لهذه المجموعة. ويمكن رؤية الفرق بين الحد الأدنى والحد الأدنى الأعظم من (inf) يعتبر [الحد الأدنى الأعظم ⁴⁶ . لا يكون لهذه المجموعة حد أدنى، إذ يوجد لكل عدد في المجموعة عدد أصغر يكون أكبر من 1 خلال مثال عن المجموعة من الأعداد الحقيقية التي تكون أكبر تماماً من الواحد. ولتجنّب هذه المسألة التقنية، يُعرّف الحد الأدنى الأعظم بأنه أكبر حد أدنى للمجموعة. وفي المثال، كل الأعداد الأقل من الواحد أو التي تساويه هي الحدود الدنيا كخيار $-\infty$ (إذا ضمنا القيمة) هو أعظم حد أدنى. إن لكل مجموعة غير خالية من الأعداد الحقيقية حداً أدنى أعظماً للمجموعة، والعدد

$$(13.4) \quad \mu^0(\mathcal{A}) = \inf_{B: B \text{ covers } \mathcal{A}} \mu(B)$$

ليس مفاجئاً أن يكون القياس الخارجي لاتحاد فترات قابلٍ للعد، مساوياً لقياسه كما تمَّ تعريفه (انظر الملحق 4A.3). يمكن الآن تعريف المجموعات القابلة للقياس والقياس خلال الفترة $[-T/2, T/2]$ على النحو التالي:

تعريف: نُعدُّ المجموعة \mathcal{A} (على المجال $[-T/2, T/2]$) *قابلة للقياس* إذا كان $\mu^0(\mathcal{A}) + \mu^0(\bar{\mathcal{A}}) = T$. وإذا كانت \mathcal{A} قابلة للقياس، يكون قياسها، $\mu(\mathcal{A})$ ، هو القياس الخارجي $\mu^0(\mathcal{A})$.

بدايةً، تكون المجموعة قابلة للقياس إذا كانت هي ومتمماتها غير متشابكة بحيث يمكن احتواؤها باتحاد فترات قابلٍ للعدّ مترابطةً على نحو طفيف. يُقدّم المثال في نهاية الفقرة 4A.4 أبسط مجموعة معروفة غير قابلة للعد؛ تجب ملاحظة كم تبدو المجموعة غريبة ومعقدة مع مُتمماتها.

إن تعريف قابلية القياس هو "تعريف رياضي" بمعنى أنه مقتضب ومنسجم ولكنه لا يزود أدلة فورية كثيرة عن تحديد ما إذا كانت مجموعة قابلة للقياس، وإذا كان الأمر كذلك، فما هو قياسها. ستجري الآن مناقشة هذه المسألة باختصار.

يبين الملحق 4A.3 أن اتحادات الفترات المعدودة قابلة للقياس وفقاً لهذا التعريف، ويمكن إجراء القياس عن طريق تجزئ المجموعات إلى فترات منفصلة. أيضاً، وبحكم التعريف فإن متمم كل مجموعة قابلة للقياس، قابل للقياس، بعد ذلك، إذا كان $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$ ، فإن أي حوٍ لـ \mathcal{A}' يحتوي \mathcal{A} ، ومن ثمَّ فإن المجموعة الجزئية مُحَقَّقة. وهذا غالباً ما يجعل من الممكن إيجاد قياس المجموعة باستخدام عملية تحديد على سلسلة من المجموعات القابلة للقياس تحتوي أو محتواة في المجموعة المرغوبة. أخيراً تم إثبات النظرية التالية في الفقرة 4A.4 من الملحق.

نظرية 1.3.4. ليكن $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots$ ، أي تتابع من مجموعة قابلة للقياس. فيكون $\mathcal{S} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j$ و $\mathcal{D} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j$ قابلين للقياس أيضاً. وإذا كان $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots$ منفصل (غير متّصل) أيضاً، يكون $\mu(\mathcal{S}) = \sum_j \mu(\mathcal{A}_j)$. وإذا كان $\mu^0(\mathcal{A}) = 0$ ، يصبح \mathcal{A} قابلاً للقياس وقياسه صفر.

تنص هذه النظرية والتعريف على أن مجموعة المجموعات القابلة للقياس مغلقة ضمن الاتحادات المعدودة، والتقاطعات المعدودة، والتممات. وهذا ما يفسر جزئياً صعوبة العثور على مجموعات غير قابلة للقياس وأيضاً سبب تجاهل وجودها- إنها ببساطة لا تظهر في عملية التحليل العادية.

نتيجة أخرى تتعلق بمجموعات قياسها صفر. بيّنا سابقاً أن أي مجموعة تحتوي فقط على العديد من النقاط القابلة للعد لها قياس صفري، ولكن ثمة مجموعات أخرى لها قياس صفري أيضاً. يبين مثال مجموعة كانتور Cantor في الفقرة 4A.4 مجموعة ذات قياس صفري بعناصر كثيرة غير قابلة للعد. تدلّ النظرية على أن للمجموعة \mathcal{A} قياساً صفرياً إذا كان لـ \mathcal{A} احتواء \mathcal{B} بحيث $\mu(\mathcal{B}) \leq \varepsilon$ وذلك من أجل أي $\varepsilon > 0$. يدل تعريف قابلية القياس على أن لمتهم أي مجموعة من المجموعات ذات القياس الصفري القياس T ، أي أنّ $[-T/2, T/2]$ هو الاحتواء لأصغر قياس. سنبيّن بعد قليل، وبالنسبة لمعظم الأغراض، بما في ذلك التكامل، يمكن تجاهل مجموعات القياس الصفري، ويمكن اعتبار مجموعات القياس T بأنها تمثل كامل الفترة $[-T/2, T/2]$.

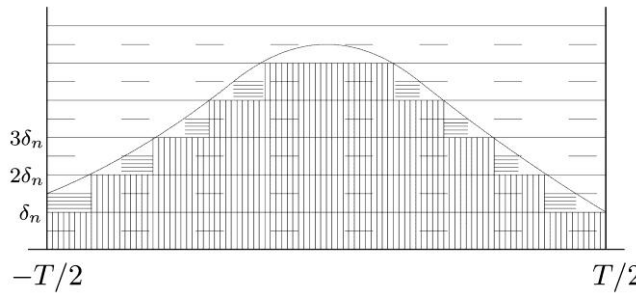
يخلص هذا دراستنا للمجموعات القابلة للقياس على $[-T/2, T/2]$. خلاصة القول، إن ليس كل المجموعات قابلة للقياس، وأن المجموعات غير القابلة للقياس تظهر فقط من التركيبات الغريبة والصنعية، ويمكن تجاهلها عادةً. قد تبدو تعريفات القياس وقابلية القياس اعتبارية إلى حد ما، ولكنها في الحقيقة تنشأ ببساطة من خلال المطلب الطبيعي أن تكون الفترات الزمنية واتحادات الفترات القابلة للعدّ قابلة للقياس بقياس مُعطى⁴⁷ وأنَّ خاصية تفاوت المجموعة الجزئية والمتمم مُحَقَّقة. إذا أردنا لمجموعات أخرى أن تكون قابلة للقياس، فيجب على الأقل أن تحقق إحدى الخصائص المذكورة آنفاً وعندها يصبح التكامل غريباً. إن النتيجة الأساسية هنا، بعيداً عن الحدس والمألوف، هي النظرية 1.3.4 المستخدمة على نحو متكرر في الفقرات التالية. يُغطّي الملحق تفاصيل مهمة كثيرة ويثبت النتائج الواردة هنا.

⁴⁷ لم نُميّر بين حالة كون المجموعة قابلة للقياس والقياس الفعلي المخصص لها، وهو أمر طبيعي للتكامل. يمكن ببساطة تعميم النظرية لتشمل المتغيرات العشوائية المحددة ضمن المجال $[-T/2, T/2]$. يعاد تعريف قياس الفترة في هذه الحالة ليصبح احتمال تلك الفترة. ويبقى ما عدا ذلك على حاله إلا أن بعض النقاط الفردية قد يكون لها احتمال غير صفري.

3.3.4 التوابع القابلة للقياس والتكامل على المجال $[-T/2, T/2]$

يقال عن التابع $\{u(t): [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{R}\}$ بأنه تابع ليبسغ قابل للقياس (أو اختصاراً قابل للقياس) إذا كانت مجموعة النقاط $\{t: u(t) < \beta\}$ قابلة للقياس من أجل كل $\beta \in \mathbb{R}$. إذا كانت $u(t)$ قابلة للقياس، تكون عندها، وكما هو موضح في التمرين 11.4، كافة المجموعات $\{t: u(t) \leq \beta\}$ ، $\{t: u(t) \geq \beta\}$ ، $\{t: u(t) > \beta\}$ ، و $\{t: \alpha \leq u(t) \leq \beta\}$ قابلة للقياس من أجل جميع قيم $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$. وبالتالي، إذا كان ثمة تابع قابل للقياس، فإن القياس $\mu_m = \mu(\{t: m\delta \leq u(t) < (m+1)\delta\})$ المرتبط مع الشريحة الأفقية ذات الترتيب m ، في الشكل (4.4) يجب أن يكون موجوداً لكل $\delta > 0$ و m .

من شروط وجود تكامل ليبسغ أن يكون للتقريب في الشكل 4.4 إلى تكامل ليبسغ حدّ عندما يقترب قياس الفترة العمودية δ من الصفر. أولاً لنعتبر التوابع غير السالبة فقط $u(t) \geq 0$ من أجل كل قيم t . من أجل كل عدد صحيح $n \geq 1$ نعرّف التقريب ذا الترتيب n لتكامل ليبسغ على أنه الناجم عن تقسيم المحور الشاقولي لفترات، ارتفاع لكل منها $\delta_n = 2^{-n}$. وبالتالي ترتبط أي زيادة في n بخفض قياس الفترة العمودية إلى النصف كما هو موضح في الشكل أدناه.



الشكل 6.4: تحسين التقريب لتكامل ليبسغ عن طريق زيادة وحدة في n مشار إليها بالمنطقة المهشّرة أفقياً.

لتكن $\mu_{m,n}$ قياساً لـ $\{t: m2^{-n} \leq u(t) < (m+1)2^{-n}\}$ ، أي، إن قياس المجموعة $t \in [-T/2, T/2]$ حيث تُمثّل $u(t)$ الفترة العمودية ذات الترتيب m للتقريب ذي الترتيب n . قد يكون التقريب $\sum_m m2^{-n} \mu_{m,n}$ لانتهائياً⁴⁸ من أجل كل قيم n ، ويقال في هذه الحالة إن تكامل ليبسغ لانتهائي. إذا كان المجموع منتهياً من أجل $n = 1$ ، فيبين الشكل أن التغيير في الانتقال من التقريب n إلى $n+1$ غير سلبي ومُحدّد من الأعلى بـ 2^{-n-1} . وبالتالي فمن الواضح أن تسلسل التقريبات له حد منتهائي يُعرّف⁴⁹ بأنه تكامل ليبسغ لـ $u(t)$. باختصار يكون تكامل ليبسغ لتابع اعتباطي غير سالب وقابل للقياس $\{u(t): [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{R}\}$ منتهائياً إذا كان أي تقريب له منتهائياً، ويعطى بالعلاقة التالية:

(14.4)

$$\int u(t)dt = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} m2^{-n} \mu_{m,n}$$

$$\mu_{m,n} = \mu(t: m2^{-n} \leq u(t) < (m+1)2^{-n}) \quad \text{حيث}$$

مثال 3.3.4. ليكن لدينا تابع له القيمة 1 لكل الأعداد الحقيقية في $[-T/2, T/2]$ والقيمة 0 من أجل كل الأعداد الصمّ. تملك مجموعة الأعداد الحقيقية قياساً صفرياً كما هو موضح في الملحق 4A.1 بحيث يكون كل تقريب لتكامل ليبسغ هو الصفر وبالتالي يكون الحد لهذا التكامل صفراً. وهذا مثال بسيط لتابع له تكامل ليبسغ وليس له تكامل ريمان.

نعتبر الآن اثنين من التوابع القابلة للقياس وغير السالبة $u(t)$ و $v(t)$ على المجال $[-T/2, T/2]$ ، وبفرض أن $u(t) = v(t)$ ما عدا على مجموعة ذات قياس صفري. ومن ثمّ فإن كل تقريب في المعادلة (14.4) يكون متطابقاً في كل من $u(t)$ و $v(t)$ ، وبالتالي فإن التكاملين متطابقان (إما كلاهما لانتهائي أو لهما نفس العدد). سيظهر أن هذه الخاصية ذاتها تنطبق على توابع ممكن أن يكون لها قيم سالبة وكذلك على

⁴⁸ على سبيل المثال، يكون المجموع لانتهائياً إذا كان $t = 1/|t|$ وذلك من أجل $-T/2 \leq t \leq T/2$. إن الحالة هنا هي ذاتها من أجل تكامل ريمان وتكامل ليبسغ.

⁴⁹ يمكن أن تُبين أن عملية التحديد هذه مستقلة عن كيفية اقتراب فترات التكميم من الصفر.

توابع ذات قيم عقدية. تنص هذه الخاصية على أنه يمكن تجاهل مجموعات القياس الصفيرية في التكاملات. وهذه إحدى خصائص التبسيط الرئيسية التي يقدمها تكامل ليبسغ. ويمكن القول إن اثنين من التوابع اللذين لهما نفس القيمة ما عدا على مجموعة القياس الصفيرية يكونان متساويين تقريباً في كل مكان (تُختصر a.e.).

على سبيل المثال، فإن النبضة المستطيلة وسلسلة فورييه الممثلة لها الموضحة في الشكل 2.4 متساوية تقريباً في كل مكان. من أجل التوابع ذات القيم الموجبة والسالبة، يمكن فصل التابع $u(t)$ إلى جزء موجب $u^+(t)$ وجزء سالب $u^-(t)$. يعرف التابعان كما يلي:

$$u^-(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t : u(t) \geq 0 \\ -u(t) & \text{for } t : u(t) < 0 \end{cases} \quad u^+(t) = \begin{cases} u(t) & \text{for } t : u(t) \geq 0 \\ 0 & \text{for } t : u(t) < 0 \end{cases}$$

ومن أجل كل قيم $t \in [-T/2, T/2]$ يكون:

$$(15.4) \quad u(t) = u^+(t) - u^-(t)$$

إذا كان التابع $u(t)$ قابلاً للقياس، فإن كلا من $u^+(t)$ و $u^-(t)$ قابلين للقياس أيضاً⁵⁰. وبما أنها غير سالبة، يمكن مكاملتها كما في السابق، وكل تكامل يكون بقيمة إما متناهية أو لانهاية. إذا كان أحد هذه التكاملات على الأكثر لانهاية، يُعرّف تكامل ليبسغ للتابع $u(t)$ كما يلي:

$$(16.4) \quad \int u^+(t) = \int u^+(t) - \int u^-(t) dt$$

إذا كان كلا التكاملين $\int u^+(t) dt$ و $\int u^-(t) dt$ لانهاية، فإن التكامل في هذه الحالة يكون غير معرف.

أخيراً، يُعرّف التابع العقدي $\{u(t) : [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{C}\}$ بأنه قابل للقياس إذا كان الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للتابع $u(t)$ قابلين للقياس. إذا كان تكامل كل من $\Re(u(t))$ و $\Im(u(t))$ معرفين، عندها يكون تكامل ليبسغ $\int u(t) dt$ مُعرّفاً كالتالي:

$$(17.4) \quad \int u(t) dt = \int \Re(u(t)) dt + i \int \Im(u(t)) dt$$

والتكامل غير مُعرّف خارج ذلك. لاحظ أن هذا يدل على أن أي خاصية تكامل لتوابع ذات قيم عقدية $\{u(t) : [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{C}\}$ تتشارك أيضاً مع توابع ذات قيم حقيقية $\{u(t) : [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{R}\}$.

4.3.4 قابلية قياس التوابع المعرفة بتوابع أخرى

تُعد تعاريف التوابع القابلة للقياس وتكاملات ليبسغ في الفقرة الجزئية الأخيرة بسيطة للغاية بالنظر إلى مفهوم القياس. ولكن التوابع تُعرف غالباً بدلالة توابع أخرى أكثر أولية، والسؤال الذي يطرح نفسه هو ما إذا كانت قابلية قياس هذه التوابع الأولية تعني أنها تنطبق على التوابع المعرفة. إن الإجابة النهائية في كل الحالات تقريباً نعم. ولهذا السبب سنفترض في الفقرات التالية أن كل التوابع ذات الصلة قابلة للقياس. وسنستعرض الآن عدداً من النتائج لإثبات هذه الإجابة.

أولاً: إذا كان $\{u(t) : [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{R}\}$ قابلاً للقياس، فإن $-u(t)$ ، و $|u(t)|$ ، و $u^2 t$ ، و $e^u(t)$ ، و $\ln|u(t)|$ هي أيضاً قابلة للقياس. تتبع هذه النتائج ونتائج مشابهة أخرى مباشرة تعريف التوابع القابلة للقياس وهي مُبرهنة في التمرين 12.4.

ثانياً: إذا كان $u(t)$ و $v(t)$ قابلين للقياس، فإن $v(t) + u(t)$ و $v(t) u(t)$ قابلان للقياس (انظر التمرين 13.4).

أخيراً: إذا كان $\{u_k(t) : [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{R}\}$ تابعاً قابلاً للقياس لكل عدد صحيح $k \geq 1$ ، فإن $\inf_k u_k(t)$ قابل للقياس. ويمكن رؤية ذلك بملاحظة أن $\{t : \inf_k [u_k(t)] \leq \alpha\} = \cup_k \{t : u_k(t) \leq \alpha\}$ قابل للقياس من أجل كل قيم α . وباستخدام هذه النتيجة، يوضح التمرين 15.4 أن $\lim_k u_k(t)$ قابل للقياس إذا كان الحد موجوداً لكل قيم $t \in [-T/2, T/2]$.

⁵⁰ لرؤية هذا، لاحظ أنه من أجل $\beta > 0$ ، فإن $\{t : u(t) < \beta\} = \{t : u^+(t) < \beta\}$. ومن أجل $\beta \leq 0$ ، فإن $\{t : u^+(t) < \beta\}$ هي المجموعة الخالية. ويصلح نفس الجدل لـ $u^-(t)$.

5.3.4 توابع L_1 و L_2 في المجال $[-T/2, T/2]$

نقول عن تابع $\{u(t): [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{C}\}$ أنه تابع L_1 أو في الصف L_1 ، إذا كان $u(t)$ قابلاً للقياس وكان تكامل ليبسغ لـ $|u(t)|$ متناهياً⁵¹.

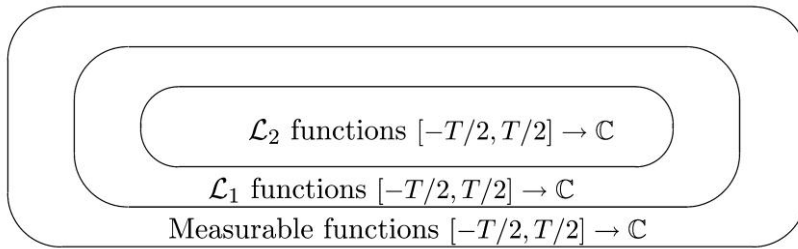
في الحالة الخاصة لتابع حقيقي $\{u(t): [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{R}\}$ فإن القيمة $|u(t)|$ يمكن أن يُعبر عنها بدلالة الأجزاء الموجبة والأجزاء السالبة للتابع $u(t)$ كما يلي، $|u(t)| = u^+(t) + u^-(t)$. وبالتالي فإن $u(t)$ هو L_1 إذا وفقط إذا كان لكلا الجزأين السالب والموجب تكاملات متناهية. بعبارة أخرى فإن $u(t)$ هو L_1 إذا كان تكامل ليبسغ له معرفاً ومتناهياً.

إذا كان التابع عقدياً $\{u(t): [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{C}\}$ ، فيمكن ملاحظة أن $u(t)$ هو L_1 إذا وفقط إذا كان كل من $\Re[u(t)]$ و $\Im[u(t)]$ ، L_1 . وبالتالي يكون $u(t)$ هو L_1 إذا وفقط إذا كان التكامل $\int (t) dt$ معرفاً ومتناهياً.

نقول عن تابع $\{u(t): [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{R}\}$ أو $\{u(t): [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{C}\}$ إنه تابع L_2 ، أو تابع طاقة متناهية، إذا كان التابع $u(t)$ قابلاً للقياس وكان تكامل ليبسغ لـ $|u(t)|^2$ متناهياً. سنفرض أن كل إشارات المنبع والقناة المدروسة في هذا الكتاب هي L_2 . على الرغم من أن توابع L_2 لها أهمية أساسية هنا، فإن صف التوابع L_1 ذو أهمية مساوية تقريباً في فهم سلسلة فورييه وتحولات فورييه. وتقدم النظرية البسيطة التالية علاقة هامة بين L_1 و L_2 موضحة في الشكل 7.4.

نظرية 2.3.4: إذا كان التابع $\{u(t): [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{C}\}$ تابع L_2 فهو تابع L_1 أيضاً.

البرهان: لاحظ أن $|u(t)| \leq |u(t)|^2 + 1$ لكل قيم t حيث $|u(t)| \geq 1$. وبالتالي يكون $|u(t)| \leq |u(t)|^2 + 1$ من أجل كل قيم t ، بحيث $\int |u(t)| dt \leq \int |u(t)|^2 dt + T$. إذا كان التابع $u(t)$ تابع L_2 ، عندها يكون الطرف الأيمن من هذه المعادلة متناهياً، ومن ثمَّ فالتابع هو أيضاً L_1 .



الشكل 7.4: رسم توضيحي يظهر أنه من أجل التوابع من $[-T/2, T/2]$ إلى \mathbb{C} يكون صفُّ التوابع L_2 محتوياً في صف التوابع L_1 ، والذي بدوره محتوياً في صف التوابع القابلة للقياس. إن التحديد هنا إلى مجال متناهي من قبيل $[-T/2, T/2]$ ضروري، كما سنرى لاحقاً.

هذا يُكمل مقدمتنا الأساسية لقياس وتكامل ليبسغ على فترة متناهية $[-T/2, T/2]$. إن حقيقة أن صف المجموعات القابلة للقياس مُغلقة ضمن التتام، والاتحادات القابلة للعد، والتقاطعات القابلة للعد، تقع ضمن نتائج كون قابلية قياس التوابع تبقى ممكنة ضمن مجاميع ونهايات قابلة للعد. وهذه بدورها تُشكل أساس النتائج الأساسية عن سلسلة فورييه، وتكاملات فورييه، والتوسعات المتعامدة. سيتم ذكر بعض تلك النتائج دون برهان، لكنَّ فهم قابلية القياس سيسمح لنا بفهم جيد ماذا تعني تلك النتائج. وأخيراً، فإن تجاهل مجموعات القياس الصفرية سييسِّط تقريباً كل شيء يتضمَّن تكاملاً.

⁵¹ تسمى التوابع L_1 أحياناً التوابع القابلة للتكامل.

4.4 سلسلة فورييه لأشكال موجات \mathcal{L}_2

إن أهم النتائج عن سلسلة فورييه للتتابع \mathcal{L}_2 هي كما يلي:

نظرية 1.4.4 (سلسلة فورييه). ليكن التابع $\{u(t): [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{C}\}$ تابع \mathcal{L}_2 . يوجد عندئذ، ومن أجل كل $k \in \mathbb{Z}$ تكامل ليسغ

من الشكل:

$$(18.4) \quad \hat{u}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-2\pi i k t / T} dt$$

ويحقق: $\frac{1}{T} (\int |u(t)| dt) < \infty$. كما أن: $|\hat{u}_k| \leq \frac{1}{T} (\int |u(t)| dt)$

$$(19.4) \quad \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} \left| u(t) - \sum_{k=-\ell}^{\ell} \hat{u}_k e^{2\pi i k t / T} \right|^2 dt = 0$$

حيث النهاية (الحدّ) رتيبة في ℓ . كما أن معادلة الطاقة (6.4) مُحَقَّقة.

على العكس من ذلك، إذا كان التابع $\{\hat{u}_k, k \in \mathbb{Z}\}$ تسلسلاً من جزئين من أعداد عقدية تحقق $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{u}_k|^2 < \infty$ ، يوجد عندها تابع

$\{u(t): [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{C}\}$ يُحَقِّق (6.4) و(19.4).

الجزء الأول من النظرية بسيط. بما أن $u(t)$ قابل للقياس و $e^{-2\pi i k t / T}$ قابل للقياس من أجل كل قيم k ، فإن الجداء $u(t) e^{-2\pi i k t / T}$ قابل

للقياس. كما أن $|e^{-2\pi i k t / T}| = |u(t)|$ ، وبالتالي $u(t) e^{-2\pi i k t / T}$ هو تابع \mathcal{L}_1 والتكامل موجود مع الحد العلوي المعطى (انظر

التمرين 17.4). بقية البرهان موجودة في الفصل التالي، الفقرة 5.3.4.

يُمثّل التكامل في المعادلة (19.4) الطاقة في الفرق بين $u(t)$ وسلسلة فورييه الجزئية باستخدام المصطلحات $-\ell \leq k \leq \ell$ فقط. ومن ثمّ

تؤكد المعادلة (19.4) أن التابع $u(t)$ يمكن أن يُقَرَّبَ على نحو كفي (بدلالة طاقة الفرق) من خلال عدد محدد من حدود سلسلة فورييه له.

تُعرَّف سلسلة بأنها تتقارب في \mathcal{L}_2 إذا حققت المعادلة (19.4). ويُستخدم المصطلح l.i.m. (حدّ في مربع المتوسط - limit in mean-square)

(square) للدلالة على تقارب التابع \mathcal{L}_2 ، لذا تختصر المعادلة (19.4) غالباً إلى:

$$(20.4) \quad u(t) = \text{l.i.m.} \sum_k \hat{u}_k e^{2\pi i k t / T} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

لا يُشير المصطلح إلى أن المجموع في (20.4) يتقارب عند كل نقطة إلى $u(t)$ في كل زمن t ؛ فعلى سبيل المثال، تتقارب سلسلة فورييه

في الشكل 2.4 إلى 1/2 بدلاً من 1 عند القيم $t = \mp 1/4$. إن أي اثنين من توابع \mathcal{L}_2 المتساوية تقريباً في كل مكان a.e.، تملك نفس معاملات

سلسلة فورييه. ولهذا فإن أفضل ما يمكن أن نتوقعه، أن يتقارب $\sum_k \hat{u}_k e^{2\pi i k t / T} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ عند كل نقطة ويكون "ممثلاً معيارياً" لكافة التوابع

\mathcal{L}_2 التي لها مجموعة معاملات فورييه المُعطاة، $\{\hat{u}_k; k \in \mathbb{Z}\}$.

لسوء الحظ، هناك بعض الأمثلة الغريبة للتوابع \mathcal{L}_2 (انظر المثال كاملاً في الفقرة 5A.1) يتباعد فيها $\sum_k \hat{u}_k e^{2\pi i k t / T} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ عند

بعض قيم t .

ثمّة نظرية هامة تعود إلى كارلسون [3] Carlson تُشير إلى أنه إذا كان التابع $u(t)$ هو تابع \mathcal{L}_2 ، يتقارب عندها التابع

$\sum_k \hat{u}_k e^{2\pi i k t / T} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ في كل مكان تقريباً في المجال $[-T/2, T/2]$. وبالتالي فمن أجل أي تابع $u(t)$ ، ضمن التوابع \mathcal{L}_2 ، مع

معاملات فورييه $\{\hat{u}_k; k \in \mathbb{Z}\}$ ، ثمّة تابع مُعرَّف جيداً هو:

$$(21.4) \quad \tilde{u}(t) = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_k e^{2\pi i k t / T} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) & \text{if the sum converges} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

بما أن المجموع أعلاه يتقارب في كل مكان تقريباً a.e.، فإن معاملات فورييه للتابع $\tilde{u}(t)$ المُعطاة في المعادلة (18.4) تتفق مع المعادلة

(21.4). وبالتالي فإن $\tilde{u}(t)$ يمكن أن يكون بمثابة ممثل مقبول لجميع توابع \mathcal{L}_2 التي لها نفس معاملات فورييه $\{\hat{u}_k; k \in \mathbb{Z}\}$. من معادلة

طاقة الفرق (7.4)، نجد أن الفرق بين أي تابعين \mathcal{L}_2 لهما نفس معاملات فورييه له طاقة صفرية. يقال عن أي تابعين \mathcal{L}_2 يمتلك الفرق بينهما

طاقة صفرية إنهما تابعان \mathcal{L}_2 متكافئان؛ وبالتالي فكل تابع \mathcal{L}_2 ذات نفس معاملات فورييه هي تابع \mathcal{L}_2 متكافئة. يبين التمرين (18.4) أن تابعين \mathcal{L}_2 متكافئان إذاً فقط إذا كانا متساويين على كل المجال تقريباً.

بالإجمال، ينتمي كل تابع \mathcal{L}_2 من الشكل $\{u(t): [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{C}\}$ إلى صف مكافئ يتكون من جميع توابع \mathcal{L}_2 ذات نفس المجموعة من معاملات فورييه. وإن كل زوج من التوابع في هذا الصف المكافئ هما تابعان \mathcal{L}_2 مكافئان ومتساويان في كل مكان تقريباً a.e. يُحدّد الممثل المقبول في المعادلة (21.4) فقط من معاملات فورييه، ويُعرّف على نحو فريد لأي مجموعة معينة من معاملات فورييه تحقق العلاقة $\sum_k |\hat{u}_k|^2 < \infty$ ؛ يتألف الصف المكافئ من التوابع \mathcal{L}_2 المساوية لـ $\tilde{u}(t)$ في كل مكان تقريباً a.e.

من الناحية الهندسية، عادةً ما يكون التابع للتقريبات في المعادلة (19.4) أكثر أهمية من فكرة وجود صف مكافئ من توابع لها نفس معاملات فورييه. في الواقع، لا يوجد اختبار فيزيائي للإشارات الفيزيائية يمكنه أن يميز الإشارات التي هي توابع \mathcal{L}_2 متكافئة، لأن أي اختبار فيزيائي مُشابه يتطلب فرق طاقة. وفي نفس الوقت، إذا كانت التوابع $\{u(t): [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{C}\}$ تُمثّل باستمرار بمعاملات فورييه الخاصة بها، عندها يمكن تجاهل صفوف التكافؤ.

ومن أجل معظم توابع \mathcal{L}_2 عدا التوابع الأكثر شذوذاً، تقترب معاملات فورييه من تابع \mathcal{L}_2 مكافئ للتابع الأصلي، وبالتالي، كما هو الحال مع النقاط $t = \mp 1/4$ في المثال في الشكل 2.4، ليس مهماً كيف ننظر إلى التابع في تلك النقاط المعزولة. ومع ذلك ففي بعض الأحيان لاسيما عند الحديث عن أخذ العينات وفضاءات الأشعة، يصبح مفهوم الصفوف المتكافئة ذا علاقة.

1.4.4 توسع المنحني الجيبي المقطوع المتباعد T-Spaced

لا يوجد شيء خاص حول اختيار 0 كنقطة مركزية للتابع المحدد زمنياً. فمن أجل تابع $\{v(t): [\Delta - T/2, \Delta T/2] \rightarrow \mathbb{C}\}$ مُتمركز حول فترة زمنية اعتباطية Δ ، تكون سلسلة فورييه المزاحة حول هذه الفترة هي⁵²:

$$(22.4) \quad v(t) = \text{l. i. m.} \sum_k \hat{v}_k e^{2\pi i k t / T} \text{rect}\left(\frac{t - \Delta}{T}\right)$$

$$(23.4) \quad \hat{v}_k = \frac{1}{T} \int_{\Delta - T/2}^{\Delta + T/2} v(t) e^{-2\pi i k t / T} dt, \quad -\infty < k < \infty$$

كي نرى ذلك، ليكن $u(t) = v(t + \Delta)$ عندها $u(0) = v(\Delta)$ والتابع $u(t)$ يتمركز حول الصفر وله سلسلة فورييه تعطى بالمعادلتين (20.4) و(18.4)، وإذا كان $\hat{v}_k = \hat{u}_k e^{-2\pi i k \Delta / T}$ فإن ذلك يُنتج المعادلتين (22.4) و(23.4). لا تتغير النتائج حول القياس والتكامل بهذه الإزاحة في محور الزمن.

بعد ذلك، لنفترض أن بعض التوابع المعينة $u(t)$ هي إما غير محدودة بالزمن أو محدودة على فترة زمنية كبيرة جداً. ثمة طريقة هامة لترميز المنبع هي أولاً تجزئة مثل هذا التابع إلى مُقطّعات ذات مدة T ، ومن ثم ترميز كل مُقطّعة⁵³ على حدة. يمكن ترميز المقطع بتوسيعها في سلسلة فورييه ثم ترميز معاملات سلسلة فورييه.

تستخدم معظم خوارزميات ضغط الصوت هذه الطريقة، وعادةً تقطع موجة الصوت إلى مُقطّعات يزمن 20 ميلي ثانية. تستخدم خوارزميات ضغط الصوت غالباً البنية التفصيلية للصوت بدلاً من مجرد ترميز معاملات سلسلة فورييه، لكنّ البنية الترددية للصوت مهمة بالتأكيد في هذه العملية. وبالتالي فإن فهم طريقة سلسلة فورييه هو خطوة أولى جيدة في فهم ضغط الصوت.

يبدأ تنفيذ ضغط الصوت (وكذلك معظم تقنيات معالجة الإشارة) عادةً بأخذ العينات بمعدل أعلى بكثير من مدة المقطع. يلي ذلك تكميم العينات بمعدل عالٍ، تجري بعده معالجة العينات رقمياً. نظرياً، من المُفضّل العمل مباشرة مع الإشارة ومع التوسعات من مثل سلسلة فورييه. يمكن بعد ذلك تنفيذ الأجزاء التماثلية من الخوارزميات الناتجة عن طريق التقنيات القياسية لأخذ العينات بمعدل مرتفع ومعالجة الإشارات

⁵² نلاحظ أن علاقة فورييه بين التابع $v(t)$ والتكافؤ \hat{v}_k تعتمد ضمناً على الفترة الزمنية T والإزاحة Δ .

⁵³ عندما يطلب من أي مهندس، سواءً كان من ذوي الخبرة أم لا، أن يقوم بتحليل مقطع من الإشارة، فإنه سيزيح تلقائياً محور الزمن إما لبداية الشكل الموجي أو لمنتصفه. ينشأ التعقيد المضاف هنا ببساطة من خلال البحث عن مقطّعات متعددة معاً لتمثيل الإشارة بالكامل.

الرقمية.

لنفترض أن إحدى إشارات \mathcal{L}_2 وليكن $\{u(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$ جُزئت إلى مقتطعات $u_m(t)$ ذات فترة زمضية T . نُعبر عن مجموع هذه المقتطعات⁵⁴ بـ $u(t)$ وفق:

$$(24.4) \quad u(t) = \text{l. i. m.} \sum_m u_m(t), \quad \text{where } u_m(t) = u(t) \text{rect} \left(\frac{t}{T} - m \right)$$

ويتم توسع كل مُقتطع $u_m(t)$ من خلال إزاحة مجموعات سلاسل فورييه في العلاقتين (24.4) و (23.4):

$$(25.4) \quad u_m(t) = \text{l. i. m.} \sum_k \hat{u}_{k,m} e^{2\pi i k t / T} \text{rect} \left(\frac{t}{T} - m \right)$$

حيث

$$(26.4) \quad \begin{aligned} \hat{u}_{k,m} &= \frac{1}{T} \int_{mT-T/2}^{mT+T/2} u_m(t) e^{-2\pi i k t / T} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-2\pi i k t / T} \text{rect} \left(\frac{t}{T} - m \right) dt \end{aligned}$$

بدمج (24.4) و (25.4) ينتج لدينا:

$$u(t) = \text{l. i. m.} \sum_m \sum_k \hat{u}_{k,m} e^{2\pi i k t / T} \text{rect} \left(\frac{t}{T} - m \right)$$

يُوسّع هذا $u(t)$ على أنه مجموع مُنقَل⁵⁵ لتتابع مضاعفة الارتباط،

$$(27.4) \quad u(t) = \text{l. i. m.} \sum_m \sum_k \hat{u}_{k,m} \theta_{k,m}(t) \quad \text{where } \theta_{k,m}(t) = e^{2\pi i k t / T} \text{rect} \left(\frac{t}{T} - m \right)$$

تعتبر التتابع $\theta_{k,m}(t)$ متعامدة، ومن أجل $m \neq m'$ فإن التتابع $\theta_{k,m}(t)$ و $\theta_{k',m'}(t)$ لا تتراكب، ومن أجل $k \neq k'$ و $m = m'$ تكون $\theta_{k,m}(t)$ و $\theta_{k',m}(t)$ متعامدة. تسمى هذه التتابع $\{\theta_{k,m}(t); k, m \in \mathbb{Z}\}$ المنحنيات الجيبية المقطوعة المتباعدة- T ويسمى التوسع في (27.4) التوسع الجيبى المقطوع المتباعد- T .

تفهرس المعاملات $\hat{u}_{k,m}$ بـ $k, m \in \mathbb{Z}$ وبالتالي تشكل مجموعة عدودة⁵⁶ يسمح هذا بتحويل إشارة \mathcal{L}_2 اعتباطية إلى تسلسل لانهاى عدود من أعداد عقدية، بمعنى أنه يمكن العثور على الأرقام من الإشارة، والتي يمكن إعادة بنائها من التسلسل، على الأقل لغاية التتابع التكافؤية \mathcal{L}_2 .

يدل l.i.m. في العلاقة (27.4) على تقارب \mathcal{L}_2 ؛ أي:

$$(28.4) \quad \lim_{n, \ell \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| u(t) - \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-\ell}^{\ell} \hat{u}_{k,m} \theta_{k,m}(t) \right|^2 dt = 0$$

يبين هذا أن أي تابع $u(t)$ يمكن أن يُقرب اعتباطياً بمجموعة متناهية من معاملات. على وجه الخصوص، يمكن أن يُقرب كل مُقتطع بمجموعة متناهية من معاملات، وتُقارب مجموعة متناهية من المقتطعات كامل الإشارة (على الرغم أن العدد المطلوب من المقتطعات

⁵⁴ يضاعف هذا المجموع عدد النقاط في نهايات المقتطعات، لكن هذا لا يشكل فرقاً بدلالة تقرب \mathcal{L}_2 . يعالج التمرين 21.4 التقرب في العلاقة (24.4) و (28.4) بطريقة أكثر حذراً.

⁵⁵ يبين التمرين 21.4 لماذا تكون العلاقة (27.4) (وعلاقات مشابهة تأتي لاحقاً) مستقلة عن ترتيب الحدود.

⁵⁶ يشرح التمرين 4A.2 في الفقرة 4A.1 لماذا تعتبر المجموعة المضاعفة الارتباط عدودة (قابلة للعد).

والمعاملات لكل مُقتطع يعتمد بشكل واضح على شكل الإشارة).

ولضغط البيانات، يمكن ضغط إشارة $u(t)$ مُمثلة بمعاملات $\{\hat{u}_{k,m}; k, m \in \mathbb{Z}\}$ عن طريق تكميم كل $\hat{u}_{k,m}$ إلى ممثل $\hat{v}_{k,m}$. يمكن تعميم معادلة الطاقة (6.4) ومعادلة طاقة الفرق (7.4) بسهولة إلى التوسع الجيبي المقطوع المتباعد T .

$$(29.4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{u}_{k,m}|^2$$

$$(30.4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |u(t) - v(t)|^2 dt = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\hat{u}_{k,m} - \hat{v}_{k,m}|^2$$

كما هو الحال في الفقرة 1.2.4 ينبغي اختيار مجموعة متناهية من المعاملات للضغط، وجعل المعاملات المتبقية صِفراً. تكمن مشكلة الضغط (بإعطاء هذا التوسع) في تحديد عدد المعاملات اللازم ضغطها، وعدد البتات اللازم استخدامها لكل معامل مُختار. ويتطلب هذا بالطبع نموذجاً احتمالياً للمعاملات؛ سنتناقش هذه المسألة في وقت لاحق.

ثمة مشكلة عملية باستخدام الإشارات الجيبية المقطوعة المتباعدة T ، باعتبارها توسعاً للاستخدام في ضغط البيانات. تتصرف حدود المقطوعات عادةً على أنها انقطاعات خُطوية (كما في الشكل 3.4) وهذا يؤدي إلى إبطاء التقارب على معاملات فورييه لكل مُقتطع. يمكن إزالة هذه الانقطاعات قبل أخذ سلسلة فورييه، ولكن الهدف الحالي هو ببساطة توضيح إحدى المقاربات العامة لتحويل إشارة \mathcal{L}_2 اعتباطية إلى سلسلة من الأرقام. وقيل النظر في التوسعات الأخرى، من المهم أن ننظر إلى تحويلات فورييه.

5.4 تحويلات فورييه وأشكال موجة $2\mathcal{L}$

يتوافق توسع الإشارات الجيبية المقطوعة المتباعدة T بشكل وثيق مع الفكرة الفيزيائية للتردد. على سبيل المثال، تتوافق النوتات الموسيقية مع ترددات معينة (وتوافقياتها)، لكن هذه النوتات تدوم لفترات متناهية ثم تتغير إلى نوتات بترددات أخرى. ومع ذلك، يبقى البارامتر T في توسع التباعد T اعتباطياً، كما أن تكميم الترددات بزيادات $1/T$ حرج.

يتجنب تحويل فورييه الحاجة للتجزئة إلى فترات متباعدة T ، لكنه أيضاً يلغي القدرة على النظر في الترددات التي تتغير مع الزمن. فهو يُقابل تابع الزمن $\{u(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$ بتابع تردد، $\{\hat{u}(f): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$. تُعيد تحويلات فورييه العكسية $\hat{u}(f)$ إلى $u(t)$ ، وتجعل $u(t)$ بشكل أساسي ممثلاً بديلاً لـ $\hat{u}(f)$.

يُعرف تحويل فورييه وتحويله العكسي وفق:

$$(31.4) \quad \hat{u}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-2\pi i f t} dt$$

$$(32.4) \quad u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(f) e^{2\pi i f t} df$$

يُقاس الزمن بالتواني والتردد بالهرتز (Hz)، أي دورة في الثانية.

سنأخذ في الوقت الراهن وجهة النظر الهندسية التقليدية أن أي تابع $u(t)$ له تحويل فورييه $\hat{u}(f)$ مُعطى بالعلاقة (31.4)، ويمكن استرجاع التابع $u(t)$ من العلاقة (32.4). سنقوم بهذا الإجراء على نحو أدق لإشارات \mathcal{L}_2 .

يستعرض الجدول التالي عدد قليل من تحويلات فورييه القياسية. تشير $u(t)$ و $\hat{u}(f)$ ، في الجدول، إلى زوج من تحويلات فورييه،

$$u(t) \leftrightarrow \hat{u}(f) \text{ و } v(t) \leftrightarrow \hat{v}(f) \text{ أيضاً.}$$

$$(33.4) \quad \text{خطية} \quad au(t) + bv(t) \leftrightarrow a\hat{u}(f) + b\hat{v}(f)$$

⁵⁷ يستخدم المصطلح $\hat{u}(f)$ بدل الأكثر عرفاً $U(f)$ ، هنا لأن الرموز بالأحرف الكبيرة تستخدم لتمييز المتحولات العشوائية عن قيم العينات. سنستخدم $\{U(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$ لاحقاً لتعبير عن العمليات العشوائية، حيث من أجل كل t ، يكون $U(t)$ متحولاً عشوائياً.

(34.4)	اقتران	$u^*(-t) \leftrightarrow \hat{u}^*(f)$
(35.4)	ازدواجية الزمن/التردد	$\hat{u}(t) \leftrightarrow u(-f)$
(36.4)	إزاحة في الزمن	$u(t - \tau) \leftrightarrow e^{-2\pi i f T} \hat{u}(f)$
(37.4)	إزاحة في التردد	$u(t) e^{2\pi i f_0 t} \leftrightarrow \hat{u}(f - f_0)$
(38.4)	تقييس for $T > 0$	$u(t/T) \leftrightarrow T \hat{u}(fT)$
(39.4)	تفاضل	$du(t)/dt \leftrightarrow 2\pi i f \hat{u}(f)$
(40.4)	تلاف	$\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) v(t - \tau) d\tau \leftrightarrow \hat{u}(f) \hat{v}(f)$
(41.4)	ترابط	$\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) v^*(\tau - t) d\tau \leftrightarrow \hat{u}(f) \hat{v}^*(f)$

ستستخدم هذه العلاقات بشكل كبير فيما سيأتي. تعد ازدواجية التردد/الزمن مهمة جداً لأنها تسمح بتحويل نتائج تحويلات فورييه إلى تحويلات فورييه العكسية وبالعكس.

يستعرض التمرين 23.4 علاقة التلاف (40.4). وتنتج العلاقة (41.4) من تصريح $\hat{v}(f)$ في (40.4).

ثمة حالتان خاصتان مفيدتان لأي زوج من تحويلات فورييه هما:

$$(42.4) \quad u(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(f) df$$

$$(43.4) \quad \hat{u}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) dt$$

تفيد هاتان المعادلتان في فحص الثوابت المضاعفة. كما تنتج نظرية بارسيفال (Parseval) أيضاً من تطبيق (42.4) في (41.4):

$$(44.4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} u(t) v^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(f) \hat{v}^*(f) df$$

وكنتيجة طبيعية، ينتج عن استبدال التابع $v(t)$ بالتابع $u(t)$ في (4.44) معادلة الطاقة لتحويلات فورييه وهي:

$$(45.4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(f)|^2 df$$

تسمى القيمة المربعة لتابع التردد، $|\hat{u}(f)|^2$ ، الكثافة الطيفية للتابع $u(t)$. إنها الطاقة لكل وحدة تردد (للترددات الموجبة والسالبة) في الإشارة. تنص معادلة الطاقة بأن الطاقة يمكن أن تحسب من خلال المكاملة إما على الوقت أو التردد.

نتيجة طبيعية أخرى من المعادلة (44.4)، نلاحظ أنه إذا كان $u(t)$ و $v(t)$ متعامدين، فإن $\hat{u}(f)$ و $\hat{v}(f)$ متعامدان؛ أي:

$$(46.4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} u(t) v^*(t) dt = 0 \quad \text{if and only if} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(f) \hat{v}^*(f) df = 0$$

يزودنا الجدول التالي بمجموعة مختصرة من أزواج التحويلات المفيدة والمألوفة:

$$(47.4) \quad \text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \leftrightarrow \text{rect}(f) = \begin{cases} 1 & \text{for } |f| \leq 1/2 \\ 0 & \text{for } |f| > 1/2 \end{cases}$$

$$(48.4) \quad e^{-2\pi t^2} \leftrightarrow e^{-2\pi f^2}$$

$$(49.4) \quad e^{-at}; t \geq 0 \leftrightarrow \frac{1}{a + 2\pi i f} \quad \text{for } a > 0$$

$$(50.4) \quad e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + (2\pi if)^2} \quad \text{for } a > 0$$

يعطي الجدول الأنف، بالمشاركة مع العلاقات الأنفة، مجموعة كبيرة من أزواج التحويل. ثمة كثير من الجداول المتوفرة على نطاق واسع أكثر شمولاً.

1.5.4 القياس والتكامل في \mathbb{R}

تعرف المجموعة $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$ بأنها مجموعة قابلة للقياس إذا كانت $\mathcal{A} \cap [-T/2, T/2]$ قابلة للقياس من أجل $T > 0$. تعطى تعريف قابلية القياس والقياس في الفقرة 2.3.4 بدلالة كامل الفترة $[-T/2, T/2]$ ، لكن التمرين 14.4 يؤكد أن تلك التعاريف هي في الواقع مستقلة عن T . أي إذا كان $\mathcal{D} \subseteq [-T/2, T/2]$ ، قابلاً للقياس نسبة إلى $[-T/2, T/2]$ ، فإن \mathcal{D} تكون بالتالي قابلة للقياس نسبة إلى $[-T_2/2, T_2/2]$ من أجل كل قيم $T_1 > T$ و $\mu(\mathcal{D})$ هو نفسه لكل هذه الفترات. ولذلك يُعرّف القياس بشكل واضح تماماً من أجل المجموعات ذات الفترات المحددة.

يُعرّف القياس μ لأجل مجموعة $\mathcal{A} \in \mathbb{R}$ قابلة للقياس كما يلي:

$$(51.4) \quad \mu(\mathcal{A}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \mu(\mathcal{A} \cap [-T/2, T/2])$$

بما أن $\mathcal{A} \cap [-T/2, T/2]$ يزداد في T ، فإن التفاوت في المجموعة الجزئية يعني أن $\mu(\mathcal{A} \cap [-T/2, T/2])$ يزداد أيضاً، وبالتالي فإن الحد في (51.4) يجب أن يكون إما قيمة متناهية أو لانهاية. فمثلاً، إذا أخذت \mathcal{A} لتكون \mathbb{R} نفسها، تصبح عندها $\mu(\mathbb{R}) = \infty$ و $\mu(\mathbb{R} \cap [-T/2, T/2]) = T$. إن احتمال أن يكون للمجموعات القابلة للقياس قياساً لانهاية هو الفرق الأساسي بين القياس على المجال $[-T/2, T/2]$ و \mathbb{R} .⁵⁸

تدعم النظرية 1.3.4 من دون تغيير المجموعات المعرفة في \mathbb{R} . وهكذا تكون مجموعة المجموعات القابلة للقياس على \mathbb{R} مغلقة تحت الاتحادات والتقاطعات المعدودة. قد يكون قياس المجموعة القابلة للقياس لانهاية في هذه الحالة، وإذا كان للمجموعة قياس محدود فإن متمتها (في \mathbb{R}) يجب أن يكون قياسها لانهاية.

يكون التابع الحقيقي $\{u(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ قابلاً للقياس إذا كانت المجموعة $\{t: u(t) \leq \beta\}$ قابلة للقياس من أجل كل $\beta \in \mathbb{R}$. وبصورة مشابهة تُعتبر المجموعة $\{u(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ قابلة للقياس إذا وفقط إذا كان التابع $u(t)\text{rect}(t/T)$ قابل للقياس من أجل $T > 0$. يكون التابع المركب $\{u(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$ قابلاً للقياس إذا كان القسم الحقيقي والقسم التخيلي للتابع $u(t)$ قابلين للقياس.

إذا كان $\{u(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ قابلاً للقياس وغير سالب، فإنه توجد مقاربتان لتكامل ليبسغ له. المقاربة الأولى باستخدام المعادلة (14.4) بشكل مباشر والمقاربة الثانية هي أولاً تقييم التكامل على المجال $[-T/2, T/2]$ ومن ثم الانتقال إلى الحد $T \rightarrow \infty$. كلتا المقاربتين تؤديان إلى النتائج نفسها⁵⁹.

من أجل التتابع الحقيقية القابلة للقياس $\{u(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ التي تأخذ كلتا القيمتين السالبة والموجبة، فإنه يمكن اتباع المقاربة نفسها كما في حالة المدة المتناهية. أي، بفرض أن $u^+(t)$ و $u^-(t)$ هما القيمتان الموجبة والسالبة للتابع $u(t)$. فإذا كان لواحدٍ من هذه القيم على الأكثر تكاملاً لا نهائياً، يكون تكامل التابع $u(t)$ معرفاً وله القيمة:

$$\int u(t)dt = \int u^+(t)dt - \int u^-(t)dt$$

أخيراً، يكون التابع $\{u(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$ معرفاً ليكون قابلاً للقياس إذا كانت الأجزاء الحقيقية والتخيلية للتابع $u(t)$ قابلة للقياس. إذا كانت تكاملات $\Re(u(t))$ و $\Im(u(t))$ معرفة، عندها:

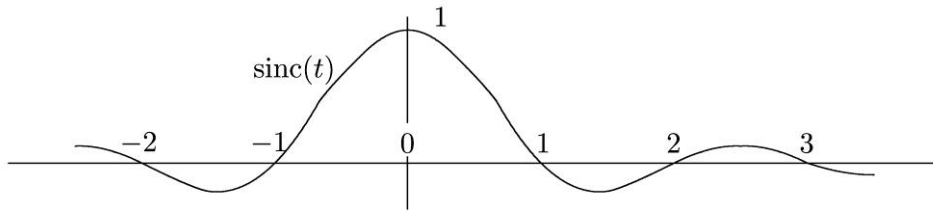
⁵⁸ في الواقع، إن تقييد القياس المتناهي هو الذي سمح بالتعريف البسيط لقابلية القياس بدلالة المجموعات ومكاملتها في الفقرة الفرعية 2.3.4.

⁵⁹ كما هو موضح في مثال التابع sinc، فإن هذا ليس صحيحاً بالضرورة بالنسبة للتتابع التي تأخذ قيماً موجبة وسالبة.

$$(52.4) \quad \int u(t)dt = \int \Re(u(t))dt + i \int \Im(u(t))dt$$

نقول عن التابع $\{u(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$ إنه ضمن صف التابع \mathcal{L}_1 إذا كان $u(t)$ قابلاً للقياس وتكامل ليبسغ لـ $|u(t)|$ متناهياً. وكما هو الحال مع التكامل على مدى فترة متناهية، فإنه للتابع \mathcal{L}_1 أجزاء حقيقية وتخيلية وكلاهما \mathcal{L}_1 . كما أن للأجزاء الموجبة والسالبة لتلك الأجزاء الحقيقية والتخيلية تكاملات متناهية.

مثال 1.5.4. تابع السينك sinc، يُرسم التابع $\text{sinc}(t) = \sin(\pi t) / \pi t$ كما هو موضح أدناه ويُزود مثلاً هاماً لهذه التعريفات. وبما أن $\text{sinc}(t)$ يقترب من الصفر مع زيادة t فقط مثل $1/t$ ، فإن تكامل ريمان للتابع $|\text{sinc}(t)|$ لا نهائي، ومع قليل من التفكير يمكن أن ترى أن تكامل ليبسغ أيضاً لا نهائي. وبالتالي لا يعتبر $\text{sinc}(t)$ من توابع \mathcal{L}_1 . وبطريقة مماثلة فإن للتوابع $\text{sinc}^+(t)$ و $\text{sinc}^-(t)$ تكاملات لا نهائية وبالتالي يكون تكامل ليبسغ للتابع $\text{sinc}(t)$ على المجال $(-\infty, \infty)$ غير معرف.



الشكل 8.4: التابع $\text{sinc}(t)$ يتقارب إلى الصفر مع ازدياد t .

نقول عن تكامل ريمان في هذه الحالة إنه غير مطابق، لكنه لا يزال يُحسب بالتكامل من $-A$ إلى $+A$ ويعدّها بأخذ الحد $A \rightarrow \infty$. نتيجة هذا التكامل هي 1، والذي يمكن إيجاده بسهولة من خلال علاقة فورييه (47.4) مجتمعة مع العلاقة (43.4). وهكذا، فإن التابع sinc هو مثال حيث يوجد تكامل ريمان ولكن لا يوجد تكامل ليبسغ. بمعنى أعمق، فإن المسألة هي مجرد واحدة من التعاريف، وأنه يمكن دائماً استخدام التكامل ليبسغ على المجال $[-A, A]$ والذهاب إلى الحد $A \rightarrow \infty$ للحصول على نفس الجواب الذي يزوده تكامل ريمان. نقول عن التابع $\{u(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$ إنه ضمن صف التابع \mathcal{L}_2 إذا كان $u(t)$ قابلاً للقياس وتكامل ليبسغ لـ $|u(t)|^2$ متناهياً. سنفترض أن كل إشارات المنبع والقناة توابع \mathcal{L}_2 . وكما أشرنا سابقاً، فإن أي تابع \mathcal{L}_2 على فترة زمنية متناهية هو أيضاً تابع \mathcal{L}_1 . وعلى كل حال، فإن توابع \mathcal{L}_2 للفترات اللانهائية ليس بالضرورة أن تكون \mathcal{L}_1 ؛ إن التابع sinc هو مثال جيد لهذه الحالة. وبما أن $\text{sinc}(t)$ يتناقص للقيمة $1/t$ فهو ليس تابع \mathcal{L}_1 . ومع ذلك فإن التابع $|\text{sinc}(t)|^2$ يتضائل لـ $1/t^2$ عندما تنتهي $t \rightarrow \infty$ ، لذلك يكون التكامل متناهياً والتابع $\text{sinc}(t)$ هو تابع \mathcal{L}_2 . والخالصة، يمكن معالجة القياس والتكامل على \mathbb{R} في الأساس بنفس الطريقة على المجال $[-T/2, T/2]$. يمكن أن يتم اقتطاع مجموعات النقاط والتوابع ذات العلاقة إلى المجال $[-T/2, T/2]$ مع ممر لاحق إلى الحد $T \rightarrow \infty$. وكما سيتضح أن هذا يتطلب بعض الرعاية مع التوابع التي ليست توابع \mathcal{L}_1 .

2.5.4 تحويلات فورييه للتوابع \mathcal{L}_2

لا توجد تحويلات فورييه لجميع التوابع، وعندما يكون لتابع ما تحويل فورييه فليس بالضرورة أن يوجد تحويل فورييه عكسي لهذا التابع. تناقش هذه الفقرة أولاً توابع \mathcal{L}_1 ومن ثم توابع \mathcal{L}_2 . والنتيجة الرئيسية هي أن لتوابع \mathcal{L}_1 دائماً تحويلات فورييه معرفة بشكل جيد، ولكن تحويل فورييه العكسي ليس دائماً ذو خصائص جيدة. للتوابع \mathcal{L}_2 دائماً تحويلات فورييه، ولكن فقط بمفهوم مكافئات التوابع \mathcal{L}_2 . هنا، تحويل فورييه العكسي موجود أيضاً في مكافئات التوابع \mathcal{L}_2 . ما يهمنا أساساً هو توابع \mathcal{L}_2 ، إلا أن النتائج بشأن توابع \mathcal{L}_1 ستساعد في فهم تحويلات التوابع \mathcal{L}_2 .

مسألة 1.5.4. بفرض أن التابع $\{u(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$ هو تابع \mathcal{L}_1 . يكون عندها $\hat{u}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-2\pi ift} dt$ موجوداً ويحقق العلاقة $|\hat{u}(f)| \leq \int |u(t)|dt$ من أجل كل $f \in \mathbb{R}$. علاوة على ذلك يكون $\{\hat{u}(u): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$ تابعاً مستمرّاً لـ f .

البرهان: لاحظ أن $|u(t)e^{-2\pi ift}| = |u(t)|$ من أجل كل قيم t و f الحقيقية. وبالتالي يكون $u(t)e^{-2\pi ift}$ تابعاً \mathcal{L}_1 من أجل كل f .

كما أن التكامل موجود ويحقق الحدود المُعطاة. وهذا يماثل البرهان بشأن معاملات سلسلة فورييه في النظرية 1.4.4. تبدأ المتابعة انطلاقاً من العلاقة البسيطة $\epsilon/\delta \in$ (انظر التمرين 4.24).

كمثال على ذلك، فإن التابع $u(t) = \text{rec}(t)$ هو تابع L_1 وتحويل فورييه له، معرفٌ من أجل كل f ، هو تابع مستمر $\text{sinc}(f)$. وكما ذكرنا سابقاً، فإن $\text{sinc}(f)$ ليس L_1 . إن تحويل فورييه العكسي لهذا التابع موجود على كامل t ، ما يُكافئ $\text{rec}(t)$ فيما عدا $t = \mp 1/2$ حيث تكون قيمته $1/2$. وتُطبَّق المسلمة 1.5.4 أيضاً على التحويلات العكسية وتُحقق أن التابع $\text{sinc}(f)$ لا يمكن أن يكون L_1 ، إذ إن تحويله العكسي غير مستمر.

سندرس فيما يلي التوابع L_2 . سنرى أن تحويلات فورييه التي تحدث عند أي نقطة $\int u(t)e^{-2\pi ift} dt$ ليست بالضرورة موجودة عند كل f ولكنها موجودة بوصفها حد لـ L_2 . في مقابل هذا التعقيد المضاف، فإن التحويل العكسي موجود تماماً بنفس المعنى. تسمى هذه النتيجة نظرية بلانشيرل Plancherel ولها تفسير دقيق بدلالة التقريبات على فترات زمنية وترددية متناهية.

من أجل أي تابع $\{u(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$ وأي عدد موجب A ، نُعرّف $\hat{u}_A(f)$ بوصفه تحويل فورييه لقطع التابع $u(t)$ على المجال $[-A, A]$ ؛

$$(53.4) \quad \hat{u}_A(f) = \int_{-A}^A u(t)e^{-2\pi ift} dt$$

إن التابع $u(t)\text{rect}(\frac{t}{2A})$ ذو فترة محدودة وبالتالي فهو تابع L_1 . يتبع ذلك أن $\hat{u}_A(f)$ تابع مستمر وموجود من أجل كل قيم f بحسب المسلمة الآتية. نتوقع عادة أن نأخذ الحد في العلاقة (53.4) على أنه $A \rightarrow \infty$ وذلك للحصول على تحويل فورييه $\hat{u}(f)$ ، ولكن هذا الحد ليس موجوداً بالضرورة من أجل كل قيم f . ومع ذلك تؤكد نظرية Plancherel أن هذا الحد موجود بمفهوم L_2 . وقد تم إثبات هذه النظرية في الفقرة 5A.1.

نظرية 1.5.4 (Plancherel، الجزء 1). من أجل أي تابع $L_2 \{u(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$ ، ثمة تابع $L_2 \{\hat{u}(f): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$ يحقق كلاً من

$$(54.4) \quad \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(f) - \hat{u}_A(f)|^2 df = 0$$

ومعادلة الطاقة (45.4).

وهذا لا يضمن فقط وجود تحويل فورييه (إلى مكافئة L_2)، ولكن يضمن أيضاً أنه يُقَرَّب اعتباطياً (في طاقة الفرق) بتحويلات فورييه المستمرة نُسخ التابع $\{u(t)\}$ المقطعة. ما يحدث هنا هو أن توابع L_2 يجب أن يكون جزء كبير من طاقتها ضمن حدود اقتطاعات كبيرة بما فيه الكفاية؛ لا يمكن أن يؤثر الجزء من التابع الموجود خارج هذه الحدود تأثيراً كبيراً على تقارب L_2 من تحويل فورييه.

يجري التعامل مع التحويل العكسي بصورة مماثلة تماماً. فمن أجل أي تابع $\{\hat{u}(f): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$ L_2 وأي B ، $0 < B < \infty$ ، نُعرّف

$$(55.4) \quad u_B(t) = \int_{-B}^B \hat{u}(f)e^{2\pi ift} df$$

وكما في السابق، فإن $u_B(t)$ تابع L_2 مستمر من أجل كل قيم B ، $0 < B < \infty$. يصبح الجزء الأخير من نظرية Plancherel كما يلي:

نظرية 2.5.4 (Plancherel، الجزء 2). من أجل أي تابع $L_2 \{u(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$ ، ليكن التابع $L_2 \{\hat{u}(f): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$ هو تحويل فورييه للنظرية 1.5.4 وليكن $u_B(t)$ يحقق (55.4). عندها يكون

$$(56.4) \quad \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(t) - u_B(t)|^2 dt = 0$$

إن التفسير هنا مشابه لما تم في الجزء الأول من النظرية. وعلى وجه التحديد بأن التحويلات العكسية للمقطعات الترددية المتناهية للتحويل تكون مستمرة وتتقارب إلى حد L_2 كـ $B \rightarrow \infty$. وتقول أيضاً أن حد L_2 هذا يكافئ التابع الأصلي $u(t)$. باستخدام الحد في مفهوم المتوسط التربيعي، يمكن التعبير عن جُزئي نظرية Plancherel بذكر أن كل تابع L_2 من الشكل $u(t)$ له تحويل فورييه $\hat{u}(f)$ يحقق كلاً من:

$$\hat{u}(f) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A u(t) e^{-2\pi i f t} dt$$

و

$$u(t) = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-B}^B \hat{u}(f) e^{2\pi i f t} df$$

أي أن تحويل فورييه العكسي للتابع $\hat{u}(f)$ هو مكافئ \mathcal{L}_2 لـ $u(t)$. يتقارب التكامل الأول عند أي نقطة إذا كان التابع $u(t)$ هو \mathcal{L}_1 أيضاً، ويتقارب في هذه الحالة عند أي نقطة إلى تابع مستمر $\hat{u}(f)$. إذا كان التابع $u(t)$ ليس تابع \mathcal{L}_1 ، عندها لا يحتاج التكامل الأول أن يتقارب عند أي نقطة. ويتصرف التكامل الثاني بطريقة مماثلة.

ومما قد يساعد في فهم نظرية Plancherel تفسيرها بدلالة إيجاد تحويلات فورييه باستخدام تكامل ريمان. يتم تعريف تكامل ريمان على منطقة لانهائية على أنه حدّ على مناطق متناهية. وهكذا فإن نسخة ريمان من تحويل فورييه هي اختصار لـ

$$(57.4) \quad \hat{u}(f) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A u(t) e^{-2\pi i f t} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \hat{u}_A(f)$$

وهكذا فإن نظرية Plancherel يمكن أن يُنظر لها على أنها استبدال لتكامل ريمان بتكامل ليبيغ واستبدال الحد عند أي نقطة (إن وجد) في العلاقة (57.4) بتقارب \mathcal{L}_2 . إن تحويل فورييه على الحدود المنتهية من A إلى $-A$ مستمر وذو أداء جيد، لذلك فإن الفرق الرئيس يكون في استخدام تقارب \mathcal{L}_2 عندما $A \rightarrow \infty$.

وكمثال على نظرية Plancherel، ليكن لدينا التابع $u(t) = \text{rect}(t)$ ، عندها يكون $\hat{u}_A(f) = \text{sinc}(f)$ من أجل كل قيم $A \geq 1/2$ ، وبالتالي $\hat{u}(f) = \text{sinc}(f)$. من أجل التحويل العكسي، يكون $u_B(t) = \int_{-B}^B \text{sinc}(f) df$ مَشَوَّش للحساب ولكن يمكن أن ننظر إليه يقارب $\text{rect}(t)$ فيما تنتهي $B \rightarrow \infty$ ما عدا عند $t = \pm 1/2$ ، حيث يساوي $1/2$. عند الزمن $t = \pm 1/2$ تكون قيمة التحويل العكسي $1/2$ ، بينما يكون التابع $u(t) = 1$.

لنأخذ مثلاً آخر، لنعتبر التابع $u(t) = 1$ حيث $u(t) = 1$ من أجل القيم الجذرية ضمن المجال $t \in [0, 1]$ و $u(t) = 0$ بخلاف ذلك. وبما أن هذه القيمة هي صفر عند أي نقطة تقريباً، فإن تحويل فورييه $\hat{u}_A(f)$ هو 0 لكل قيم f والتحويل العكسي أيضاً 0، أي أنه مكافئ \mathcal{L}_2 للتابع $u(t)$. أخيراً يوضح المثال 5A.1 في الفقرة 5A.1 تابعاً \mathcal{L}_1 شاذاً، $g(t)$ يكون غير مستمر في كل مكان. ويكون تحويله $\hat{g}(f)$ مقيداً ومستمرًا بالمسلمة 1.5.4، ولكنه ليس تابع \mathcal{L}_1 . هنا أيضاً التحويل العكسي غير مستمر في أي نقطة ضمن المجال $(0, 1)$ وغير محدد على كل فترة جزئية. يوضح هذا المثال لماذا قد يكون التحويل العكسي لتابع مستمر شاذاً، مما يعزز تركيزنا على توابع \mathcal{L}_2 بدلاً من التركيز التقليدي على مفاهيم مثل الاستمرارية.

فيما يلي، سننظر إلى تقارب \mathcal{L}_2 ، كما في نظرية Plancherel، على أنه جيد وطبيعي على نحو متزايد. إذا اعتبرنا أن تابعين مختلفين، لفرقهما طاقة صفرية، متساويان (شكلياً، على أنهما مكافئ \mathcal{L}_2) فإن هذا يسمح لنا ويساعدنا في تجنب كثير من الجزئيات، من قبيل كيفية تعريف التابع غير المستمر في نقاط عدم استمراريته. في هذه الحالة، فإن الحس الهندسي والرياضيات المتطورة تصلان إلى نفس النتيجة. وأخيراً، فإنه يمكن إثبات أن كل علاقات تحويلات فورييه في العلاقات من (33.4) إلى (41.4) باستثناء التعريفات التي تشمل توابع \mathcal{L}_2 (انظر التمارين 26.4 و 15.5). إن مُشتق التابع \mathcal{L}_2 ليس بالضرورة أن يكون \mathcal{L}_2 وليس من الضروري أن يكون له تحويل فورييه مُعرّف.

6.4 تحويل فورييه في الزمن المُقطّع ونظرية أخذ العينات

إن تحويل فورييه في الزمن المُقطّع (DTFT) هو ازدواجية الوقت/التردد لسلسلة فورييه. وسنرى أن هذا التحويل يقود مباشرة إلى نظرية أخذ العينات.

1.6.4 تحويل فورييه في الزمن المُقطّع

ليكن $\hat{u}(f)$ تابع \mathcal{L}_2 للتردد، غير صفري فقط من أجل $-W \leq f \leq W$. يمكن عندها تعريف تحويل فورييه في الزمن المقطّع DTFT للتابع $\hat{u}(f)$ في المجال $[-W, W]$ بالعلاقة

$$(58.4) \quad \hat{u}(f) = \text{l. i. m.} \sum_k u_k e^{-2\pi i k f / (2W)} \text{rect}\left(\frac{f}{2W}\right)$$

حيث تُعطى معاملات تحويل فورييه في الزمن المقطع $\{u_k; k \in \mathbb{Z}\}$ بالعلاقة:

$$(59.4) \quad u_k = \frac{1}{2W} \int_{-W}^W \hat{u}(f) e^{2\pi i k f / (2W)} df$$

إن هذه العلاقات هي ذاتها معادلات سلسلة فورييه، باستبدال $f \rightarrow t$ ، $2W \rightarrow T$ ، و $e^{2\pi i \dots}$ بـ $e^{-2\pi i \dots}$. لاحظ أن للتابع $\hat{u}(f)$ تحويل فورييه عكسي $u(t)$ وبالتالي فهو محدود الحزمة القاعدية ضمن المجال $[-W, W]$. وكما سيتم عرضه في وقت لاحق، فإن نظرية أخذ العينات تربط عينات إشارة الحزمة القاعدية بالمعاملات في (59.4).

تُطبَّق نظرية سلسلة فورييه (النظرية 1.4.4) بوضوح على العلاقتين (58.4) و (59.4) مع التبديلات بالرموز الآتية الذكر؛ نعيدها هنا للسهولة.

نظرية 1.6 (DTFT). ليكن $\{\hat{u}(f): [-W, W] \rightarrow \mathbb{C}\}$ تابع \mathcal{L}_2 . عندها، ومن أجل $k \in \mathbb{Z}$ ، يوجد تكامل ليبسغ (59.4) يُحقق العلاقة $|u_k| \leq \frac{1}{2W} \int |\hat{u}(f)| df < \infty$. علاوة على ذلك نجد أن:

$$(60.4) \quad \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_{-W}^W \left| \hat{u}(f) - \sum_{k=-\ell}^{\ell} u_k e^{-2\pi i k f / (2W)} \right|^2 df = 0 \quad \text{and}$$

$$(61.4) \quad \int_{-W}^W |\hat{u}(f)|^2 df = 2W \sum_{k=-\infty}^{\infty} |u_k|^2$$

أخيراً، إذا كان $\{u_k; k \in \mathbb{Z}\}$ تسلسلاً لأعداد عُقدية ويحقق $\sum_k |u_k|^2 < \infty$ ، عندها، يوجد تابع \mathcal{L}_2 $\{\hat{u}(f): [-W, W] \rightarrow \mathbb{C}\}$ يحقق العلاقتين (60.4) و (61.4).

وكما في السابق، تُختصر العلاقة (58.4) إلى العلاقة (60.4). مرة أخرى، يدل هذا على أن أي دقة تقريب مطلوبة، بدلالة القدرة، يمكن أن تتحقق من خلال استخدام حدود كافية في هذه السلسلة.

تزود كل من سلسلة فورييه وتحويل فورييه في الزمن المُقطع DTFT تحويلاً من واحد إلى واحد (بمعنى تقارب \mathcal{L}_2) بين تابع وسلسلة من أرقام عُقدية. في حالة سلسلة فورييه، نبدأ عادةً بتابع $u(t)$ ونستخدم سلسلة من المعاملات لتمثيل التابع (إلى مكافئ \mathcal{L}_2). أما في حالة تحويل فورييه في الزمن المُقطع DTFT، نبدأ عادةً بالتسلسل ونستخدم تابع التردد لتمثيل التسلسل. وبما أن التحويلات تصلح في كلا الاتجاهين، يمكن أن نعتبر التابع والتسلسل أساسيان على نحو متساوٍ.

2.6.4 نظرية أخذ العينات

يُستخدم تحويل فورييه في الزمن المُقطع DTFT لإثبات نظرية أخذ العينات، والتي بدورها سوف تساعد في تفسير التحويل DTFT. يُعبّر التحويل DTFT في العلاقة (58.4) عن التابع $\hat{u}(f)$ بوصفه مجموع مُتَّوَلِّ لمقطعات جيبيية في التردد:

$$(62.4) \quad \hat{u}(f) = \text{l. i. m.} \sum_k u_k \hat{\phi}_k(f), \quad \text{where} \quad \hat{\phi}_k(f) = e^{-2\pi i k f / (2W)} \text{rect}\left(\frac{f}{2W}\right)$$

بتجاهل أية أسئلة عن التقارب حالياً، يعطى تحويل فورييه العكسي للتابع $\hat{u}(f)$ بالعلاقة $u(t) = \sum_k u_k \phi_k(t)$ حيث إن $\phi_k(t)$ هي التحويل العكسي لـ $\hat{\phi}_k(f)$. بما أن التحويل العكسي⁶⁰ لـ $\text{rect}\left(\frac{f}{2W}\right)$ هو $2W \text{sinc}(2Wt)$ ، فإن علاقة الإزاحة الزمنية تدل على أن

⁶⁰ هذه هي ثنائية الزمن/التردد في (47.4). إن التابع $\hat{u}(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2W}\right)$ هو تابع \mathcal{L}_1 وتابع \mathcal{L}_2 أيضاً؛ التابع $u(t)$ مستمر في \mathcal{L}_2 ولكن ليس في \mathcal{L}_1 . من نظرية بلانشيريل، فإن تحويل $u(t)$ ، بمعنى \mathcal{L}_2 ، هو $\hat{u}(f)$.

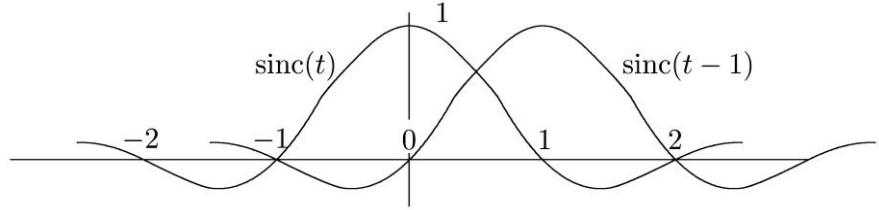
التحول العكسي لـ $\hat{\phi}_k(f)$ هو:

$$(63.4) \quad \phi_k(t) = 2W \operatorname{sinc}(2Wt - k) \leftrightarrow \hat{\phi}_k(f) = e^{-2\pi i k f / (2W)} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2W}\right)$$

وبالتالي فإن $u(t)$ ، التحويل العكسي لـ $\hat{u}(f)$ ، يُعطى بالعلاقة:

$$(64.4) \quad u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k \phi_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2W u_k \operatorname{sinc}(2Wt - k)$$

وبما أن مجموعة المقطعات الجيبية $\{\hat{\phi}_k; k \in \mathbb{Z}\}$ متعامدة، فإن توابع السنك $\{\phi_k; k \in \mathbb{Z}\}$ أيضاً متعامدة من العلاقة (46.4).



الشكل 9.4: رسم توضيحي للتابع $\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ والتابع $\operatorname{sinc}(t-1)$. لاحظ أن هذه التوابع المتبادعة متعامدة مع بعضها.

لاحظ أن $\operatorname{sinc}(t)$ يساوي 1 من أجل $t = 0$ ويساوي 0 من أجل أي قيمة t صحيحة أخرى. لذلك إذا قُدرت العلاقة (46.4) على أساس $t = \frac{k}{2W}$ تكون النتيجة هي $u\left(\frac{k}{2W}\right) = 2W u_k$ وذلك من أجل أي عدد صحيح k . وبتعويض هذا في العلاقة (46.4) تُعرّف النتائج في المعادلة باسم معادلة أخذ العينات.

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u\left(\frac{k}{2W}\right) \operatorname{sinc}(2Wt - k)$$

وبحسب هذه العلاقة، فإن التابع محدود الحزمة القاعدية يوصّف بعيناته عند أزمنة $T = 1/(2W)$. وتكون معادلة أخذ العينات، بدلالة هذا الفاصل الزمني للعينات، على الشكل التالي:

$$(65.4) \quad u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T} - k\right)$$

توضح النظرية التالية هذا الأمر. انظر الفقرة 5A.2 لبرهان شامل.

نظرية 2.6.4 (نظرية أخذ العينات). *ليكن لدينا $\{u(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$ تابع L_2 مستمر ومحدود الحزمة القاعدية بـ W . توصّف عندها العلاقة (56.4) التابع $u(t)$ بدلالة عيناته المتبادعة بمقدار T حيث $T = 1/2W$. يتقارب المجموع في (56.4) إلى $u(t)$ من أجل كل $t \in \mathbb{R}$ وتُحدّد $u(t)$ عند كل زمن t بالعلاقة $|u(t)| \leq \int_{-W}^W |\hat{u}(f)| df < \infty$.*

مثال 1.6.4 (تابع الحزمة القاعدية الغير المستمر). ليكن $u(t)$ تابع حزمة قاعدية مستمر L_2 محدود بـ $|f| \leq 1/2$ وليكن $v(t) = u(t) + 1$ من أجل كل الأعداد غير الصحيحة t و $v(t) = u(t)$ من أجل الأعداد الصحيحة t . عندها يكون $u(t)$ و $v(t)$ متكافئين ولكن عيناتهم تختلف بمقدار عدد صحيح في كل مرة بـ 1. وتحويلات فورييه متشابهة ونقول $\hat{u}(f)$ لأن الاختلافات في النقاط المعزولة ليس لها أي تأثير على التحويل. وطالما أن $\hat{u}(f)$ غير صفري ضمن المجال $[-W, W]$ فهو تابع L_1 . وفقاً لازدواجية الوقت/التردد للمسلمة 1.5.4 فإن تحويل فورييه العكسي الذي يحدث عند أي نقطة $\hat{u}(f)$ هو تابع مستمر وليكن $u(t)$. ومن بين كل إشارات L_2 المكافئة والتي لها تحويل $\hat{u}(f)$ ، فقط $u(t)$ إشارة مستمرة، وإن $u(t)$ هي التي تحقق نظرية أخذ العينات.

إن التابع $v(t)$ مساوٍ للتابع $u(t)$ باستثناء الانقطاعات المتفرقة عند كل نقطة عدد صحيح. ويمكن النظر إلى $v(t)$ على أنه تابع ذو حزمة قاعدية محدود أيضاً، ولكن من الواضح أن $v(t)$ ليس له معنى فيزيائياً وليس هو التابع المستمر وفق النظرية.

يوضح المثال أعلاه الغموض حول معنى التوابع المحدودة الحزمة القاعدية. يذكر أحد التعاريف المعقولة أن تابعاً $u(t)$ من الصف L_2 يكون محدود الحزمة القاعدية إلى W إذا كان $\hat{u}(f)$ يساوي 0 من أجل $|f| > W$. ويبين تعريف معقول آخر أن $u(t)$ تابع محدود إلى W إذا كان $u(t)$ هو تابع تحويل فورييه العكسي الذي يحدث عند أي نقطة للتابع $\hat{u}(f)$ ويساوي 0 من أجل $|f| > W$. وفقاً للتعريف الثاني فإنه من أجل $\hat{u}(f)$ مُعطى، يوجد تابع مميز $u(t)$ وهو تابع مستمر؛ إن كل التوابع L_2 المكافئة لـ $u(t)$ محدودة الحزمة وفقاً للتعريف الأول. وجميعها فيما عدا $u(t)$ غير مستمرة وتخالف فعلياً معادلة أخذ العينات. من الواضح أن التعريف الثاني هو المُفضَّل من الناحية الهندسية والرياضية.

تعريف: يكون التابع L_2 محدود الحزمة القاعدية بـ W إذا كان يمثل التحويل العكسي عند أي نقطة تقريباً لتابع L_2 من الشكل $\hat{u}(f)$ والذي يساوي الصفر من أجل $|f| > W$. وعلى نحو مكافئ، يكون التابع محدود الحزمة القاعدية بـ W إذا كان مستمراً وكان تحويل فورييه له يساوي 0 من أجل $|f| > 0$.

يمكننا الآن إجراء المزيد من الشرح والتفسير لتحويل فورييه في الزمن المُقطَّع DTFT. لكل تابع L_2 محدود الحزمة القاعدية بالعلاقة (58.4). تكون المعاملات u_k لتحويل فورييه في الزمن المُقطَّع عينات متدرجة، $T_u(kT)$ للتابع $u(t)$ حيث $T = \frac{1}{2W}$. لنضعها بطريقة مختلفة قليلاً، إن تحويل فورييه في الزمن المُقطَّع في العلاقة (58.4) هو تحويل فورييه لمعادلة أخذ العينات (65.4) باعتبار $u_k(kT) = u_k/T$ ⁶¹.

ومن الغريب إلى حد ما أن نظرية أخذ العينات تشمل التقارب الذي يحدث عند أي نقطة تقريباً، في حين أن تحويلها، تحويل فورييه في الزمن المُقطَّع DTFT يشمل فقط مكافئات L_2 . والسبب هو أن التابع $\hat{u}(f)$ في تحويل فورييه في الزمن المُقطَّع DTFT هو تابع L_1 ولكنه ليس بالضرورة مستمراً، بينما تحويله العكسي $u(t)$ مستمر بالضرورة ولكن ليس بالضرورة تابع L_1 .

إن مجموعة التوابع $\{\hat{\phi}_k(f); k \in \mathbb{Z}\}$ في العلاقة (63.4) مجموعة متعامدة، إذ إن الفترة $[-W, W]$ تحتوي على عدد صحيح من الدورات من كل منحني جيبي. بالتالي، ومن المعادلة (64.4)، نجد أن مجموعة توابع السنك في معادلة أخذ العينات هي أيضاً متعامدة. ومن ثمَّ فإن كلاً من تحويل فورييه في الزمن المُقطَّع DTFT وتوسع نظرية أخذ العينات هي توسعات متعامدة. ويتبع ذلك (كما سيتم عرضه بعناية لاحقاً) أن معادلة الطاقة،

$$(66.4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |u(kT)|^2$$

صالحة من أجل أي تابع $u(t)$ مستمر من L_2 محدود الحزمة القاعدية ضمن $[-W, W]$ و $T = \frac{1}{2W}$. بدلالة ترميز المنبع، تنص نظرية أخذ العينات على أن أي تابع $u(t)$ من L_2 محدود الحزمة القاعدية لـ W يمكن أن تؤخذ منه عينات بمعدل $2W$ (أي على فترات $T = \frac{1}{2W}$)، ويمكن بعد ذلك استخدام العينات لإعادة بناء التابع على نحو تام. وهذا يختلف قليلاً عن حالة ترميز القناة حيث يتم مطابقة تتابع من قيم الإشارة إلى تابع يمكن فيما بعد إعادة بناء الإشارات منه. تُبيِّن نظرية أخذ العينات أن أي تابع L_2 محدود الحزمة القاعدية يمكن تمثيله بعيناته. تُغطي النظرية التالية والمبرهنة في الفقرة 5A.2 تباين ترميز القناة.

نظرية 3.6.4 (نظرية أخذ العينات للنقل). ليكن $\{a_k; k \in \mathbb{Z}\}$ تسلسلاً كفيئاً من أعداد عقدية تُحقق $\sum_k |a_k|^2 < \infty$ عندها تتقارب $\sum_k a_k \text{sinc}(2Wt - k)$ في أي نقطة تقريباً إلى تابع L_2 مُحدَّد مستمر، $\{u(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$ محدود الحزمة القاعدية لـ W . ويحقق العلاقة $a_k = u(\frac{k}{2W})$ من أجل جميع قيم k .

3.6.4 ترميز المنبع باستخدام الإشارات المُعتانة

تناقش المقدمة والشكل 1.4 أخذ العينات من إشارة تماثلية $u(t)$ وتكميم العينات بوصفهما خطوتين أوليتين في ترميز المصدر التماثلي.

⁶¹ لاحظ أن تحويل فورييه في الزمن المُقطَّع DTFT ليس ثنائية الزمن/التردد لسلسلة فورييه بل هو تحويل فورييه لمعادلة أخذ العينات.

تناقش الفقرة 2.4 طريقة موازية تُنشر فيها المقطعات المتتالية $\{u_m(t)\}$ من المصدر بسلسلة فورييه، وبعد ذلك يجري تكميم معاملات سلسلة فورييه. يتم في هذه الحالة الأخيرة إعادة بناء المقطعات المستلمة $\{v_m(t)\}$ من المعاملات المكّمة. تعطي العلاقة (7.4) الطاقة في $u_m(t) - v_m(t)$ كنسخة مقيسة من مجموع فروق المعاملات المربعة. تعالج هذه الفقرة العلاقة المماثلة عند تكميم العينات لإشارات محدودة الحزمة القاعدية.

إذا كان لدينا تابع مستمر $u(t)$ محدود الحزمة القاعدية لـ W ، فإن العينات $\{(kT); k \in \mathbb{Z}\}$ المأخوذة على فترات $T = 1/2(2W)$ توصف التابع. إذا تم تكميم $u(kT)$ إلى $v(kT)$ من أجل كل k ، وأعيد تركيب $u(t)$ بوصفه $v(t) = \sum_k v(kT) \text{sinc}(\frac{t}{T} - k)$ عندها، يمكن من (66.4) إعطاء الخطأ التربيعي المتوسط وفق العلاقة:

$$(67.4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |u(t) - v(t)|^2 dt = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |u(kT) - v(kT)|^2$$

وبالتالي فمهما كانت طريقة التكميم المستخدمة لجعل الخطأ التربيعي المتوسط أصغرياً بين سلسلة من العينات، فإن الاستراتيجية ذاتها تستخدم لجعل الخطأ التربيعي المتوسط أصغرياً بين الإشارات الموافقة.

إن النتائج في الفصل الثالث، والمتعلقة بالتشوه التربيعي المتوسط لمكّمات الشعاع المنتظم، تعطي التشوه عند أي معدل بتات معطى لكل عينة كتاب خطي لقيمة المتوسط التربيعي لعينات المنبع. إن كان لعينة قيمة متوسط تربيعي لانهائية، عندها إما أن يكون معدل التكميم لا نهائياً أو أن يكون التشوه التربيعي المتوسط لانهائياً. تُطبّق هذه النتيجة نفسها على الأشكال الموجية. يظهر هنا لماذا يكون التقيد إلى \mathcal{L}_2 مهماً. وهي تظهر أيضاً لماذا تكون النتائج العامة عن إشارات \mathcal{L}_2 مهمة.

تحدث نظرية أخذ العينات عن قصة اختيار عينات الإشارات محدودة الحزمة القاعدية. لكن إشارات المنبع الفيزيائية ليست محدودة تماماً لبعض الترددات W ، بل عادةً ما تتناقص أطرافها بسرعة أعلى من بعض الترددات الاسمية W . فعلى سبيل المثال، تبدأ أطراف الصوت بالتناقص قبل بلوغ تردد القطع الاسمي عند 4 كيلو هرتز، ولكنها في كثير من الأحيان تمتلك كميات صغيرة من الطاقة لغاية التردد 20 كيلو هرتز. ولهذا فإن العينات التي بمعدل $2W$ لا توصف الموجة تماماً، مما يؤدي إلى مصدر إضافي للخطأ، يدعى التباس. سوف يناقش التباس بشكل أعمق في الفقرتين الجزئيتين التاليتين.

ثمة مسألة أخرى مؤسفة لنظرية أخذ العينات. أن تابع sinc هو تابع غير صفري في كل الأزمنة غير الصحيحة. ومن ثم فإن إعادة بناء الموجة في المُستقبل⁶² من مجموعة من العينات يتطلب تأخيراً زمنياً لا نهائياً. عملياً، يمكن أن يتم تقطيع توابع السنك sinc ، ولكن موجة السنك تتناقص للصفر عند $1/t$ ، وهذا بطيء على نحو غير عملي. بالتالي فالنتيجة الواضحة أن نظرية أخذ العينات ليست عملية تماماً كما يبدو للوهلة الأولى.

4.6.4 نظرية أخذ العينات لأجل $[\Delta - W, \Delta + W]$

وكما يتم تعميم سلسلة فورييه على فترات زمنية مُتمركزة عند زمن كفي Δ ، يتم تعميم تحويل فورييه في الزمن المُقَطَّع DTFT على فترات ترددية مُتمركزة عند تردد كفي Δ .

ليكن $\hat{v}(f): [\Delta - W, \Delta + W] \rightarrow \mathbb{C}$ تابع ترددي \mathcal{L}_2 . فيكون تحويل فورييه في الزمن المُقَطَّع DTFT المُنزاح للتابع $\hat{v}(f)$ هو:

$$(68.4) \quad \hat{v}(f) = \text{l.i.m.} \sum_k v_k e^{-2\pi i k f / (2W)} \text{rect} \left(\frac{f - \Delta}{2W} \right) \quad \text{where}$$

$$(69.4) \quad v_k = \frac{1}{2W} \int_{\Delta - W}^{\Delta + W} \hat{v}(f) e^{2\pi i k f / (2W)} df$$

⁶² تذكر أن زمن المستقبل المرجعي متأخر عن المنبع بثابت τ . بالتالي فإن $v(t)$ ، تقدير المُستقبل للإشارة $u(t)$ عند زمن المنبع t ، يُعاد تشكيله عند زمن مصدر $t + \tau$. ومع معادلة أخذ العينات، حتى ولو جرى تقريب تابع السنك، تبقى τ كبيرة على نحو غير عملي.

إن العلاقة (68.4) هي نشر متعامد،

$$(67.4) \quad \hat{v}(f) = \text{l. i. m.} \sum_k v_k \hat{\theta}_k(f) \quad \text{where} \quad \hat{\theta}_k(f) = e^{-2\pi i k f / (2W)} \text{rect} \left(\frac{f - \Delta}{2W} \right)$$

يمكن حساب تحويل فورييه العكسي لـ $\hat{\theta}_k(f)$ بالإزاحة والتقييس ليكون:

$$(70.4) \quad \theta_k(t) = 2W \text{sinc}(2Wt - k) e^{2\pi i \Delta (t - \frac{k}{2W})} \leftrightarrow \hat{\theta}_k(f) = e^{-2\pi i k f / (2W)} \text{rect} \left(\frac{f - \Delta}{2W} \right)$$

ليكن $v(t)$ تحويل فورييه العكسي للتابع $\hat{v}(f)$.

$$v(t) = \sum_k v_k \theta_k(t) = \sum_k 2W v_k \text{sinc}(2Wt - k) e^{2\pi i \Delta (t - \frac{k}{2W})}$$

من أجل $t = \frac{k}{2W}$ ، يكون الحد الأنف ذو الترتيب k فقط غير صفري، ويكون $v(\frac{k}{2W}) = 2W v_k$. يُعمم هذا معادلة أخذ العينات إلى الحزمة الترددية $[\Delta - W, \Delta + W]$ ،

$$v(t) = \sum_k v\left(\frac{k}{2W}\right) \text{sinc}(2Wt - k) e^{2\pi i \Delta (t - \frac{k}{2W})}$$

بتعريف فترة أخذ العينات $T = 1/(2W)$ كما في السابق، تصبح العلاقة

$$(71.4) \quad v(t) = \sum_k v(kT) \text{sinc}\left(\frac{t}{T} - k\right) e^{2\pi i \Delta (t - kT)}$$

تُطبق النظريتان 2.6.4 و 3.6.4 على هذه الحالة الأكثر عمومية. أي، بفرض $v(t) = \int_{\Delta-W}^{\Delta+W} \hat{v}(f) e^{2\pi i f t} df$ يكون التابع $v(t)$ محدداً ومستمرًا وتتقارب السلسلة في (71.4) من أجل كل قيم t . وعلى نحو مشابه، إذا كان $\sum_k |v(kT)|^2 < \infty$ ، فإنه يوجد تابع \mathcal{L}_2 مستمر ووحيد $\mathbb{C} \rightarrow \{v(t): \Delta - W, \Delta + W\}$ ، $W = 1(2T)$ بقيم العينة هذه.

7.4 التزييف والنشر الجيبي المُثَقَّل

سيتم في هذا القسم تطوير النشر الجيبي المتباعد T -spaced sinusoid expansion للتوابع الكيفية (العشوائية) \mathcal{L}_2 ذات النشر المتعامد. يشبه هذا التوسع كثيراً توسع الاقتران الجيبي المتباعد الذي نوقش في وقت سابق، باستثناء مجموعه من الأطوال الموجية المتعامدة التي تتألف من إزاحات زمنية وترددية للتابع الجيبي بدلاً من التابع المستطيل. ثم يتم استخدام هذا الامتداد لمناقشة مفهوم هام من درجات الحرية. أخيراً، يستخدم هذا التوسع نفسه لتطوير مفهوم التعرج. وهذا سوف يساعد في فهم أخذ العينات للتوابع التي هي تقريباً فقط محدودة ترددياً.

1.7.4 الامتداد الجيبي المُثَقَّل بتابع السنك (sinc) المتباعد بمقدار T

ليكن $\hat{u}(f) \rightarrow u(t)$ زوج تحويل \mathcal{L}_2 كفي، ولنقطع $\hat{u}(f)$ إلى فترات⁶³ ذات عرض $2W$ ، فيكون لدينا:

$$\hat{u}(f) = \text{l. i. m} \sum_m \hat{v}_m(f) \quad \text{where} \quad \hat{v}_m(f) = \hat{u}(f) \text{rect} \left(\frac{f}{2W} - m \right)$$

مع ملاحظة أن $\hat{v}_0(f)$ ليس صفرياً في المجال $[-W, W]$ ، وهذا يرتبط مع تابع $v_0(f) \in \mathcal{L}_2$ محدد بحزمة قاعدية في W . بشكل أعم، من أجل m عدد صحيح فإن $\hat{v}_m(f)$ ليس صفرياً فقط في المجال $[\Delta - W, \Delta + W]$ من أجل $\Delta = 2Wm$. نجد من المعادلة (71.4) أن التحويل العكسي مع $T = \frac{1}{2W}$ يحقق:

⁶³ يمكن إهمال النقاط الحدودية بين مقاطع التردد، كما في حالة المقاطع الزمنية.

$$\begin{aligned} v_m(t) &= \sum_k v_m(kT) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T} - k\right) e^{2\pi i \left(\frac{m}{T}\right)(t-kT)} \\ (72.4) \quad &= \sum_k v_m(kT) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T} - k\right) e^{2\pi i m t / T} \end{aligned}$$

ويجمع كل هذه المقطعات الترددية نجد:

$$(73.4) \quad u(t) = \text{l. i. m.} \sum_m v_m(t) = \text{l. i. m.} \sum_{m,k} v_m(kT) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T} - k\right) e^{2\pi i m t / T}$$

وهذا يتقارب في L_2 ، ولكنه لا يتقارب بالضرورة بالنقاط بسبب الجمع اللانهائي في m . هذا يعبر عن تابع كفي في L_2 هو $u(t)$ بدلالة عينات كل شريحة ترددية $v_m(t)$ من $u(t)$.

يشكل هذا توسعاً متعامداً في مجموعة مضاعفة الفهرسة من التوابع:

$$(74.4) \quad \left\{ \psi_{m,k}(t) = \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T} - k\right) e^{2\pi i m t / T}; m, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

وهذه هي الإزاحات الزمنية والترددية للتابع الأساسي $\psi_{0,0}(t) = \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$. الإزاحات الزمنية هي من مضاعفات T والإزاحات الترددية هي من مضاعفات $1/T$. تسمى هذه المجموعة من التوابع المتعامدة مجموعة التوابع الجيبية المثقلة بتابع sinc والمتباعدة بمقدار T . تتشابه توابع الجيبية المثقلة بتوابع sinc والمتباعدة بمقدار T مع التوابع الجيبية المقطوعة والمتباعدة بمقدار T ، بشكل كبير. كل تابع في المجموعة الأولى هو ترجمة الزمن والتردد للتابع $\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$. وكل تابع في المجموعة الثانية هو ترجمة الزمن والتردد للتابع $\operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$. تتكون كلا المجموعتين من توابع المنفصلة عن بعضها بعضاً بمضاعفات T في الزمن و $1/T$ في التردد.

2.7.4 درجات الحرية

تنص قاعدة هامة مبسطة لمهندسي الاتصالات على أن صف التوابع الحقيقية المحددة بالحزمة القاعدية بالقيمة W_0 والمحددة زمنياً بالفاصل $[T_0/2, -T_0/2]$ يكون لها نحو $2T_0W_0$ درجة حرية حقيقية.

إذا كان $1 \gg T_0W_0$. وهذا يعني أن أي تابع ضمن هذا الصف يمكن أن يحدد تقريباً من خلال تعيين نحو $2T_0W_0$ عدد حقيقي كمعاملات للنشر المتعامد. تتحقق القاعدة نفسها للتوابع العقدية بدلالة درجات الحرية العقدية.

يعد هذا المفهوم الغامض إلى حد ما صعب التحقيق بدقة لأن التوابع المدودة زمنياً لا يمكن أن تكون محددة ترددياً والعكس بالعكس، ومع ذلك، فإن هذا المفهوم مهم جداً ولا يمكن ببساطة تجاهله كونه يفترق إلى الدقة فقط وسوف يجري إعطاء العديد من الأمثلة لاحقاً.

أولاً، بتطبيق نظرية أخذ العينات لتوابع حقيقية (عقدية) $u(t)$ محددة حصرياً بحزمة قاعدية W_0 . تحدد $u(t)$ بعدد من عيناتها الحقيقية (العقدية) بمعدل $2W_0$. إذا كانت العينات غير صفرية فقط ضمن الفاصل الزمني $[-T_0/2, T_0/2]$ ، فيتوفر عند ذلك حوالي $2T_0W_0$ عينة غير صفرية، وهذه تعرف التابع $u(t)$ ضمن هذا الصف. تم هنا بدقة تحديد صف من التوابع، إلا أنه جرى استبدال التوابع ذات القيم الصفرية خارج الفاصل بتوابع ذات عيّنات صفرية خارج المجال.

ثانياً، نعتبر التوابع العقدية $u(t)$ التي هي مرة أخرى محددة حصرياً بحزمة قاعدية W_0 ، ولكن نقوم الآن بتطبيق النشر الجيبية المثقل بتابع sinc حيث $W = W_0/(2n + 1)$ لبعض الأعداد الصحيحة الموجبة n . وهذا يعني تقسيم المجال $[-W_0, W_0]$ إلى $2n + 1$ شريحة ويتم نشر كل شريحة في نظرية أخذ العينات. تم تحديد كل شريحة من العينات بمعدل $2W$ ، لذلك يتم تحديد جميع الشرائح بشكل تجميعي للعينات بمعدل كلي $2W_0$ كما بيّنا سابقاً. إذا كانت العينات غير صفرية فقط في المجال $[-T_0/2, T_0/2]$ ، فيوجد بالتالي نحو $2T_0W_0$ عينة عقدية غير صفرية تحدد أي $u(t)$ في هذا الصف.

إذا جرى تقييد التوابع في هذا الصف لتكون حقيقية، فإن معاملات شريحة التردد المركزي ستكون حقيقية كما وتُحدّد الشرائح السالبة من قبل الشرائح الموجبة. وهكذا يُحدّد كل تابع حقيقي في هذا الصف بنحو $2T_0W_0$ عدد حقيقي.

⁶⁴ يعطي حساب عدد العينات إلى $(2n + 1)\left[1 + \frac{T_0W_0}{2n+1}\right]$.

هذا النوع من التوابع مختلف قليلاً من أجل كل خيار من n ، لأن التفسير المفصل لما يعني مصطلح "محدد زمنياً بشكل تقريبي" متغير. تعبر كل من هذه التوسعات من وجهة نظر أكثر واقعية، عن شكل موجي محدد تقريباً بحزمة قاعدية من خلال عينات ذات معدل $2W_0$. بازدياد المدة الكلية T_0 لصف الأشكال الموجية، فإن الفترة العابرة الأولية الناجمة عن العينات المتمركزة بالقرب من $-T_0/2$ وتلك المتمركزة بالقرب من $T_0/2$ ستصبح غير مهمة بالنسبة لبقية الإشارة.

ويمكن الوصول إلى النتيجة نفسها للتوابع المحددة زمنياً بشكل حصري في المجال $[-T_0/2, T_0/2]$ باستخدام النشر الجيبي من خلال وضع قيمة صفرية للمعاملات خارج المجال $[-F_0, F_0]$.

باختصار، تتطلب جميع التوسعات المذكورة آنفاً تقريباً $2T_0W_0$ عدداً للتحديد التقريبي للإشارة المحددة أساساً بالزمن T_0 والتردد W_0 من أجل T_0W_0 ذات قيمة كبيرة.

من الممكن أن نكون أكثر دقة حول عدد درجات الحرية في زمن ومجال ترددي محددين من خلال النظر إلى النشر الكروي الموجي (انظر الملحق، الفقرة 5A.3). تضاعف الأمواج المتعامدة في هذا التوسع الطاقة في منطقة الزمن/التردد المحددة بشكل مؤكد. قد يكون من الأبسط والأفضل، على أية حال، التعامل مع الطبيعة التقريبية للحدود اعتماداً على النشر الجيبي المثقل بتوابع sinc، والنشر الجيبي المقطوع.

3.7.4 التزيف Aliasing - مقارنة المجال الزمني

يُعدّ كل من النشر الجيبي المقطوع والجيبي المثقل بتابع sinc مفيداً من حيث المفهوم لإدراك الأشكال الموجية المحددة بشكل تقريبي زمنياً وترددياً، إلا أنه من الناحية العملية، تؤخذ عينات الإشارات، بمعدل قد يكون أعلى بمرتين من عرض الحزمة الإسمي، وذلك قبل المعالجة الرقمية للإشارة. وبالتالي فمن المهم أن نفهم الخطأ الذي يكتنف مثل هذا الاعتيان (sampling).

لنفترض أن $u(t)$ كتاب \mathcal{L}_2 أخذت عيناته بعينات متباعدة بمقدار T بحيث: $\{u(kT); k \in \mathbb{Z}\}$. يشير $s(t)$ إلى التقريب للتابع $u(t)$ الذي نجم عن توسع نظرية أخذ العينات،

$$(75.4) \quad s(t) = \sum_k u(kT) \text{sinc}\left(\frac{t}{T} - k\right)$$

إذا كان التابع $u(t)$ محدود الحزمة الأساسية إلى $W = 1/2T$ ، فإن $s(t) = u(t)$ ، ولكن هنا لم يعد التابع $u(t)$ محدود الحزمة الأساسية. يساعد توسع $u(t)$ إلى شرائح ترددية فردية، المكررة أدناه في (73.4) في فهم الفرق بين $u(t)$ و $s(t)$:

$$(76.4) \quad u(t) = \text{l. i. m.} \sum_{m,k} v_m(kT) \text{sinc}\left(\frac{t}{T} - k\right) e^{2\pi i m t / T}, \text{ where}$$

$$(77.4) \quad v_m(t) = \int \hat{u}(f) \text{rect}(fT - m) e^{2\pi i f t} df$$

من أجل تابع \mathcal{L}_2 كفي $u(t)$ ، قد تكون نقاط العينات $u(kT)$ عند نقاط الانقطاع ومن ثم تكون في موضع تساؤل. كما لا تحتاج (75.4) للتقارب، وقد لا تتقارب (76.4) في كل نقطة. لتجنب هذه المشاكل، سيجري في وقت لاحق تقييد التابع $\hat{u}(f)$ أبعد من مجرد كونه \mathcal{L}_2 . أولاً، على أية حال، سيتم تجاهل مسائل التقارب وتُشتق المعادلات ذات الصلة دون التساؤل عن مدى صحتها.

تُعطى عينات التابع $s(t)$ من المعادلة (75.4) بوساطة $s(kT) = u(kT)$ وتُجمع مع (76.4)،

$$(78.4) \quad s(kT) = u(kT) = \sum_m v_m(kT)$$

لذا يتم جمع العينات من الشرائح الترددية المختلفة مع بعضها ضمن العينات الخاصة بـ $u(t)$. وتدعى هذه الظاهرة/التزيف (aliasing). ولا يمكن، من العينات $\{u(kT); k \in \mathbb{Z}\}$ فقط، أن نُميّز مدى إسهام كل شريحة ترددية، وبالتالي، من وجهة نظر العينات، تكون كل حزمة ترددية "زيف" لحزمة أخرى.

وعلى الرغم من أنّ $u(t)$ و $s(t)$ متوافقتين بزمن أخذ العينات، فثمة اختلاف بينهما في أماكن أخرى (لنفرض أن $u(t)$ ليس محدود الحزمة

الأساسية بالقيمة $1/(2T)$ على نحو دقيق). بدمج المعادلتين (78.4) و(75.4) ينتج:

$$(79.4) \quad s(t) = \sum_k \sum_m v_m(kT) \text{sinc}\left(\frac{t}{T} - k\right)$$

إن التعبيرين في المعادلتين (79.4) و(76.4) يتوافقان عند $m = 0$ ، وبالتالي يكون الفرق بين $s(t)$ و $u(t)$ هو:

$$u(t) - s(t) = \sum_k \sum_{m \neq 0} -v_m(kT) \text{sinc}\left(\frac{t}{T} - k\right) + \sum_k \sum_{m \neq 0} v_m(kT) e^{\frac{2\pi i m t}{T}} \text{sinc}\left(\frac{t}{T} - k\right)$$

إن الحد الأول في المعادلة السابقة هو $v_0(t) - s(t)$ ، أي الفرق في الحزمة القاعدية الاسمية $[-W, W]$. وهو الخطأ الناتج عن المركبات المزيفة في $s(t)$. أما الحد الثاني فهو عبارة عن الطاقة خارج الحزمة القاعدية لـ $u(t)$ ، والتي تكون متعامدة مع الحد الأول من الخطأ. وبما أن كل حد هو توسع متعامد في الإشارات الجيبية المثقلة بالتابع sinc من (74.4)، فإن الطاقة في الخطأ تعطى بالعلاقة⁶⁵:

$$(80.4) \quad \int |u(t) - s(t)|^2 dt = T \sum_k \left| \sum_{m \neq 0} v_m(kT) \right|^2 + T \sum_k \sum_{m \neq 0} |v_m(kT)|^2$$

وسنتعرف لاحقاً، عندما نُعبّر عن $u(t)$ كتابع عينة لعملية عشوائية $U(t)$ ، أن من المنطقي، وضمن شروط معقولة، أن تكون القيمة المتوقعة لهذين الخطأين متساوية تقريباً. وبالتالي، إذا تم ترشيح $u(t)$ باستخدام مرشح تمرير منخفض مثالي قبل عملية أخذ العينات، عندها تصبح $s(t)$ مساوية لـ $v_0(t)$ ويبقى فقط حد الخطأ الثاني في المعادلة (80.4)؛ وهذا يخفض قيمة الخطأ التربيعي المتوسط المتوقع بمعامل 2. من الأسهل على أي حال، أن نأخذ العينات بمعدل أسرع.

4.7.4 التزيف - مقارنة المجال الترددي

عادةً ما يجري تحليل التزيف من وجهة نظر المجال الترددي. يُمكن، من المعادلة (79.4)، فصل التابع $s(t)$ إلى المساهمات المختلفة من الحزم الترددية كما يلي:

$$(81.4) \quad s(t) = \sum_m s_m(t), \quad \text{where} \quad s_m(t) = \sum_k v_m(kT) \text{sinc}\left(\frac{t}{T} - k\right)$$

وبمقارنة $s_m(t)$ مع $v_m(t) = \sum_k v_m(kT) \text{sinc}\left(\frac{t}{T} - k\right) e^{2\pi i m t / T}$ ، يمكن أن نستنتج أن

$$v_m(t) = s_m(t) e^{2\pi i m t / T}$$

ومن علاقة فورييه لإزاحة التردد، يكون $\hat{v}_m(f) = \hat{s}_m\left(f - \frac{m}{T}\right)$ وبالتالي

$$(82.4) \quad \hat{s}_m(f) = \hat{v}_m\left(f + \frac{m}{T}\right)$$

أخيراً، وبما أن $\hat{v}_m(f) = \hat{u}(f) \text{rect}(fT - m)$ ، يمكن ملاحظة أن $\hat{v}_m\left(f + \frac{m}{T}\right) = \hat{u}\left(f + \frac{m}{T}\right) \text{rect}(fT)$. وهكذا، بأخذ مجموع (82.4) على m ،

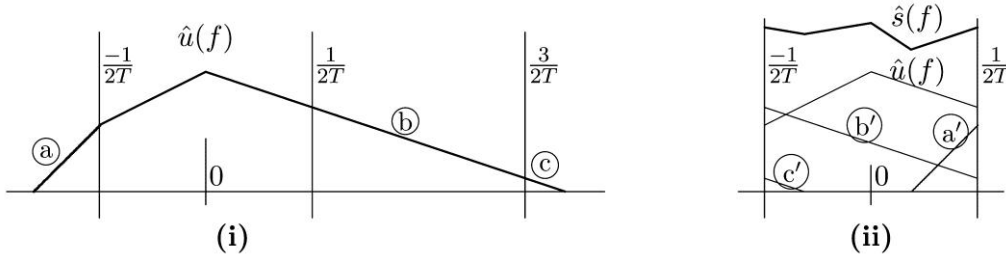
$$(83.4) \quad \hat{s}(f) = \sum_m \hat{u}\left(f + \frac{m}{T}\right) \text{rect}[fT]$$

نُزاح كل شريحة ترددية $\hat{v}_m(f)$ إلى الحزمة القاعدية في هذه المعادلة، ومن ثم تُجمع كل هذه الشرائح الترددية معاً، كما هو موضح في الشكل (10.4). يُشكل هذا جوهر نظرية التزيف التالية، والتي تمت برهنتها بالفقرة 5A.2.

⁶⁵ وكما هو موضح في المثال التمرين 38.4، ليس بالضرورة أن يكون التابع $s(t)$ من النوع إلا إذا طُبقت قيود إضافية من النظرية 1.7.4 على $\hat{u}(f)$ التابع. في مثل هذه الحالات، يصبح المجموع الأول في (80.4) لانهائياً ويفشل تماماً اعتبار $s(t)$ تقريباً لتابع $u(t)$.

نظرية 1.7.4 (نظرية التزييف). ليكن $\hat{u}(f)$ تابع L_2 ، ونفترض أن $\hat{u}(f)$ يُحقق الشرط $\lim_{|f| \rightarrow \infty} \hat{u}(f)|f|^{1+\varepsilon} = 0$ من أجل $\varepsilon > 0$. فعندها يكون $\hat{u}(f)$ تابع L_1 ، ويتقارب تحويل فورييه العكسي $u(t) = \int \hat{u}(f)e^{2\pi ift} df$ في كل النقاط إلى تابع محدود مستمر. ومن أجل أي قيمة $T > 0$ ، فإن تقريب أخذ العينات $\sum_k u(kT)\text{sinc}(\frac{t}{T} - k)$ يتقارب في كل النقاط لتابع L_2 محدود ومستمر $s(t)$. يحقق تحويل فورييه للتابع $s(t)$.

$$(84.4) \quad \hat{s}(f) = \text{l.i.m.} \sum_m \hat{u}\left(f + \frac{m}{T}\right) \text{rect}[fT]$$



الشكل 10.4: تم تشكيل تحويل $\hat{s}(f)$ لتقريب أخذ عينات الحزمة القاعدية $s(t)$ إلى $u(t)$ عن طريق طي التحويل $\hat{u}(f)$ إلى $\{-1/(2T), 1/(2T)\}$. على سبيل المثال، استخدام توابع حقيقية لتصوير توضيحي، حيث يُقابل المكون a إلى a' و b إلى b' و c إلى c' . تضاف هذه المكونات المطوية للحصول على $\hat{s}(f)$. إذا كان $\hat{u}(f)$ عقدياً، فإن كلا الجزئين الحقيقي والتخيلي لـ $\hat{u}(f)$ يجب أن يكونا مطويين بهذه الطريقة للحصول على الأجزاء الحقيقية والتخيلية على الترتيب من $\hat{s}(f)$. يوضح الشكل أيضاً الحدّين الموجودين في الجهة اليمنى من العلاقة (80.4). الحد الأول هو طاقة الفرق $\hat{u}(f) - \hat{s}(f)$ التي تسببها العناصر المطوية في الجزء (ii). الحد الأخير هو الطاقة في الجزء (i) خارج المجال $[-T/2, T/2]$.

يدلّ الشرط $\lim_{|f| \rightarrow \infty} \hat{u}(f)|f|^{1+\varepsilon} = 0$ أن $\hat{u}(f)$ يسعى إلى الصفر مع ازدياد f بمعدل أكبر من $1/f$. يُعطي التمرين 37.4 مثلاً تفشل فيه النظرية بغياب هذا الشرط.

بعيداً عن التفاصيل الرياضية الدقيقة، ما تقوله نظرية التثسّوه، بما يوافق زوج تحويل فورييه $\hat{u}(f) \leftrightarrow u(t)$ ، هو التالي؛ ثمة زوج تحويل فورييه آخر $s(t)$ و $\hat{s}(f)$ ؛ حيث $s(t)$ توسيع أخذ عينات الحزمة القاعدية باستخدام عينات ذات تباعد T لكل من $u(t)$ و $\hat{s}(f)$ وهي ناتجة عن طي التحويل $\hat{u}(f)$ في الحزمة $[-W, W]$ عند $W = 1/(2T)$.

8.4 ملخص

جرى في هذا الفصل تطوير نظرية توابع L_2 ذات (الطاقة المتناهية). تُمَثَّل هذه التوابع الإشارات المُتلى للدراسة، وذلك بسبب بساطة وعمومية خصائصها الرياضية، وبسبب مناسبتها لنمذجة إشارات المنبع وإشارات القناة.

إن المقاربة العامة لترميز إشارات المنبع هي:

- توسيع شكل الموجة أي توسع متعامد.
- تكميم معاملات هذا التوسع.
- استخدام ترميز منبع مقطوع على خرج المكّم.

إن التشويه، الذي يُقاس بدلالة طاقة الفرق بين إشارة المنبع والإشارة المعاد تركيبها، متناسبٌ طردياً مع مربع خطأ التكميم في المعاملات المكّمة.

تجري طريقة إرسال الإشارات المرّمزة عبر قناة اتصال وفق ما يلي:

- تمثيل سلسلة الأرقام الإثنائية في الدحل بسلسلة رموز مقابلة حقيقية أو عقدية.
- استخدام الرموز باعتبارها معاملات التوسع المتعامد.

تمّت في هذا الفصل مناقشة التوسعات المتعامدة، وستجري مناقشتها بعمق في الفصل الخامس. أما الفصل السادس فسيُنَاقِش اختيار مجموعة الرموز، والمقابلة للأرقام الإثنائية، واختيار التوسع المتعامد.

يُبيّن هذا الفصل أن لكل إشارة L_2 محدودة الزمن سلسلة فورييه موافقة، حيث يُعطى كل معامل لهذه السلسلة على شكل تكامل ليبسغ Lebesgue integral وتتقارب سلسلة فورييه في L_2 . أي أنه باستخدام المزيد والمزيد من حدود فورييه في تقريب التابع، فإن فرق الطاقة بين الإشارة والتقريب يصبح أصغر فأصغر، ويقترّب من الصفر في النهاية.

أيضاً، وحسب نظرية Plancherel، فإن كل إشارة L_2 من الشكل $u(t)$ (سواءً كانت محدودة بالزمن أم لا) لها تكامل فورييه مقابل $\hat{u}(f)$. من أجل كل تقريب مقطوع، $u_A(t) = u(t)\text{rect}(\frac{t}{2A})$ ، يوجد تكامل فورييه $\hat{u}_A(f)$ مستمر ومتقارب في كل نقطة. إن تكامل فورييه $\hat{u}(f)$ هو نهاية L_2 لإشارات التقريب هذه. ويوجد عكس التحويل بنفس الطريقة.

إن نتائج التقارب L_2 القوية لتحويلات سلاسل فورييه وتكاملاته ليست ضرورية من أجل حساب تحويلات فورييه وسلاسل فورييه للإشارات التقليدية التي سنجدها في التمارين. تصبح هذه النتائج مهمة عندما تكون الإشارات توابع عينة من عمليات عشوائية وعندما نريد أن نوجد حدود الأداء الممكن. وفي كلتا الحالتين، يكون تعاملنا مع صنف كبير من إشارات مُحتملة، بدلاً من إشارة وحيدة، وتصبح عندها هذه النتائج هامة جداً.

إن تحويل فورييه في الزمن المقطوع DTFT هو الثنائي زمن/تردد لسلاسل فورييه، كما أن نظريته أخذ العينات هي ببساطة تحويل فورييه لـ DTFT، مع قليل من الاهتمام بالتقارب.

إن التوسع الجيبي المقطوع بفواصل T والتوسع الجيبي المثقل بفواصل T ، هما توسعان متعامدان لإشارة L_2 اعتباطية. يُشكّل الأول من خلال تقطيع الإشارة إلى مقتطعات بطول T ومن ثم توسيع كل مقتطع بسلسلة فورييه. ويُشكّل الثاني من خلال تقطيع الإشارة في التردد وأخذ عينات كل حزمة ترددية. الإشارات المتعامدة في كل من التوسعين هما تحويلات الزمن/التردد لـ $\text{rect}(\frac{t}{2A})$ في الحالة الأولى ولـ $\text{sinc}(\frac{f}{T})$ في الحالة الثانية. يؤدي كل توسع منهما إلى مفهوم أن الإشارات المحدودة في فترة زمنية T_0 وحيز حزمة قاعدية ترددي F_0 لها درجات سماحية تساوي $2T_0F_0$ تقريباً وذلك عندما تكون T_0F_0 كبيرة.

يُعدُّ التشوّه الغموض في إشارة المُمثّل بعيناتها المتباعدة بفواصل T . إذا كانت إشارة L_2 محدودة الحزمة القاعدية إلى $1/(2T)$ ، فإن عيناتها تُحدّد الإشارة، ولكن إذا احتوت الإشارة مركبات في حزم أخرى، فإن هذه المركبات تلتبس مع مركبات الحزمة الأساسية في العينات. تنص نظرية الالتباس على أن تحويل فورييه لإعادة تركيب الحزمة القاعدية من العينات يساوي تحويل فورييه الأصلي محتوي في تلك الحزمة القاعدية.

4A ملحق: مادة إضافية وبراهين

القسم الأول من الملحق هو مقدمة عن المجموعات القابلة للعد. استُخدمت هذه النتائج خلال الفصل، ويمكن اعتبار المادة هنا عرضاً أولياً أو مراجعة. تزود الأقسام الثلاثة التالية من الملحق نظرة مُضافة وبراهين للنتائج على المجموعات القابلة للعد.

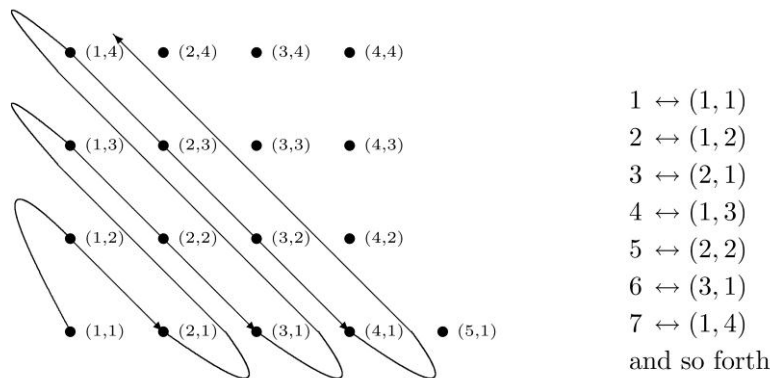
1.A4 المجموعات القابلة للعد

تكون مجموعة من العناصر الفريدة غير متناهية قابلة للعد إذا أمكننا مقابلة العناصر فيها مع الأعداد الصحيحة الموجبة عنصراً مقابل عنصراً. بتعريف حدسي آخر، تكون المجموعة لانهاية قابلة للعد إذا أمكننا ترتيب مجموعة العناصر في سلسلة a_1, a_2, \dots . تكون مجموعة قابلة للعد إذا كانت تحوي إما على مجموعة عناصر متناهية أو لانهاية قابلة للعد.

المثال 1.A4 (مجموعة كافة الأعداد الصحيحة). يمكن ترتيب الأعداد الصحيحة "الموجبة والسالبة" على شكل سلسلة $0, -1, +1, -2, +2, -3, \dots$ ، ومن ثمّ فهذه المجموعة لانهاية قابلة للعد. لاحظ أن كل عدد صحيح يظهر مرة واحد فقط في هذه السلسلة، وأن التقابل واحد إلى واحد بين الأعداد الصحيحة الموجبة والسالبة يكون من الشكل $(-2 \leftrightarrow 4), (+1 \leftrightarrow 3), (-1 \leftrightarrow 2), (0 \leftrightarrow 1)$ ، الخ. ثمة طرائق أخرى عديدة يمكننا بواسطتها ترتيب مجموعة الأعداد الصحيحة على شكل سلسلة $0, -1, +1, +2, -2, +3, +4, -3, +5, \dots$ ، ولكن ترتيب كل الأعداد الموجبة أولاً ثم الأعداد السالبة، على سبيل المثال، لا يمثل تقابلاً واحداً إلى واحد حيث لا يبقى أعداد صحيحة موجبة لمقابلتها مع الأعداد الصحيحة السالبة.

المثال 2.A4 (مجموعة أزواج الأعداد الصحيحة الموجبة). يُرينا الشكل (11.4) أن هذه المجموعة غير متناهية قابلة للعد، حيث تعرض إحدى الطرائق لسرد العناصر في سلسلة. لاحظ أنه يمكن الوصول إلى أي زوج من هذه القائمة. يعني هذا، وعلى نحو غريب، أن عدد الأعداد الصحيحة الموجبة مساوٍ لعدد أزواج الأعداد الصحيحة الموجبة، ولكن ما يحدث أنّ الأعداد الصحيحة في مجموعة الأزواج تزداد على نحو أبداً من الموضع في القائمة. فعلى سبيل المثال، يمكن التأكد من أن الزوج (n, n) يظهر في الموضع $2n(n-1) + 1$ من القائمة.

عند دمج الأفكار في المثالين السابقين، نرى أن مجموعة أزواج الأعداد الصحيحة الموجبة غير متناهية قابلة للعد. يمكننا أيضاً استنتاج أن مجموعة العناصر التي يتألف كل منها من n عدد صحيح هي أيضاً غير متناهية قابلة للعد. أخيراً، يمكننا إثبات أن أي مجموعة جزئية من مجموعة قابلة للعد هي أيضاً قابلة للعد. إن الاتحاد المتناهي لعدة مجموعات قابلة للعد هو أيضاً مجموعة قابلة للعد، وفي الحقيقة، فإن أي اتحاد قابل للعد لمجموعات قابلة للعد يجب أن يكون قابلاً للعد.



الشكل 11.4: تقابل واحد إلى واحد بين الأعداد الصحيحة الموجبة وأزواج الأعداد الصحيحة الموجبة.

مثال 3.A4 (مجموعة الأعداد النسبية [الحقيقية]). كل عدد حقيقي يمكن تمثيله ببسط ومقام صحيحين، ويمكن تمثيله على نحو فريد ببسطه ومقامه غير القابلين للاختزال. وبالتالي يمكن وضع مجموعة الأعداد النسبية بتقابل واحد إلى واحد مع مجموعة جزئية من أزواج الأعداد الصحيحة، ومن ثمّ فهي قابلة للعد. إن الأعداد النسبية في المجال $[-T/2, T/2]$ من أجل أي $T > 0$ تُشكّل مجموعة جزئية من كافة الأعداد النسبية، ومن ثمّ فهي قابلة للعد أيضاً.

كما رأينا في الفقرة 1.3.4 يمكن التعبير عن أي مجموعة من أعداد a_1, a_2, \dots على أنها اتحاد معدود غير مُتصل لمجموعات ذات قياس صفري $[a_1, a_1], [a_1, a_1], \dots$ لذا يكون قياس أي مجموعة قابلة للعد يساوي الصفر. لنفرض تابعاً له القيمة 1 عند كل معامل نسبي و القيمة 0 فيما عدا ذلك. إن تكامل ليبسغ لذلك التابع هو 0. وبما أن الأعداد النسبية موجودة في كل فترة ذات قياس موجب من الجزء الحقيقي، مهما كانت صغيرة، فإن تكامل ريمان Riemann لهذا التابع غير مُعرّف. إن هذا التابع ليس ذا أهمية عملية كبيرة، لكنه يزود رؤية عن سبب كون تكامل ليبسغ عاماً جداً.

مثال 4.A4 (مجموعة السلاسل الإثنائية). تُعتبر مجموعة سلاسل الأرقام الإثنائية (غير المنتهية) مثلاً على مجموعة العناصر غير القابلة للعد. سنرى لاحقاً، أن هذه المجموعة تحوي على عدة عناصر غير قابلة للعد وذلك بطريقة نقض الفرض. ولنفرض أنه أمكننا ترتيب كافة السلاسل الإثنائية: a_1, a_2, a_3, \dots . يمكن التعبير عن كل سلسلة a_n بالشكل $a_n = (a_{n,1}, a_{n,2}, \dots)$ ، مما يُعطي مصفوفة لا متناهية ثنائية الأبعاد من الأرقام الإثنائية. يمكننا الآن تشكيل سلسلة إثنائية جديدة $b = b_1, b_2, \dots$ بالطريقة التالية. من أجل كل عدد صحيح $n > 0$ ، نختار $b_n \neq a_{n,n}$ ؛ وحيث إن b_n قيمة إثنائية، فإن هذا يحدد b_n من أجل كل n وبالتالي يُحدّد b . إن b تختلف عن كل السلاسل المدرجة سابقاً بخانة إثنائية واحدة على الأقل، ومن ثمّ فإن b سلسلة إثنائية غير موجودة في السرد السابق. وهذا يناقض الفرض الذي يعتبر السرد السابقة تحوي جميع السلاسل الإثنائية.

يمكن تعميم المثال السابق على السلاسل الثلاثية وعلى سلاسل من أي أبجدية فيها أكثر من عنصر واحد.

مثال 5.A4 (مجموعة الأعداد الحقيقية في المجال $[0, 1]$). تعد هذه مجموعة أخرى غير قابلة للعد، ويكون البرهان بطريقة مماثلة للبرهان في المثال السابق. يمكن تمثيل أي عدد حقيقي $r \in [0, 1]$ بتوسع إثنائي $0. r_1 r_2, \dots$ جرى اختيار عناصره r_k لتُحقق العلاقة $r = \sum_{k=1}^{\infty} r_k 2^{-k}$ بالإضافة إلى أن $r_k \in \{0, 1\}$. مثلاً، يمكن تمثيل العدد $1/2$ بالشكل 0.1 والعدد $3/8$ بالشكل 0.011 ، وهكذا. يُعد هذا التمثيل وحيداً باستثناء الحالات الخاصة التي يمكن أن يُمثّل r فيها بعدد إثنائي متناهي، $r = \sum_{k=1}^m r_k$ ؛ مثلاً يمكن تمثيل العدد $1/2$ بالشكل: 0.0111 . وبالمثل، من أجل r لا تساوي الصفر) نختار قيمة m صغيرة قدر الإمكان؛ بالتالي في المنشور غير المحدود، يكون r_m و $r_k = 0$ من أجل كل $k > m$. يمكن لكل عدد أن يمثل بطريقة أخرى حيث $r_k = 1$ و $r_m = 0$ من أجل كل $k > m$.

يمكننا مُقابلة كل r إلى توسع منتهي بسلسلة غير متناهية من الأصفار. تكون مجموعة السلاسل الإثنائية عندها اجتماع لعناصر تمثيل الأعداد الحقيقية في المجال $[0, 1]$ بالإضافة إلى مجموعة السلاسل الإثنائية المنتهية بسلسلة لانتهائية من الواحدات. المجموعة الأخيرة منتهية لأنها بتوافق واحد إلى واحد مع الأعداد النسبية التي من الشكل $\sum_{k=1}^m r_k 2^{-k}$ مع قيمة إثنائية m متناهية. وبالتالي إذا كانت الأعداد الحقيقة قابلة للعد، سيكون اتحادها مع هذه المجموعة الأخيرة قابلاً للعد، على عكس ما هو معروف عن السلاسل الإثنائية.

من خلال تقييس المجال $[0, 1]$ ، يمكن ملاحظة أنّ مجموعة الأعداد الحقيقية في أي مجال ذو قياس غير صفري غير منتهية وغير قابلة للعد. وبما أن مجموعة الأعداد النسبية في هكذا مجال قابلة للعد، فإن الأعداد غير النسبية يجب أن تكون غير قابلة للعد (وإلا لكان مجال اتحاد الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية، أي، الأعداد الحقيقية، قابلاً للعد).

إن مجموعة الأعداد غير النسبية في المجال $[-T/2, T/2]$ هي متممة الأعداد النسبية وبالتالي فلها قياس T . يفصل كل زوج من أعداد غير نسبية مميزة عددٌ نسبي. وبالتالي يمكن تمثيل الأعداد غير النسبية على شكل اجتماع لفترات وذلك فقط باستخدام اجتماع غير قابل للعد⁶⁶ لمجالات، يحوي كل منها على عنصر واحد. إن صنف الاجتماعات غير القابلة للعد للفترات لا يدعو للاهتمام كثيراً كونه يضم كل المجموعات الجزئية من \mathbb{R} .

⁶⁶ قد يكون ذلك صدمة للحس. فكل اجتماع جزئي $U_{j=1}^k [a_j, a_j]$ لأعداد نسبية له متمم هو اجتماع $k + 1$ مجال ذات عرض غير صفري؛ تُسبب كل زيادة اجتماع في k ببساطة انقسام مجال واحد في المتمم إلى مجالين أصغر (مع المحافظة على القياس عند T). تصبح هذه المجموعة في النهاية مجموعة غير قابلة للعد من نقاط منفصلة.

2.A4 الاجتماعات المتناهية لفترات ضمن المجال $[-T/2, T/2]$

لتكن \mathcal{M}_f صنف من اجتماعات متناهية لفترات، أي، صنف من المجموعات التي عناصرها يمكن التعبير عنها بالعلاقة $\mathcal{E} = \bigcup_{j=1}^{\ell} I_j$ حيث $\{I_1, \dots, I_{\ell}\}$ فترات و $1 \leq \ell$ عدد صحيح. يُبين التمرين 5.4 أن كل $\mathcal{E} \in \mathcal{M}_f$ يمكن التعبير عنه على نحو فريد باجتماع متناه لـ $k \leq \ell$ فترة منفصلة، ولتكن $\mathcal{E} = \bigcup_{j=1}^k I'_j$. حُدّد قياس \mathcal{E} بالعلاقة $\mu(\mathcal{E}) = \sum_{j=1}^k \mu(I'_j)$. يُبين المثال 7.4 أن $\mu(\mathcal{E}) \leq \sum_{j=1}^{\ell} \mu(I_j)$ من أجل الفترات الأساسية المشكّلة لـ \mathcal{E} ويُبين أن هذا يبقى صحيحاً على نحو متساوٍ مهما كانت الفترات I_1, \dots, I_{ℓ} غير متّصلة.⁶⁷

إن الصنف \mathcal{M}_f هو صنف مغلق على عملية الاجتماع، حيث إذا كان كل من \mathcal{E}_1 و \mathcal{E}_2 اجتماعات متناهية لفترات، فإن $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$ يمثّل اجتماع مجموعتي الفترات. يتبع ذلك أنه إذا كان \mathcal{E}_1 و \mathcal{E}_2 غير متصلين فإن

$$(85.4) \quad \mu(\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2) = \mu(\mathcal{E}_1) + \mu(\mathcal{E}_2)$$

إن الصنف \mathcal{M}_f مغلق أيضاً على عملية التقاطع، حيث إذا كان $\mathcal{E}_1 = \bigcup_j I_{1,j}$ و $\mathcal{E}_2 = \bigcup_{\ell} I_{2,\ell}$ فإن $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \bigcup_{j,\ell} (I_{1,j} \cap I_{2,\ell})$. أخيراً، يكون \mathcal{M}_f مغلق لعمليات التتام أيضاً. في الواقع، كما تمّ توضيحه في الشكل (5.4)، فإن المتمم $\bar{\mathcal{E}}$ لاجتماع منفصل متناهٍ لمجالات \mathcal{E} ، هو ببساطة اجتماع فترات منفصلة تقع بين الفترات \mathcal{E} . وبما أن \mathcal{E} ومتممه $\bar{\mathcal{E}}$ غير متصلين وتشغلان كامل المجال $[-T/2, T/2]$ ، فإن كل $\mathcal{E} \in \mathcal{M}_f$ تُحقّق خصائص المتمم،

$$(86.4) \quad T = \mu(\mathcal{E}) + \mu(\bar{\mathcal{E}})$$

يبين التالي تعميماً آخر هاماً للعلاقة (85.4) من أجل أي $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in \mathcal{M}_f$

$$(87.4) \quad \mu(\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2) + \mu(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2) = \mu(\mathcal{E}_1) + \mu(\mathcal{E}_2)$$

يمكننا أن نرى ذلك حدسياً، لاحظ أن كل فترة في $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ تُعدّ مرتين في كل طرف من طرفي المعادلة (87.4)، بينما كل فترة تنتمي فقط إلى \mathcal{E}_1 أو فقط إلى \mathcal{E}_2 تُعدّ مرة واحدة فقط على كل طرف من طرفي المعادلة. أي أن $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 \cup (\mathcal{E}_2 \cap \bar{\mathcal{E}}_1)$. بما أن هذا اجتماع غير متصل، تُبين المعادلة (85.4) أن $\mu(\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2) = \mu(\mathcal{E}_1) + \mu(\mathcal{E}_2 \cap \bar{\mathcal{E}}_1)$ وعلى نحو مماثل يكون: $\mu(\mathcal{E}_2) = \mu(\mathcal{E}_2 \cap \bar{\mathcal{E}}_1) + \mu(\mathcal{E}_2 \cap \mathcal{E}_1)$.

3.A4 الاجتماعات القابلة للعدّ والقياس الخارجي على المجال $[-T/2, T/2]$

ليكن \mathcal{M}_c صنف من اجتماعات قابلة للعدّ لفترات، أي، يمكن التعبير عن كل مجموعة $\mathcal{B} \in \mathcal{M}_c$ على أنها $\mathcal{B} = \bigcup_j I_j$ حيث $\{I_1, I_2, \dots\}$ إما أن تكون مجموعة فترات متناهية أو قابلة للعدّ غير متناهية. يمكن إثبات أن الصنف \mathcal{M}_c مغلق في كل من عملية الاجتماع وعملية التقاطع بنفس البرهان المستخدم في \mathcal{M}_f . إن \mathcal{M}_c مغلقة أيضاً في الاجتماعات القابلة للعدّ (انظر التمرين 8.4) ولكنها غير مغلقة في المتممات أو التقاطعات المعدودة.⁶⁸

يمكن التعبير عن كل $\mathcal{B} \in \mathcal{M}_c$ على نحو فريد⁶⁹ بوصفها اجتماعاً قابلاً للعدّ لفترات منفصلة، مثل $\mathcal{B} = \bigcup_j I'_j$ حيث $\{I'_1, I'_2, \dots\}$ منفصلة (انظر التمرين 6.4). يُعرّف قياس \mathcal{B} كما يلي:

$$(88.4) \quad \mu(\mathcal{B}) = \sum_j \mu(I'_j)$$

كما هو مُبين في الفقرة 1.3.4، يتقارب الجزء الأيمن من (88.4) دوماً إلى عدد محصور بين 0 و T . من أجل $\mathcal{B} = \bigcup_j I_j$ حيث I_1, I_2, \dots تمثّل فترات اعتباطية، يثبت المثال 7.4 حد الاجتماع التالي:

⁶⁷ تذكر أن الفترات التي من قبيل $(0, 1]$ و $(1, 2]$ تكون غير متّصلة ولكنها ليست منفصلة. وللمجموعة $\mathcal{E} \in \mathcal{M}_f$ كثير من التمثيلات كفترات غير متّصلة ولكن فقط واحدة منفصلة، ولهذا يشير التعريف إلى الفترات المنفصلة.

⁶⁸ يُبين الملحق 1.A4 أن متمم الأعداد النسبية، أي، مجموعة الأعداد غير النسبية، لا تنتمي إلى \mathcal{M}_c . يمكن النظر إلى الأعداد غير النسبية بوصفها تقاطع متممات الأعداد النسبية، بإعطاء مثال لا تكون فيه \mathcal{M}_c مغلقة في التقاطعات القابلة للعدّ.

⁶⁹ إن مجموعة الفترات هي الشيء الفريد هنا، وليس الترتيب الخاص؛ وهذا لا يؤثر على المجموع الغير المتناهي في العلاقة (88.4) (انظر التمرين 4.4).

$$(89.4) \quad \mu(B) \leq \sum_j \mu(I_j) \quad \text{وتتحول إلى مساواة عندما تكون } I_1, I_2, \dots \text{ غير متصلة}$$

عُرّف القياس الخارجي $\mu^\circ(\mathcal{A})$ لمجموعة اعتباطية \mathcal{A} في العلاقة (13.4) كما يلي:

$$(90.4) \quad \mu^\circ(\mathcal{A}) = \inf_{B \in \mathcal{M}_c, \mathcal{A} \subseteq B} \mu(B)$$

لاحظ أن $[-T/2, T/2]$ هي غطاء \mathcal{A} من أجل كل قيم \mathcal{A} (تذكر أن المجموعات في $[-T/2, T/2]$ هي فقط المجموعات المدروسة). وبالتالي فإن $\mu^\circ(\mathcal{A})$ يجب أن تقع بين 0 و T من أجل كل قيم \mathcal{A} . كذلك، من أجل أي مجموعتين $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$ ، فإن أي غطاء لـ \mathcal{A}' يغطي \mathcal{A} . وهذا يدل على مترابطة المجموعة الجزئية للقياس الخارجي،

$$(91.4) \quad \mu^\circ(\mathcal{A}) \leq \mu^\circ(\mathcal{A}') \quad \text{for } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$$

تطور المبرهنة التالية حد الاجتماع للقياس الخارجي، ويوضح برهانها عدة تقنيات سوف تُستخدم كثيراً.

المبرهنة 1.A4. ليكن اجتماع قابل للعد لمجموعات اعتباطية ضمن المجال $[-T/2, T/2]$. عندها

$$(92.4) \quad \mu^\circ(\mathcal{S}) \leq \sum_k \mu^\circ(\mathcal{A}_k)$$

البرهان: علينا أولاً تحديد غطاء مُحكم اعتباطياً لكل \mathcal{A}_k وبعد ذلك بيان أن اجتماع هذه الأغطية هو غطاء لـ \mathcal{S} . تحديداً، ليكن ε عدد موجب صغير اعتباطي. يدل الحد الأدنى الأعظمي في العلاقة (90.4)، ولكل $k \geq 1$ ، أن الأغطية موجودة بقياسات أكبر قليلاً من ذلك الحد الأدنى الأعظمي. بالتالي، فثمة غطاء \mathcal{B}_k لـ \mathcal{A}_k بحيث

$$\mu(\mathcal{B}_k) \leq \varepsilon 2^{-k} + \mu^\circ(\mathcal{A}_k)$$

من أجل كل k ، ليكن $\mathcal{B}_k = \cup_j I'_{j,k}$ حيث $I'_{1,k}, I'_{2,k}, \dots$ تمثل بفترات منفصلة. فتكون $\mathcal{B} = \cup_k \mathcal{B}_k = \cup_k \cup_j I'_{j,k}$ هي اجتماع قابل للعد لفترات، وبالتالي من (89.4) والتمرين 4.4،

$$\mu(\mathcal{B}) = \sum_k \sum_j \mu(I'_{j,k}) = \sum_k \mu(\mathcal{B}_k)$$

بما أن \mathcal{B}_k تغطي كل \mathcal{A}_k من أجل كل k ، يتبع ذلك أيضاً أن \mathcal{B} تغطي \mathcal{S} . بما أن $\mu^\circ(\mathcal{S})$ هو الحد الأدنى الأعظمي لغطائها.

$$\mu^\circ(\mathcal{S}) \leq \mu(\mathcal{B}) \leq \sum_k \mu(\mathcal{B}_k) \leq \sum_k (\varepsilon 2^{-k} + \mu^\circ(\mathcal{A}_k)) = \varepsilon + \sum_k \mu^\circ(\mathcal{A}_k)$$

بما أن $\varepsilon > 0$ قيمة اعتباطية، فإن العلاقة (92.4) تتبع.

ثمة حالة خاصة هي اجتماع أي مجموعة من \mathcal{A} مع متممها $\bar{\mathcal{A}}$. بما أن $[-T/2, T/2] = \mathcal{A} \cup \bar{\mathcal{A}}$ يكون

$$(93.4) \quad T \leq \mu^\circ(\mathcal{A}) + \mu^\circ(\bar{\mathcal{A}})$$

سنعرف الفقرة الجزئية التالية قابلية القياس وقياس المجموعات العشوائية. قبل ذلك، سنبيّن النظرية التالية أن فترات الاجتماعات القابلة للعد قابلة للقياس، وأن قياسها بحسب (88.4) ينسجم مع التعريف العام الذي سيُعطى لاحقاً.

نظرية 1.A4. ليكن $\mathcal{B} = \cup_j I_j$ حيث $\{I_1, I_2, \dots\}$ مجموعة فترات قابلة للعد في $[-T/2, T/2]$ ، (أي، $\mathcal{B} \in \mathcal{M}_c$). إننا:

$$(94.4) \quad \mu^\circ(\mathcal{B}) + \mu^\circ(\bar{\mathcal{B}}) = T$$

و

$$(95.4) \quad \mu^\circ(\mathcal{B}) = \mu(\mathcal{B})$$

البرهان: لنكن $\{I'_j; j \geq 1\}$ مجموعة من الفترات المنفصلة تمثل B وليكن:

$$\mathcal{E}^k = \bigcup_{j=1}^k I'_j;$$

فيكون

$$\mu(\mathcal{E}^1) \leq \mu(\mathcal{E}^2) \leq \mu(\mathcal{E}^3) \leq \dots \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\mathcal{E}^k) = \mu(B)$$

من أجل أي $\varepsilon > 0$ ، نختار k كبيرة بما فيه الكفاية بحيث

$$(96.4) \quad \mu(\mathcal{E}^k) \geq \mu(B) - \varepsilon$$

تكن فكرة البرهان في تقريب B بـ \mathcal{E}^k ، الموجودة في \mathcal{M}_f ، وتحقق $T = \mu(\mathcal{E}^k) + \mu(\overline{\mathcal{E}^k})$ وبالتالي،

$$(97.4) \quad \mu(B) \leq \mu(\mathcal{E}^k) + \varepsilon = T - \mu(\overline{\mathcal{E}^k}) + \varepsilon \leq T - \mu^\circ(\overline{B}) + \varepsilon$$

حيث تنتج المتراحة الأخيرة بسبب أن $\mathcal{E}^k \subseteq B$ وبالتالي فإن $\mu^\circ(\overline{B}) \leq \mu(\overline{\mathcal{E}^k})$ و $\overline{B} \subseteq \overline{\mathcal{E}^k}$

ثانياً، بما أن $B \in \mathcal{M}_c$ و $B \subseteq \overline{B}$ ، حيث B تغطي نفسها وهي خيار في تعريف الحد الأدنى الأعظمي $\mu^\circ(B)$ ؛ وبالتالي

$\mu^\circ(B) \leq \mu(B)$. بجمع ذلك مع (97.4) فإن $\mu^\circ(B) + \mu^\circ(\overline{B}) \leq T + \varepsilon$. بما أن $\varepsilon > 0$ قيمة اعتباطية، فإن ذلك يدل على

$$(98.4) \quad \mu^\circ(B) + \mu^\circ(\overline{B}) \leq T$$

بجمع هذا مع (93.4) يحقق (94.4). أخيراً، بتعويض $T \leq \mu^\circ(B) + \mu^\circ(\overline{B})$ في العلاقة (97.4)، نجد $\mu(B) \leq \mu^\circ(B) + \varepsilon$. وبما

أن $\varepsilon > 0$ و $\mu^\circ(B) \leq \mu(B)$ قيمة اعتباطية، فإن هذا يحقق (95.4).

أخيراً، وقبل الانتقال إلى مجموعات اعتباطية قابلة للقياس، يجري توسيع خصائص الاجتماع والتقاطع المجتمعة، العلاقة (87.4)، لتشمل

\mathcal{M}_c .

مبرهنة 2.A4. لتكن B_1 و B_2 مجموعات اعتباطية في \mathcal{M}_c . بالتالي

$$(99.4) \quad \mu(B_1 \cup B_2) + \mu(B_1 \cap B_2) = \mu(B_1) + \mu(B_2)$$

البرهان: لنكن B_1 و B_2 ممثلة بفترات منفصلة، $B_2 = \bigcup_j I_{2,j}$ و $B_1 = \bigcup_j I_{1,j}$. ومن أجل $\ell = 1, 2$ ، لنكن $\mathcal{E}_\ell^k = \bigcup_{j=1}^k I_{\ell,j}$

و $\mathcal{D}_\ell^k = \bigcup_{j=k+1}^\infty I_{\ell,j}$. بالتالي $B_1 = \mathcal{E}_1^k \cup \mathcal{D}_1^k$ و $B_2 = \mathcal{E}_2^k \cup \mathcal{D}_2^k$. بجمع μ على استخدام \mathcal{E}_ℓ^k ، الموجودة

في \mathcal{M}_f وتحقق خاصية الاجتماع والتقاطع، كتقريب لـ B_ℓ . لنرى كيف يحدث ذلك، علينا ملاحظة أن

$$B_1 \cap B_2 = (\mathcal{E}_1^k \cup \mathcal{D}_1^k) \cap (\mathcal{E}_2^k \cup \mathcal{D}_2^k) = (\mathcal{E}_1^k \cap \mathcal{E}_2^k) \cup (\mathcal{E}_1^k \cap \mathcal{D}_2^k) \cup (\mathcal{D}_1^k \cap B_2)$$

نستطيع، من أجل أي $\varepsilon > 0$ ، اختيار k كبيرة كفاية بحيث $\mu(\mathcal{E}_\ell^k) \geq \mu(B_\ell) - \varepsilon$ و $\mu(\mathcal{D}_\ell^k) \leq \varepsilon$ من أجل $\ell = 1, 2$. باستخدام

متراحة المجموعة الجزئية وحد الاجتماع، نحصل على

$$\begin{aligned} \mu(B_1 \cap B_2) &\leq \mu(\mathcal{E}_1^k \cap \mathcal{E}_2^k) + \mu(\mathcal{D}_2^k) + \mu(\mathcal{D}_1^k) \\ &\leq \mu(\mathcal{E}_1^k \cap \mathcal{E}_2^k) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

وبطريقة مشابهة ولكن أبسط

$$\begin{aligned} \mu(B_1 \cup B_2) &\leq \mu(\mathcal{E}_1^k \cup \mathcal{E}_2^k) + \mu(\mathcal{D}_1^k) + \mu(\mathcal{D}_2^k) \\ &\leq \mu(\mathcal{E}_1^k \cup \mathcal{E}_2^k) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

بجمع هاتين المتراحتين وباستخدام (87.4) على $\mathcal{E}_1^k \in \mathcal{M}_f$ و $\mathcal{E}_2^k \in \mathcal{M}_f$ نحصل على

$$\mu(B_1 \cap B_2) + \mu(B_1 \cup B_2) \leq \mu(\mathcal{E}_1^k \cap \mathcal{E}_2^k) + \mu(\mathcal{E}_1^k \cup \mathcal{E}_2^k) + 4\varepsilon$$

$$= \mu(\mathcal{E}_1^k) + \mu(\mathcal{E}_2^k) + 4\varepsilon$$

$$\leq \mu(\mathcal{B}_1) + \mu(\mathcal{B}_2) + 4\varepsilon$$

حيث استخدمنا متراجحة المجموعة الجزئية في المتراجحة الأخيرة.
من أجل الحد في الاتجاه المعاكس، نبدأ بمتراجحة المجموعة الجزئية،

$$\mu(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) + \mu(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) \geq \mu(\mathcal{E}_1^k \cup \mathcal{E}_2^k) + \mu(\mathcal{E}_1^k \cap \mathcal{E}_2^k)$$

$$= \mu(\mathcal{E}_1^k) + \mu(\mathcal{E}_2^k)$$

$$\geq \mu(\mathcal{B}_1) + \mu(\mathcal{B}_2) - 2\varepsilon$$

بما أن ε اعتباطية، فإن هذين الحدين يحققان (99.4).

4.A4 المجموعات الاعتباطية القابلة للقياس على المجال $[-T/2, T/2]$

عُرِّفت مجموعة عشوائية $\mathcal{A} \in [-T/2, T/2]$ بأنها قابلة للقياس إذا كان

$$(100.4) \quad T \leq \mu^\circ(\mathcal{A}) + \mu^\circ(\mathcal{A}^c)$$

عُرِّف قياس مجموعة قابلة للقياس بأنه $\mu(\mathcal{A}) = \mu^\circ(\mathcal{A})$. يشار إلى صنف المجموعات القابلة للقياس بـ \mathcal{M} . تُبيِّن النظرية 1.A4 أن كل مجموعة $\mathcal{B} \in \mathcal{M}_c$ قابلة للقياس، أي أن $\mathcal{B} \in \mathcal{M}$ وبالتالي $\mathcal{M}_f \subseteq \mathcal{M}_c \subseteq \mathcal{M}$. إن قياس $\mathcal{B} \in \mathcal{M}_c$ هو $\mu(\mathcal{B}) = \sum_j \mu(I_j)$ لأي سلسلة غير متصلة من الفترات I_1, I_2, \dots اجتماعها هو \mathcal{B} .

وعلى الرغم من أن متممات المجموعات في \mathcal{M}_c ليس بالضرورة أن تكون في \mathcal{M}_c (كما رأينا في مثال الأعداد النسبية)، ولكنها يجب أن تكون في \mathcal{M} ؛ في الواقع، وبحسب (100.4)، فإن كل المجموعات في \mathcal{M} لها متممات في \mathcal{M} ، هذا يعني أن \mathcal{M} مغلقة تحت المتممات. سنُبيِّن فيما بعد أن \mathcal{M} مغلقة تحت، أولاً، ولانهائية، ومن ثمَّ قابلة للعد، والاجتماع، والتقاطع. للحصول على هذه النتائج علينا أولاً ببيان أن خاصية الاجتماع والتقاطع مُحَقَّقة للقياسات الخارجية.

مبرهنة 3.A4. من أجل أي مجموعات \mathcal{A}_1 و \mathcal{A}_2 قابلة للقياس نجد

$$(101.4) \quad \mu^\circ(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) + \mu^\circ(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) = \mu^\circ(\mathcal{A}_1) + \mu^\circ(\mathcal{A}_2)$$

البرهان: البرهان مشابه جداً لبرهان المبرهنة 2.A4، ولكننا هنا سنستخدم مجموعات في \mathcal{M}_c لمقاربة المجموعات في \mathcal{M} . من أجل أي $\varepsilon > 0$ ، ليكن \mathcal{B}_1 و \mathcal{B}_2 تغطيان \mathcal{A}_1 و \mathcal{A}_2 على الترتيب بحيث $\mu(\mathcal{B}_\ell) \leq \mu^\circ(\mathcal{A}_\ell) + \varepsilon$ من أجل $\ell = 1, 2$. وليكن $\mathcal{D}_\ell = \mathcal{B}_\ell \cap \mathcal{A}_\ell^c$ من أجل $\ell = 1, 2$. لاحظ أن \mathcal{A}_ℓ و \mathcal{D}_ℓ غير متصلين وأن $\mathcal{B}_\ell = \mathcal{A}_\ell \cup \mathcal{D}_\ell$.

$$(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) = (\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{D}_1) \cap (\mathcal{A}_2 \cup \mathcal{D}_2) = (\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) \cup (\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{A}_2) \cup (\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{D}_2)$$

باستخدام حد الاجتماع و متراجحة المجموعة الجزئية للقياس للخارجي على هذه والتوسعة الموافقة لـ $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ نحصل على

$$\mu(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) \leq \mu^\circ(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) + \mu^\circ(\mathcal{D}_1) + \mu^\circ(\mathcal{D}_2) \leq \mu^\circ(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) + 2\varepsilon$$

$$\mu(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) \leq \mu^\circ(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) + \mu^\circ(\mathcal{D}_1) + \mu^\circ(\mathcal{D}_2) \leq \mu^\circ(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) + 2\varepsilon$$

حيث استخدمنا (انظر التمرين 9.4) حقيقة أن $\mu^\circ(\mathcal{D}_\ell) \leq \varepsilon$ من أجل $\ell = 1, 2$. بجمع هذه المتراجحات وإعادة ترتيب الحدود نحصل على

$$\mu^\circ(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) + \mu^\circ(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) \geq \mu(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) + \mu(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) - 4\varepsilon$$

$$= \mu(\mathcal{B}_1) + \mu(\mathcal{B}_2) - 4\varepsilon$$

$$\geq \mu^\circ(\mathcal{A}_1) + \mu^\circ(\mathcal{A}_2) - 4\varepsilon$$

حيث استخدمنا (99.4) وبعدها استخدمنا $\mathcal{A}_\ell \subseteq \mathcal{B}_\ell$ من أجل $\ell = 1, 2$. باستخدام متراجحة المجموعة الجزئية و (99.4) لوضع حدود

في الاتجاه المعاكس نحصل على

$$\mu(B_1) + \mu(B_2) = \mu(B_1 \cup B_2) + \mu(B_1 \cap B_2) \geq \mu^\circ(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) + \mu^\circ(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2)$$

بإعادة الترتيب واستخدام $\mu(B_\ell) \leq \mu^\circ(\mathcal{A}_\ell) + \varepsilon$ نحصل على:

$$\mu^\circ(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) + \mu^\circ(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) \leq \mu^\circ(\mathcal{A}_1) + \mu^\circ(\mathcal{A}_2) + 2\varepsilon$$

وبما أن ε اعتباطية، فإن هذه الحدود تحقق (101.4).

نظرية 2.A4. بفرض أن $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathcal{M}$. فيكون $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \in \mathcal{M}$ و $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \in \mathcal{M}$.

البرهان: بتطبيق (101.4) على $\overline{\mathcal{A}_1}$ و $\overline{\mathcal{A}_2}$ نحصل على:

$$\mu^\circ(\overline{\mathcal{A}_1} \cup \overline{\mathcal{A}_2}) + \mu^\circ(\overline{\mathcal{A}_1} \cap \overline{\mathcal{A}_2}) = \mu^\circ(\overline{\mathcal{A}_1}) + \mu^\circ(\overline{\mathcal{A}_2})$$

وبإعادة كتابة $\overline{\mathcal{A}_1} \cup \overline{\mathcal{A}_2}$ على النحو $\overline{\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2}$ و $\overline{\mathcal{A}_1} \cap \overline{\mathcal{A}_2}$ وفق $\overline{\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2}$ وبإضافة هذا إلى (101.4).

$$[\mu^\circ(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) + \mu^\circ(\overline{\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2})] + [\mu^\circ(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) + \mu^\circ(\overline{\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2})]$$

$$(102.4) \quad = \mu^\circ(\mathcal{A}_1) + \mu^\circ(\mathcal{A}_2) + \mu^\circ(\overline{\mathcal{A}_1}) + \mu^\circ(\overline{\mathcal{A}_2}) = 2T$$

حيث استخدمنا (100.4). كل الحدود الموضوعة ضمن أقواس أنفاً هي على الأقل T من (93.4)، ولهذا فكل حد يجب أن يكون تماماً T .

بالتالي فإن $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ و $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ قابلين للقياس.

بما أن $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ و $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ قابلين للقياس، إذا \mathcal{A}_1 و \mathcal{A}_2 قابلين للقياس، فإن خاصية الاجتماع والتقاطع تبقى صحيحة للقياس

والقياس الخارجي، من أجل كل التوابع القابلة للقياس، هذا يعني،

$$(103.4) \quad \mu(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) + \mu(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) = \mu(\mathcal{A}_1) + \mu(\mathcal{A}_2)$$

وإذا كانت \mathcal{A}_1 و \mathcal{A}_2 غير متصلين، يمكن عندها تبسيط (103.4) إلى خاصية قابلية الجمع

$$(104.4) \quad \mu(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) = \mu(\mathcal{A}_1) + \mu(\mathcal{A}_2)$$

تُبين العلاقة (103.4) أن (104.4) محققة كلما كان $\mu(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) = 0$. أي، إن \mathcal{A}_1 و \mathcal{A}_2 لا تحتاج لأن تكون غير متصلة، ولكن

تحتاج فقط ليكون ثمة تقاطع للقياس الصفري. هذا مثال آخر تكون فيه مجموعات ذات قياس صفري مهملة.

تُبين النظرية التالية أن \mathcal{M} مغلقة على الاجتماعات المعدودة غير المتصلة، وأن \mathcal{M} مضافة حسابياً.

نظرية 3.A4. افرض أن $\mathcal{A}_j \in \mathcal{M}$ من أجل كل عدد صحيح $z \geq 1$ وأن $\mu(\mathcal{A}_j \cap \mathcal{A}_\ell) = 0$ من أجل كل $j \neq \ell$. وليكن

$\mathcal{A} = \bigcup_j \mathcal{A}_j$ و عندها يكون $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$

$$(105.4) \quad \mu(\mathcal{A}) = \sum_j \mu(\mathcal{A}_j)$$

البرهان: ليكن $\mathcal{A}^k = \bigcup_{j=1}^k \mathcal{A}_j$ من أجل كل عدد صحيح $k \geq 1$. فيكون $\mathcal{A}^{k+1} = \mathcal{A}^k \cup \mathcal{A}_{k+1}$ وباستقراء النظرية السابقة نجد

أن $\mathcal{A}^k \in \mathcal{M}$. ويتبع ذلك أيضاً

$$\mu(\mathcal{A}^k) = \sum_{j=1}^k \mu(\mathcal{A}_j)$$

لا يتناقض المجموع على اليمين مع k وهو محدد بـ T ، لذا فالحده $k \rightarrow \infty$ موجود. وبتطبيق حد الاجتماع للقياس الخارجي على \mathcal{A} ،

$$(106.4) \quad \mu^\circ(\mathcal{A}) \leq \sum_j \mu^\circ(\mathcal{A}_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu^\circ(\mathcal{A}^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\mathcal{A}^k)$$

$$(107.4) \quad \mu^{\circ}(\overline{\mathcal{A}}) \leq \mu(\overline{\mathcal{A}^k}) = T - \mu(\mathcal{A}^k) \text{ و } \overline{\mathcal{A}} \subseteq \overline{\mathcal{A}^k} \text{ نجد أن } \mu^{\circ}(\overline{\mathcal{A}}) \leq T - \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\mathcal{A}^k)$$

وبجمع العلاقتين (106.4) و (107.4) نجد $\mu^{\circ}(\overline{\mathcal{A}}) + \mu^{\circ}(\mathcal{A}) \leq T$ وبالجمع مع (93.4) يصبح، $\mu^{\circ}(\overline{\mathcal{A}}) + \mu^{\circ}(\mathcal{A}) = T$ وتحقق العلاقتان (106.4) و (107.4) بالتساوي. أي أن $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$ ومضافة حسابياً، والعلاقة (106.4) مُحَقَّقة. سنبين لاحقاً أن \mathcal{M} مغلقة تحت الاجتماعات والتقاطعات المعدودة الاعتبائية.

نظرية 4.A4. بفرض أن $\mathcal{A}_j \in \mathcal{M}$ من أجل كل عدد صحيح $j \geq 1$. فإن $\mathcal{A} = \bigcup_j \mathcal{A}_j$ و $\mathcal{D} = \bigcap_j \mathcal{A}_j$ كليهما في \mathcal{M} .

البرهان: ليكن $\mathcal{A}'_1 = \mathcal{A}_1$ ، ومن أجل كل $k \geq 1$ ، ليكن $\mathcal{A}^k = \bigcup_{j=1}^k \mathcal{A}_j$ وليكن $\mathcal{A}'_{k+1} = \mathcal{A}_{k+1} \cap \overline{\mathcal{A}^k}$. وبعملية استقراء، نجد أن $\mathcal{A}'_1, \mathcal{A}'_2, \dots$ مجموعات غير متصلة قابلة للقياس و $\mathcal{A} = \bigcup_j \mathcal{A}'_j$. إذاً، ومن النظرية 3.A4، تكون \mathcal{A} قابلة للقياس. لنفرض أن $\mathcal{D} = \bigcap_j \mathcal{A}_j$. بالتالي $\overline{\mathcal{D}} = \bigcup_j \overline{\mathcal{A}_j}$. إذاً $\overline{\mathcal{D}} \in \mathcal{M}$ ، وعليه $\mathcal{D} \in \mathcal{M}$ أيضاً.

برهان النظرية 1.3.4: إن الجزأين الأولين من النظرية 1.3.4 هما النظريتان 3.A4 و 4.A4. أما الجزء الثالث، فهو أن \mathcal{A} قابلة للقياس

وقياسها صفر إذا كان $\mu^{\circ}(\mathcal{A}) = 0$. ويتبع من $\mu^{\circ}(\overline{\mathcal{A}}) = \mu^{\circ}(\mathcal{A}) + \mu^{\circ}(\overline{\mathcal{A}}) = T$ و $T \leq \mu^{\circ}(\overline{\mathcal{A}}) \leq T$ ، أي أن $\mu^{\circ}(\overline{\mathcal{A}}) = T$. تُعدّ المجموعات ذات القياس الصفري مهمة جداً في فهم تكامل ليبسيغ، وبالتالي فهي مهمة لمعرفة إذا كان يوجد أيضاً مجموعات نقاط غير قابلة للقياس ولها قياس صفري. الجواب هو نعم، سنوضح ذلك من خلال مثال بسيط.

مثال 6.A4 (المجموعة القائد). عبّر عن كل نقطة في المجال $(0, 1)$ بامتداد ثلاثي. لتكن \mathcal{B} مجموعة نقاط في المجال $(0, 1)$ والتي من

أجلها يحوي ذلك الامتداد فقط أصفاراً وأعداداً 2 وغير منته أيضاً. وبالتالي تستثني المجموعة \mathcal{B} المجال $(1/3, 2/3)$ ، لأن كل هذه الامتدادات تبدأ بـ 1. وبطريقة مشابهة، تستثني المجموعة \mathcal{B} المجالين $(1/9, 2/9)$ و $(7/9, 8/9)$ ، لأن الرقم الثاني في هذه الامتدادات 1. كما تستثني نقطة النهاية اليمنى لهذه المجالات لأن لها امتداد منتهي. لتكن \mathcal{B}_n مجموعة النقاط التي لا تحوي 1 في أول n رقم من هذا الامتداد الثلاثي. وبالتالي $\mu(\mathcal{B}_n) = (2/3)^n$ وبما أن \mathcal{B} محتواة في \mathcal{B}_n من أجل كل $n \geq 1$ ، فإن \mathcal{B} قابلة للقياس و $\mu(\mathcal{B}) = 0$.

إن امتداد كل نقطة في \mathcal{B} هو سلسلة إثنائية (باعتبار 0 و 2 أرقاماً إثنائية). ثمة عدد لا يحصى من السلاسل الإثنائية (انظر الفقرة 4A.1)، ويبقى هذا صحيحاً عند إزالة المجموعة المعدودة من السلاسل المنتهية. وبالتالي نكون قد بيّنا مجموعة لانهائية غير معدودة من أعداد ذات قياس صفري.

ليست جميع مجموعات النقاط قابلة للقياس بطريقة ليبسيغ كما سيوضحه المثال الآتي.

مثال 7.A4 (مجموعة غير قابلة للقياس). بفرض المجال $[0,1]$. نُعرّف مجموعة من الصفوف المتكافئة بحيث كل نقطتين في المجال $[0,1]$ موجودتين في صف التكافؤ ذاته إذا كان الفرق بينهما نسبياً. وبالتالي يتألف صف التكافؤ الواحد من الأعداد النسبية في المجال $[0,1]$. يتألف كل صف تكافؤ آخر من مجموعة لانهائية العدد من الأعداد غير النسبية التي فروقاتها نسبية. تقسم هذه الأعداد المجال $[0,1]$ إلى مجموعة لانهائية العدد من الصفوف التكافؤية. اعتبر الآن مجموعة \mathcal{A} تتضمن رقم واحد تماماً نختاره من كل صف تكافؤ. سنفرض أن \mathcal{A} قابلة للقياس وسنبيّن أن هذا يؤدي إلى تناقض.

من أجل مجموعة \mathcal{A} مُعطاة، لتكن $\mathcal{A} + r$ ، حيث r عدد نسبي في $(0, 1)$ ، ترمز للمجموعة التي تنتج عن مُقابلة كل $t \in \mathcal{A}$ إلى إما $t + r$ أو $t + r - 1$ ، أيهما تقع ضمن المجال $[0,1]$. فتكون المجموعة $\mathcal{A} + r$ هي إذاً المجموعة \mathcal{A} ، مزاحة بمقدار r ، جرى بعد ذلك تدويرها لتقع في المجال $[0,1]$. وبالنظر للقياسات الخارجية، من السهل رؤية أن $\mathcal{A} + r$ قابلة للقياس إذا كانت \mathcal{A} قابلة للقياس أيضاً ولكلا المجموعتين نفس القياس. أخيراً، تقع كل $t \in [0,1]$ تماماً في صف تكافؤ واحد، وإذا كان τ عنصراً من \mathcal{A} في ذلك الصف التكافؤي، تكون t واقعة في $\mathcal{A} + r$ حيث $r = t - \tau$ أو $r = t - \tau + 1$ بكلمات أخرى، $[0,1] = \bigcup_r (\mathcal{A} + r)$ والمجموعات $\mathcal{A} + r$ غير متصلة. بفرض أن \mathcal{A} قابلة للقياس، تؤكد النظرية 3.A4 أن $1 = \sum_r \mu(\mathcal{A} + r)$. إن المجموع في الجهة اليمنى يساوي 0 إذا كان $\mu(\mathcal{A}) = 0$ ويساوي لانهائية إذا $\mu(\mathcal{A}) > 0$ مما يؤدي إلى التناقض.

4.E تمارين

1.4 (سلاسل فورييه) (a) ادرس التابع $u(t) = \text{rect}(2t)$ الوارد في الشكل 2.4. أعط عبارة عامة لمعاملات سلسلة فورييه لسلسلة فورييه في المجال $[-1/2, 1/2]$. وبيّن أن السلسلة تتقارب إلى $1/2$ عند كل من نقاط النهاية، $1/4$ و $-1/4$. تلميح: لست بحاجة لمعرفة أي شيء عن التقارب هنا.

(b) مثل نفس التابع كسلسلة فورييه في الفترة $[-1/4, 1/4]$. إلى ماذا تتقارب هذه السلسلة عند $1/4$ و $-1/4$? لاحظ من هذا التمرين أن سلسلة فورييه تعتمد على الفترة التي أخذت فيها.

2.4 (معادلة الطاقة) اشتق المعادلة (6.4)، معادلة الطاقة لسلسلة فورييه. تلميح: استبدل سلسلة فورييه للتابع $u(t) \rightarrow \int u(t)u^*(t)dt$. لا تهتم للتقارب أو لتبادل النهايات هنا.

3.4 (قابلية العدّ) كما هو مبين في الملحق 4A.1، فإن مجموعات جزئية كثيرة من الأعداد الحقيقية، بما فيها الأعداد الصحيحة والنسبية، هي معدودة. أحياناً، يكون من الضروري إلغاء الترتيب الرقمي العادي لعناصر هذه المجموعات الجزئية. يُظهر هذا التمرين أن ذلك يكون مُحتملاً أحياناً.

(a) بيّن أن كل سرده للأعداد الصحيحة (مثل $0, -1, 1, -2, \dots$) تفشل في الحفاظ على الترتيب العددي للأعداد الصحيحة (تلميح: افترض وجود قائمة مرتبة عددياً ثم بين أنها لا تحتوي على عنصر أول، أي لا يوجد عنصر أصغري).

(b) بيّن أنه الأعداد النسبية في الفترة $(0,1)$ لا يمكن سردها بطريقة تُحافظ على ترتيبها العددي.

(c) بيّن أن الأعداد النسبية في المجال $[0, 1]$ لا يمكن سردها في قائمة مع الحفاظ على الترتيب العددي (ليس ثمة مشكلة في العنصر الأول، ولكن ماذا عن الثاني؟).

4.4 (المجاميع القابلة للعد) لتكن a_1, a_2, \dots مجموعة قابلة للعد من الأعداد الغير السالبة وافترض أن $s_a(k) = \sum_{j=1}^k a_j \leq A$ من أجل كل قيم k وبعض قيم $A > 0$.

(a) بيّن أن النهاية $\lim_{k \rightarrow \infty} s_a(k)$ موجودة مع بعض قيم s_a بين 0 و A . (استخدم أي مستوى من الرياضيات تشعر بأنك مرتاح إليه).

(b) ليكن b_1, b_2, \dots ترتيب آخر للأرقام a_1, a_2, \dots أي، ليكن $b_1 = a_{j(1)}, b_2 = a_{j(2)}, \dots, b_\ell = a_{j(\ell)}$ حيث $j(\ell)$ هو تبادل للأعداد الصحيحة الموجبة، أي تابع تقابل واحد إلى واحد من \mathbb{Z}^+ إلى \mathbb{Z}^+ . وليكن $s_b(k) = \sum_{\ell=1}^k b_\ell$ ، بيّن أن $\lim_{k \rightarrow \infty} s_b(k) \leq s_a$. تلميح: لاحظ أن:

$$\sum_{\ell=1}^k b_\ell = \sum_{\ell=1}^k a_{j(\ell)}$$

(c) عرّف $S_b = \lim_{k \rightarrow \infty} s_b(k)$ وبيّن أن $S_b \geq s_a$. تلميح: ادرس مقلوب التبادل، وليكن $\ell^{-1}(j)$ ، حيث من أجل j' يوجد ℓ يُحقق $j' = j(\ell)$. لاحظ أنك بيّنت أن المجموع القابل للعد من العناصر غير السالبة لا يعتمد على ترتيب الجمع.

(d) بين أن النتيجة الأنفة ليست بالضرورة صحيحة من أجل مجموع أعداد قابلة للعد يمكن أن تكون موجبة أو سالبة. تلميح: خذ بعين الاعتبار السلاسل المتناوبة.

5.4 (اجتماعات متناهية لفترات) لتكن $\mathcal{E} = \bigcup_{j=1}^{\ell} I_j$ اجتماع $\ell \geq 2$ فترة اعتباطية غير خالية. لتكن a_j و b_j تدل على نقاط النهاية اليسرى واليمنى على الترتيب لـ I_j ، يمكن لكل نقطة نهاية أن تكون مُتضمنة أو لا. افرض أن الفترات مُرتبة بحيث $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_\ell$.

(a) من أجل $\ell = 2$ ، بيّن أن كلاً من I_1 و I_2 منفصلان أو أن \mathcal{E} هي فترة وحيدة لها نقطة نهاية يسرى هي a_1 .

(b) من أجل $\ell = 2$ و $2 \leq k < \ell$ ، ليكن $\mathcal{E}^k = \bigcup_{j=1}^k I_j$. أوجد خوارزمية لبناء اجتماع من فترات منفصلة لأجل \mathcal{E}^{k+1} انطلاقاً من اجتماع مُعطى من مجالات منفصلة لأجل \mathcal{E}^k .

(c) لاحظ أن استخدام الجزء (b) ينتج استقرارياً تمثيلاً لـ \mathcal{E} بوصفه اجتماعاً لفترات منفصلة. بيّن أن نقطة النهاية اليسرى لكل فترة منفصلة مأخوذة من a_1, \dots, a_ℓ ونقطة النهاية اليمنى مأخوذة من b_1, \dots, b_ℓ .

(d) بيّن أن هذا التمثيل فريد، أي أن \mathcal{E} لا يمكن أن تُمثّل كاجتماع أي مجموعة أخرى مؤلفة من فترات منفصلة. لاحظ أن هذا يعني أن $\mu(\mathcal{E})$ مُعرّف على نحو واضح في (9.4).

6.4 (اجتماعات قابلة للعد لفترات) ليكن $\mathcal{B} = \bigcup_j I_j$ اجتماع قابل للعد لفترات اعتباطية (ممكن أن تكون متقاطعة). من أجل كل $k \geq 1$ ،

ليكن $\mathcal{B}^k = \bigcup_{j=1}^k I_j$ ومن أجل كل $k \geq j \geq 1$ ، ليكن $I_{j,k}$ يُمثّل فترة منفصلة في \mathcal{B}^k تحوي I_j (انظر التمرين 5.4).

(a) بيّن، من أجل كل $k \geq j \geq 1$ ، أن $I_{j,k} \subseteq I_{j,k+1}$.

(b) ليكن $I_j' = \bigcup_{k=j}^{\infty} I_{j,k}$. فسّر لماذا I_j' هو مجال وبيّن أن $I_j' \subseteq \mathcal{B}$.

(c) من أجل أي i, j ، بيّن أن أيّاً من $I_j' = I_i'$ أو I_j' و I_i' هي فترات منفصلة.

(d) بيّن أن السلسلة $\{I_j'; 1 \leq j < \infty\}$ بحذف التكرارات هي سلسلة مُمثّلة لـ \mathcal{B} قابلة للعد ومنفصلة المجال.

(e) بيّن أن المجموعة $\{I_j'; j \geq 1\}$ بحذف التكرارات هي فريدة، أي، بيّن أنه إذا كان أي مجال اعتباطي I محتوياً في \mathcal{B} ، فهو محتوياً

في أحد المجالات I_j' . لاحظ أن ترتيب I_j' ليس فريداً.

7.4 (حدود الاجتماع لفترات) أثبت صلاحية حدود الاجتماع لمجموعة قابلة للعد من فترات في (89.4). اتبع الخطوات المقترحة التالية:

(a) بيّن أنه إذا كانت $\mathcal{B} = I_1 \cup I_2$ فترات اعتباطية I_1 و I_2 فإن $\mu(\mathcal{B}) \leq \mu(I_1) + \mu(I_2)$ مع التساوي إذا كانت I_1 و I_2 غير متقاطعتين. ملاحظة: أن العبارة صحيحة بالتعريف إذا كانت I_1 و I_2 منفصلتين، وبالتالي فنحن نحتاج فقط لمعالجة الحالات التي تتقاطع فيها I_1 و I_2 أو التي تكونان فيها مفكوكتين ولكن ليستا منفصلتين.

(b) لتكن $\mathcal{B}^k = \bigcup_{j=1}^k I_j$ مُمثّلة كاجتماع لـ m_k فترة منفصلة ($m_k \leq k$)، وبالتالي $\mathcal{B}^k = \bigcup_{j=1}^{m_k} I_j'$. بيّن أن

$\mu(\mathcal{B}^k \cup I_{k+1}) \leq \mu(\mathcal{B}^k) + \mu(I_{k+1})$ مع التساوي إذا كانت \mathcal{B}^k و I_{k+1} غير مرتبطتين.

(c) استخدم استقراء المتناهي لثبني أنه إذا كان $\mathcal{B} = \bigcup_{j=1}^k I_j$ اجتماع متناهٍ من مجالات اعتباطية، فإن $\mu(\mathcal{B}) \leq \sum_{j=1}^k \mu(I_j)$ مع التساوي إذا كانت الفترات غير مرتبطة.

(d) مدّد الجزء (c) ليشمل اجتماعاً متناهياً قابلاً للعد من الفترات.

8.4 من أجل كل عدد صحيح موجب n ، ليكن اجتماعاً قابلاً للعد من الفترات. بيّن أن $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ هو أيضاً اجتماع قابل للعد من

الفترات. تلميح: انظر المثال 2.A4 من الفقرة 1.A4.

9.4 (القياس والتغطية) لتكن \mathcal{A} مجموعة اعتباطية قابلة للقياس في المجال $[-T/2, T/2]$ ولتكن \mathcal{B} تُغطي المجموعة \mathcal{A} . باستخدام فقط

النتائج المشتقة سابقاً من المسألة 3.A4، بيّن أن $\mu^\circ(\mathcal{B} \cap \bar{\mathcal{A}}) = \mu(\mathcal{B}) - \mu(\mathcal{A})$. يمكنك استخدام الخطوات التالية إذا رغبت بذلك:

(a) بيّن أن $\mu^\circ(\mathcal{B} \cap \bar{\mathcal{A}}) \geq \mu(\mathcal{B}) - \mu(\mathcal{A})$.

(b) من أجل أي $\delta > 0$ لتكن \mathcal{B}' تغطي المجموعة $\bar{\mathcal{A}}$ مع $\mu(\mathcal{B}') \leq \mu(\bar{\mathcal{A}}) + \delta$. استخدم المسألة 2.A4 لثبني أن

$\mu(\mathcal{B} \cap \mathcal{B}') = \mu(\mathcal{B}) + \mu(\mathcal{B}') - T$

(c) بيّن أن $\mu^\circ(\mathcal{B} \cap \bar{\mathcal{A}}) \leq \mu(\mathcal{B} \cap \mathcal{B}') \leq \mu(\mathcal{B}) - \mu(\mathcal{A}) + \delta$

(d) بيّن أن $\mu^\circ(\mathcal{B} \cap \bar{\mathcal{A}}) \geq \mu(\mathcal{B}) - \mu(\mathcal{A})$

10.4 (تقاطع التغطية) لتكن \mathcal{A} مجموعة عشوائية في المجال $[-T/2, T/2]$.

(a) بيّن أن \mathcal{A} لها سلسلة من التغطيات $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots$ بحيث تكون $\mu^\circ(\mathcal{A}) = \mu(\mathcal{D})$ عندما $\mathcal{D} = \bigcap_n \mathcal{B}_n$.

(b) بيّن أن $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$.

(c) بيّن أنه إذا كانت \mathcal{A} قابلة للقياس، فإن $\mu(\mathcal{D} \cap \bar{\mathcal{A}}) = 0$. لاحظ أنك بيّنت أنه يمكن تمثيل مجموعة اعتباطية قابلة للقياس بوصفها

تقاطعاً قابلاً للعد من اتحادات فترات قابلة للعد، بدون مجموعة القياس الصفري. ناقش بمثال أنه إذا كانت \mathcal{A} غير قابلة للقياس، فإن

$\mu^\circ(\mathcal{D} \cap \bar{\mathcal{A}})$ ليس بالضرورة أن تكون 0.

11.4 (التوابع القابلة للقياس) (a) من أجل $\{u(t): [-T/2, T/2] \rightarrow R\}$ ، بين أنه إذا كان $\{t : u(t) < \beta\}$ قابلاً للقياس، فإن

$\{t : u(t) \geq \beta\}$ قابل للقياس.

(b) بيّن أنه إذا كان $\{t : u(t) < \alpha\}$ و $\{t : u(t) < \beta\}$ قابلين للقياس، وكان $\alpha < \beta$ ، يكون $\{t : \alpha \leq u(t) < \beta\}$ قابلاً للقياس.

(c) بيّن أنه إذا كان $\{t : u(t) < \beta\}$ قابلاً للقياس من أجل كل قيم β ، فإن $\{t : u(t) \leq \beta\}$ قابل للقياس أيضاً. تلميح: عبر عن $\{t : u(t) \leq \beta\}$ كتقاطع قابل للعد من المجموعات القابلة للقياس.

(d) بيّن أنه إذا كان $\{t : u(t) \leq \beta\}$ قابلاً للقياس من أجل كل قيم β ، فإن $\{t : u(t) < \beta\}$ قابل للقياس أيضاً، أي إن تعريف التابع القابل للقياس يمكن أن يستخدم المتراحة الصارمة أو غير الصارمة.

12.4 (التوابع القابلة للقياس) افرض في هذا التمرين أن $\{u(t) : [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{R}\}$ قابل للقياس.

(a) بيّن أن $-u(t)$ و $|u(t)|$ قابلان للقياس.

(b) بفرض أن $\{g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ هو تابع متزايد (أي، $x_1 < x_2 \implies g(x_1) < g(x_2)$). أثبت أن $v(t) = g(u(t))$ قابل للقياس. تلميح: إذا كان الاستخراج مربكاً لك، بيّن أولاً أن $\exp(u(t))$ قابل للقياس ثم أثبت النتيجة الأكثر عمومية.

(c) بيّن أن كلاً من $\exp[u(t)]$ و $u^2(t)$ و $\ln|u(t)|$ قابلة للقياس.

13.4 (التوابع القابلة للقياس) (a) بيّن أنه إذا كان $\{u(t) : [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{R}\}$ و $\{v(t) : [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{R}\}$ قابلين للقياس، فإن

$u(t) + v(t)$ قابل للقياس أيضاً. تلميح: استخدم التقريب المقطع للمجموع ثم انطلق إلى الحد.

(b) بين أن $u(t)v(t)$ أيضاً قابل للقياس.

14.4 (المجموعات القابلة للقياس) افرض أن \mathcal{A} مجموعة جزئية من $[-T/2, T/2]$ وقابلة للقياس على هذا المجال. بيّن أن \mathcal{A} قابلة للقياس

أيضاً، وبفرض القياس على $[-T/2, T'/2]$ من أجل أي قيمة لـ $T' > T$ تحقق $T' > T$. تلميح: لتكن $\mu'(\mathcal{A})$ القياس الخارجي للمجموعة \mathcal{A} على المجال $[-T/2, T'/2]$ ثم بيّن أن $\mu'(\mathcal{A}) = \mu^0(\mathcal{A})$ حيث μ^0 هي القياس الخارجي على المجال $[-T'/2, T'/2]$. لتكن $\overline{\mathcal{A}}$ متمم المجموعة \mathcal{A} على $[-T'/2, T'/2]$ ثم بيّن أن $\mu'(\overline{\mathcal{A}}) = \mu^0(\overline{\mathcal{A}}) + T' - T$.

15.4 (الحدود القابلة للقياس) (a) افرض أن $\{u_n(t) : [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{R}\}$ قابلة للقياس لكل $n \geq 1$. بيّن أن $\liminf_n u_n(t)$ قابل

للقياس (التعبير $\liminf_n u_n(t)$ يعني $\liminf_m v_m(t)$ حيث $v_m(t) = \inf_{n=m}^{\infty} u_n(t)$ والقيم اللانهائية مسموحة).

(a) بيّن أن $\lim_n u_n(t)$ موجودة، من أجل t معطاة، إذا وفقط إذا كان $\liminf_n u_n(t) = \limsup_n u_n(t)$.

(b) بيّن أن المجموعة t التي تجعل $\lim_n u_n(t)$ موجوداً قابلة للقياس. بيّن أن تابعاً $u(t)$ له نهاية $\lim_n u_n(t)$ عند وجود النهاية والقيمة 0 فيما عدا ذلك هو تابع قابل للقياس.

16.4 (تكامل ليبسيغ) من أجل كل عدد صحيح $n \geq 1$ ، عرّف $u_n(t) = 2^n \text{rect}(2^n t - 1)$. ارسم أول بضعة من هذه الأمواج. بيّن أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int u_n(t) dt \neq \int \lim_n u_n(t) dt$$

17.4 (التكاملات \mathcal{L}_1) (a) بفرض أن $\{u(t) : [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{R}\}$ هو \mathcal{L}_1 . بيّن أن:

$$\left| \int u(t) dt \right| = \left| \int u^+(t) dt - \int u^-(t) dt \right| \leq \int |u(t)| dt$$

(a) بفرض أن $\{u(t) : [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{C}\}$ هو \mathcal{L}_1 . بيّن أن:

$$\left| \int u(t) dt \right| \leq \int |u(t)| dt$$

تلميح: اختر α بحيث يكون $\alpha \int u(t) dt$ حقيقي وغير سالب و $|\alpha| = 1$. استخدم الجزء (a) في $\alpha u(t)$.

18.4 (التكافؤ \mathcal{L}_2) افترض أن $\{u(t) : [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{C}\}$ و $\{v(t) : [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{C}\}$ هي توابع \mathcal{L}_2 .

(a) بيّن أنه إذا كان $u(t)$ و $v(t)$ متساويين في كل مكان تقريباً، فهما \mathcal{L}_2 متكافئان.

(b) بيّن أنه إذا كان $u(t)$ و $v(t)$ تابعين \mathcal{L}_2 متكافئين، عندها، ومن أجل $\varepsilon > 0$ ، فإن للمجموعة $\{t : |u(t) - v(t)|^2 \geq \varepsilon\}$ قياس

صفرى.

(c) باستخدام (b)، بين أن $\mu\{t: |u(t) - v(t)|^2 > 0\}$ أي إن $u(t) = v(t)$ في كل مكان تقريباً.

19.4 (التوسعات المتعامدة) افترض أن $\{u(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$ هي \mathcal{L}_2 . ولتكن $\{\theta_k(t); 1 \leq k \leq \infty\}$ مجموعة من الإشارات المتعامدة، وافترض أن $u(t)$ لها امتداد متعامد.

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \theta_k(t)$$

افترض أن مجموعة الإشارات المتعامدة تحقق:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta_k(t) \theta_j^*(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{for } k \neq j \\ A_j & \text{for } k = j \end{cases}$$

حيث $\{A_j\}$ مجموعة اعتباطية من الأرقام الموجبة. لا تشغل نفسك بقضايا التقريب في هذا التمرين.

(a) بين أن كل u_k يمكن التعبير عنها بدلالة $\int_{-\infty}^{\infty} u(t) \theta_k^*(t) dt$ و A_k .

(b) أوجد الطاقة $\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt$ بدلالة $\{u_k\}$ و $\{A_k\}$.

(c) افترض أن $v(t) = \sum_k u_k \theta_k(t)$ حيث $v(t)$ أيضاً لها طاقة متناهية. عبر عن $\int_{-\infty}^{\infty} u(t) v^*(t) dt$ كتابع لـ $\{u_k, v_k, A_k; k \in \mathbb{Z}\}$.

20.4 (سلاسل فورييه) (a) تحقق من أن (22.4) و (23.4) تنتج عن (20.4) و (18.4) باستخدام التحويل $u(t) = v(t + \Delta)$.

(b) ادرس سلاسل فورييه في الصيغة الدورية، $w(t) = \sum_k \hat{w}_k e^{2\pi i k t / T}$ حيث: $\hat{w}_k = (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} w(t) e^{-2\pi i k t / T} dt$. بين أنه من أجل أي قيمة Δ حقيقية، $(1/T) \int_{-T/2+\Delta}^{T/2+\Delta} w(t) e^{-2\pi i k t / T} dt$ يساوي أيضاً لـ \hat{w}_k ، معطياً اشتقاقاً بديلاً للعلاقة (22.4) و (23.4).

21.4 تدعي المعادلة (27.4) أن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty, \ell \rightarrow \infty} \int \left| u(t) - \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-\ell}^{\ell} \hat{u}_{k,m} \theta_{k,m}(t) \right|^2 dt = 0$$

(a) بين أن التكامل أعلاه غير متزايد في كل من n و ℓ .

(b) بين أن النهاية مستقلة عن الطريقة التي تتقارب فيها n و ℓ إلى ∞ . تلميح: انظر التمرين 4.4.

(c) بشكل أعم، بين أن الحد (النهاية) نفسه إذا كان الزوج (k, m) ، حيث $k \in \mathbb{Z}$ و $m \in \mathbb{Z}$ مرتبة بطريقة اعتباطية واستبدل الحد أعلاه بالحد في المجاميع الجزئية تبعاً لذلك الترتيب.

22.4 (الجيوب المقطعة) (a) تحقق من العلاقة (24.4) من أجل الإشارات \mathcal{L}_2 ، أي، بين أن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \left| u(t) - \sum_{m=-n}^n u_m(t) \right|^2 dt = 0$$

(b) فرق التكامل في العلاقة (28.4) إلى تكاملين منفصلين من أجل $|t| > (n + \frac{1}{2})T$ و $|t| \leq (n + \frac{1}{2})T$. بين أن التكامل الأول يسعى إلى 0 مع تزايد n .

(c) من أجل n المعطاة، بين أن التكامل الثاني أنفأ يسعى إلى 0 مع تزايد ℓ .

23.4 (التلاف) يمثل الجزء اليساري من العلاقة (40.4) تابعاً بدلالة t . عبّر عن تحويل فورييه لهذا على أنه تكامل مضاعف لكل من t و τ . من أجل كل t ، قم بالاستبدال $r = t - \tau$ ثم كامل من أجل r . ثم كامل من أجل τ للحصول على الجزء الأيمن من العلاقة (40.4). لا

تهتم بقضايا التقارب هنا.

24.4 (استمرارية تحويل \mathcal{L}_1) افترض أن $\{u(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$ تابع \mathcal{L}_1 وليكن $\hat{u}(f)$ تحويل فورييه له. ليكن ε أي عدد موجب معطى.

(a) بيّن أنه من أجل قيم T كبيرة كفايةً، يكون $\int_{|t|>T} |u(t)e^{-2\pi ift} - u(t)e^{-2\pi i(f-\delta)t}| dt < \varepsilon/2$ ليكن $\delta > 0$.

(b) من أجل قيم T و δ المختارة أعلاه، بيّن أنّ $\int_{|t|\leq T} |u(t)e^{-2\pi ift} - u(t)e^{-2\pi i(f-\delta)t}| dt < \varepsilon/2$ من أجل كل قيم f وقيم صغيرة بما فيه الكفاية لـ $\delta > 0$. يُبيّن هذا أنّ $\hat{u}(f)$ مستمرة.

25.4 (بلانشيرال) يهدف هذا التمرين إلى فهم نظرية بلانشيرال. افترض أن $u(t)$ تابع \mathcal{L}_2 وله تحويل فورييه هو $\hat{u}(f)$.

(a) بيّن أن $\hat{u}_A(f) - \hat{u}(f)$ هو تحويل فورييه للتابع $x_A(t)$ له القيمة 0 من $-A$ إلى A ويساوي $u(t)$ فيما عدا ذلك.

(b) أوضح أنّه بما أن $\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt$ متناهي، فالتكامل $\int_{-\infty}^{\infty} |x_A(t)|^2 dt$ يجب أن يسعى إلى 0 عندما $A \rightarrow \infty$. استخدم أي مستوى في المنطق الرياضي والمعنى الشائع السليم الذي تراه مناسباً.

(c) باستخدام معادلة الطاقة (45.4)، ناقش أن

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(f) - \hat{u}_A(f)|^2 dt = 0$$

ملاحظة: إن هذا هو الجزء السهل الوحيد من نظرية بلانشيرال. أما الجزء الصعب فهو أن تُبيّن وجود $\hat{u}(f)$. ليس بالضرورة وجود الحد $A \rightarrow \infty$ للتكامل $\int_{-A}^A u(t)e^{-2\pi ift} dt$ لكل قيم f ، والهدف من نظرية بلانشيرال هو أن ننسى هذه النهاية من أجل قيم فردية لـ f ، وأن نركز بدلاً عن ذلك على الطاقة في الاختلاف بين $\hat{u}(f)$ المفترضة والقيم التقريبية.

26.4 (تابع \mathcal{L}_2) افترض أن $\{u(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$ و $\{v(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$ هي \mathcal{L}_2 وأن a و b أعداد عقدية. بيّن أن $au(t) + bv(t)$ هي \mathcal{L}_2 . من أجل $T > 0$ ، بيّن أن $u(t - T)$ و $u(\frac{t}{T})$ هي توابع \mathcal{L}_2 .

27.4 (علاقة سلاسل فورييه بتكامل فورييه) افترض أن $\{u(t) : [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{C}\}$ هي تابع \mathcal{L}_2 . وبدون إعطاء أهمية للعمليات الرياضية، فإن منشور سلسلة فورييه للتابع $\{u(t)\}$ يُعطى بـ:

$$u(t) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} u^{(\ell)}(t) \quad \text{where} \quad u^{(\ell)}(t) = \sum_{k=-\ell}^{\ell} \hat{u}_k e^{2\pi ikt/T} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$\hat{u}_k = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-2\pi ikt/T} dt.$$

(a) هل الحد العلوي موجود من أجل $t \in [-T/2, T/2]$ ؟ في حال كان الجواب لا، ماذا يمكننا القول عن هذا النوع من التقارب؟

(b) هل تحويل فورييه $\hat{u}(f) = \int_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-2\pi ift} dt$ موجود من أجل كل قيم f ؟ اشرح ذلك؟

(c) تحويل فورييه للمجموع المنتهي $u^{(\ell)}(t)$ هو $\hat{u}^{(\ell)}(f) = \sum_{k=-\ell}^{\ell} \hat{u}_k T \text{sinc}(fT - k)$. في الحد $\ell \rightarrow \infty$ ، يكون $\hat{u}(f) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \hat{u}^{(\ell)}(f)$ ومن ثم

$$\hat{u}(f) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{k=-\ell}^{\ell} \hat{u}_k T \text{sinc}(fT - k)$$

بيّن على نحو موجز لماذا تتحقق هذه المعادلة بالتساوي من أجل كل قيم $f \in \mathbb{R}$. بيّن أيضاً أن $\{\hat{u}(f) : f \in \mathbb{R}\}$ مُحدّدة تماماً بقيمها، $\{\hat{u}(k/T) : k \in \mathbb{Z}\}$ عند مضاعفات $1/T$.

28.4 (أخذ العينات) غالباً ما تُقَرَّب قيمة التكامل بمجموع مُقطَّع وفق:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt \approx \delta \sum_k g(k\delta)$$

(a) بين أنه إذا كان $u(t)$ تابع طاقة متناهية حقيقي، مُحدّد حزمة التمرير المنخفض بـ W Hz، فإن التقريب الأنف هو تماماً من أجل $g(t) = u^2(t)$ إذا كانت $\delta \leq 1/(2W)$ ، أي، بين أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)dt = \delta \sum_k u^2(k\delta)$$

(b) بين أنه إذا كان $g(t)$ تابع طاقة متناهية حقيقي، مُحدّد حزمة التمرير المنخفض بـ W Hz، ومن أجل $\delta \leq 1/(2W)$ فإن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = \delta \sum_k g(k\delta)$$

(c) بين أنه إذا كان $\delta > 1/2W$ ، فلا يوجد عندها مثل هذه العلاقة بشكل عام.

29.4 (درجات الحرية) يستعرض هذا التمرين كمية الطاقة المتبقية لتابع محدود الحزمة الترددية $\mathbb{R} \rightarrow [-T/2, T/2] : \{u(t)\}$ خارج المنطقة التي تكون فيها معاملات أخذ العينات غير صفرية. ليكن $T = 1/(2W) = 1$ و n عدد صحيح زوجي موجب معطى. وليكن $u_k = (-1)^k$ من أجل $-n \leq k \leq n$ ، و $u_k = 0$ من أجل $|k| > n$. بين أن $|u(n + \frac{1}{2})|$ يتزايد بدون حدّ مع تزايد نقطة النهاية n . بين أن $|u(n - m - \frac{1}{2})| > |u(n + m + \frac{1}{2})|$ من أجل كل عدد صحيح m حيث $0 \leq m < n$. بكلمات أخرى، تؤدي إزاحة نقاط أخذ العينات بـ $1/2$ إلى جعل أغلب طاقة نقطة العينة تقع خارج المجال $[-n, n]$.

30.4 (نظرية أخذ العينات في المجال $[\Delta - W, \Delta + W]$) (a) تأكد من زوج تحويل فورييه الوارد في (70.4). تلميح: استخدام قواعد التقييس والإزاحة في $\text{sinc}(t) \leftrightarrow \text{rect}(f)$.
(b) بين أن التوابع التي شكّلت التوسعات متعامدة. تلميح: بين أن تحويلات فورييه الموافقة متعامدة.
(c) بين أن التوابع الوارد في (74.4) متعامدة.

31.4 (التوابع المحدودة المطال) أحياناً من المهم توليد إشارات حزمة القاعدية بمطالات مُحدّدة. تشرح هذه المسألة الأشكال النبضية التي تحقق هذا.

(a) أوجد تحويل فورييه للتابع $g(t) = \text{sinc}^2(Wt)$. أظهر أن $g(t)$ محدود الحزمة إلى $f \leq W$ وارسم كلاً من $g(t)$ و $\hat{g}(f)$.
تلميح: تذكر أن الضرب في مستوي الزمن يكافئ التلاف في المستوي الترددي).

(b) ليكن $u(t)$ تابعاً L_2 حقيقياً مستمراً محدود الحزمة القاعدية إلى $f \leq W$ (هذا يعني أنه تابع $u(t) = \sum_k u(kT) \text{sinc}(t/T - k)$ حيث $T = 1/2W$). ليكن $v(t) = u(t) * g(t)$. عبّر عن $v(t)$ بدلالة العينات $\{u(kT); k \in \mathbb{Z}\}$ للتابع $u(t)$ والإزاحات $\{g(t - kT); k \in \mathbb{Z}\}$ للتابع $g(t)$. تلميح: استخدم رسوماتك في الجزء (a) لتقييم $g(t) * \text{sinc}(t/T)$.

(c) بين أنه إذا كانت العينات المنفصلة T -spaced للتابع $u(t)$ ليست سالبة، فإن $v(t) \geq 0$ من أجل جميع قيم t .

(d) اشرح لماذا $\sum_k \text{sinc}(t/T - k) = 1$ من أجل جميع قيم t .

(e) باستخدام (d)، بين أن $\sum_k g(t - kT) = c$ من أجل جميع قيم t وأوجد الثابت c . تلميح: استخدم التلميح في (b) مرة أخرى.

(f) الآن افترض أن $u(t)$ كما هي مُعرّفة في الجزء (b)، أيضاً تحقق $u(kT) \leq 1$ من أجل جميع قيم $k \in \mathbb{Z}$. بين أن $v(t) \leq 2$ من أجل جميع قيم t .

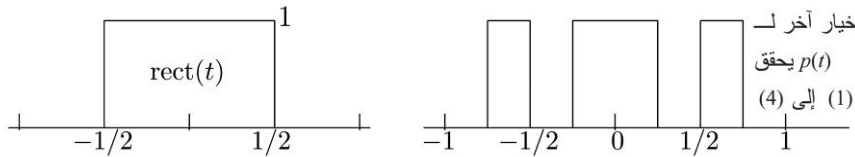
(g) اسمح للتابع $u(t)$ الآن أن يكون عقدياً، مع $|u(kT)| \leq 1$. بين أن $|v(t)| \leq 2$ من أجل جميع قيم t .

32.4 (المجموعات المتعامدة) إن للتابع $\text{rect}(t/T)$ خاصية مميزة جداً وهي أنه إضافة إلى إزاحاته الزمنية والترددية بالمقادير kT و j/T على الترتيب، يُشكّل مجموعة متعامدة. كما أن للتابع $\text{sinc}(t/T)$ هذه الخاصية ذاتها. سنشرح توابع أخرى هي تعميمات للتابع

$\text{rect}(t/T)$ والتي، كما سيظهر في الأجزاء (a) إلى (d)، لها نفس الخاصة المهمة. للتبسيط اختر $T = 1$. تأخذ هذه التتابع فقط القيم 0 و1 ويُسمح أن تكون غير صفرية فقط على المجال $[-1, 1]$ بدلاً من $[-1/2, 1/2]$ كما هو مع التابع $\text{rect}(t)$. بشكل واضح، تعتبر التتابع هنا محققةً للقيود التالية:

$$\begin{aligned} (108.4) \quad & \text{من أجل جمع قيم } t \text{ (خاصية 0/1)} & p(t) &= p^2(t) \\ (109.4) \quad & \text{من أجل } |t| > 1 & p(t) &= 0 \\ (110.4) \quad & \text{من أجل كل قيم } t \text{ (تناظر)} & p(t) &= p(-t) \\ (111.4) \quad & \text{من أجل } 0 \leq t < 1/2 & p(t) &= 1 - p(t - 1) \end{aligned}$$

ملاحظة: بسبب الخاصية (110.4)، يتحقق الشرط (111.4) أيضاً من أجل $1/2 < t \leq 1$. لاحظ أيضاً أن $p(t)$ في النقاط المفردة $t = \pm 1/2$ لا تؤثر بأي خاصة تعامدية، لذا فأنت حرّ في تجاهل هذه النقاط خلال نقاشك.



- (a) بيّن أن $p(t)$ متعامد مع $p(t - 1)$. تلميح: قيم $p(t)p(t - 1)$ من أجل كل قيم $t \in [0, 1]$ فيما عدا $t = 1/2$.
- (b) بيّن أن $p(t)$ متعامد مع $p(t - k)$ من أجل كل القيم الصحيحة $k \neq 0$.
- (c) بيّن أن $p(t)$ متعامد مع $p(t - k)e^{i2\pi mt}$ من أجل القيم الصحيحة $k \neq 0$ و $m \neq 0$.
- (d) بيّن أن $p(t)$ متعامد مع $p(t)e^{2\pi imt} + p(t - 1)e^{-2\pi im(t-1)}$. تلميح: قيم $p(t)e^{-2\pi imt} + p(t - 1)e^{-2\pi im(t-1)}$.
- (e) لنكن $h(t) = \hat{p}(t)$ حيث $\hat{p}(f)$ هي تحويل فورييه لـ $p(t)$. إذا حققت $p(t)$ الخصائص من (1) إلى (4)، هل هذا يؤدي إلى أن $h(t)$ تمتلك الخاصة بأنها متعامدة مع $h(t - k)e^{2\pi imt}$ حيثما كان أي من العددين الصحيحين k أو m غير صفري؟ ملاحظة: غالباً، لا يتطلب وجود عمليات حسابية في هذه المسألة.

33.4 (النهايات) أنشئ مثلاً لسلسلة \mathcal{L}_2 من التتابع $v^{(m)}(t)$, $m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$ بحيث أن $\lim_{m \rightarrow \infty} v^{(m)}(t) = 0$ من أجل جميع قيم t والتي من أجلها يكون $\text{l.i.m.}_{m \rightarrow \infty} v^{(m)}(t)$ غير موجود. بمعنى آخر، بيّن أن التقارب في كل مكان لا يؤدي إلى تقارب \mathcal{L}_2 . تلميح: خذ بعين الاعتبار الإزاحة الزمنية.

34.4 (التشوّه) أوجد مثلاً بحيث يكون $\hat{u}(f) = 0$ من أجل $|f| > 3W$ وغير صفري من أجل $W < |f| < 3W$ ولكن عندما $T = 1/(2W)$ ، يكون $s(kT) = v_0(kT)$ (كما هو مُعرّف في (77.4) من أجل جميع قيم $k \in \mathbb{Z}$). تلميح: لاحظ أن ذلك يُكافئ تحقيق المساواة بين $\hat{u}(f)$ و $\hat{s}(f)$ من أجل $|f| \leq W$. انظر للشكل (10.4).

35.4 (التشوّه) التمرين التالي مصمم من أجل شرح أخذ العينات لإشارات الحزمة القاعدية التقريبية. لتجنب الحسابات المعقدة، ننظر إلى إشارة محدودة الحزمة القاعدية إلى $3/2$ وبمعدل أخذ عينات 1 (أي تؤخذ العينات عند $1/3$ المعدل الذي يجب أن تؤخذ عنده). اجعل على وجه الخصوص $u(t) = \text{sinc}(3t)$.

- (a) ارسم $\hat{u}(f)$. ارسم التابع $\hat{v}_m(f) = \text{rect}(f - m)$ من أجل كل عدد صحيح m بحيث $v_m(f) \neq 0$. لاحظ أن $\hat{u}(f) = \sum_m \hat{v}_m(f)$
- (b) ارسم تحويلات فورييه العكسية $v_m(t)$ (الجزء الحقيقي والتخيلي إذا كان عقدياً).
- (c) تحقق مباشرة من المعادلات أن $u(t) = \sum v_m(t)$. تلميح: يصبح هذا أسهل إذا عبرت عن الجزء الجيبي للتابع sinc كمجموع

قوى عُقدية.

(d) تحقق من التوسع الجيبي المثقل، (73.4). (يوجد فقط ثلاث حدود غير صفرية في التوسع).

(e) من أجل التقريب $s(t) = u(0)\text{sinc}(t)$ ، أوجد الطاقة في الفرق بين $u(t)$ و $s(t)$ وفسر الشروط.

36.4 (التشوّه) ليكن $u(t)$ تحويل فورييه العكسي للتابع $\hat{u}(f)$ الذي هو \mathcal{L}_1 و \mathcal{L}_2 . ليكن $v_m(t) = \int \hat{u}(f)\text{rect}(fT - m)e^{2\pi ift} df$ وليكن $v^n(t) = \sum_{-n}^n v_m(t)$.

(a) بيّن أن $|u(t) - v^n(t)| \leq \int_{|f| \geq (2n+1)/T} |\hat{u}(f)| df$ وبالتالي أن $u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} v^n(t)$ من أجل كل t .
 (b) بين أن التوسع الجيبي المثقل، (76.4) يتقارب في كل النقاط تقريباً من أجل جميع قيم t . تلميح: من أجل أي قيمة t وأي $\varepsilon > 0$ ، اختر n بحيث $|u(t) - v^n(t)| \leq \varepsilon/2$. ثم من أجل كل m ، حيث $|m| \leq n$ ، وسّع $v_m(t)$ في منشور أخذ العينات باستخدام حدود كافية لإبقاء الخطأ أقل من $\frac{\varepsilon}{4n+2}$.

37.4 (التشوّه) (a) بين أن $\hat{s}(f)$ في (83.4) هي \mathcal{L}_1 إذا كان $\hat{u}(f)$ أيضاً \mathcal{L}_1 .

(b) ليكن $\hat{u}(f) = \sum_{k \neq 0} \text{rect}[k^2(f - k)]$. بيّن أن $\hat{u}(f)$ هو \mathcal{L}_1 و \mathcal{L}_2 . ليكن $T = 1$ من أجل $\hat{s}(f)$ وبيّن أن $\hat{s}(f)$ ليست \mathcal{L}_2 .
 تلميح: ارسم $\hat{u}(f)$ و $\hat{s}(f)$.

(c) بيّن أن $\hat{u}(f)$ لا تحقق $\lim_{|f| \rightarrow \infty} \hat{u}(f)|f|^{1+\varepsilon} = 0$.

38.4 (التشوّه) ليكن $u(t) = \sum_{k \neq 0} \text{rect}[k^2(t - k)]$ ، وبيّن أن $u(t)$ هي \mathcal{L}_2 . أوجد $s(t) = \sum_k u(k) \text{sinc}(t - k)$ وبيّن أنه ليس \mathcal{L}_1 ولا \mathcal{L}_2 . أوجد $\sum_k u^2(k)$ وفسّر لماذا لا تُطبّق معادلة طاقة أخذ العينات (66.4) هنا.

5. الفضاءات الشعاعية وفضاء الإشارة

مقدمة

وجدنا في الفصل السابق أن أي L_2 تابع $u(t)$ يمكن أن يمتد ضمن امتدادات متعامدة باستخدام مجموعات من التوابع المتعامدة كالمنحنيات الجيبية المعتمدة على تابع sinc الموزون والمنحنيات الجيبية T المعتمدة على المسافات الزمنية لذلك فإن التابع $u(t)$ يمكن أن يحدد بسلسلة حدود غير منتهية مثل $\{u_{k,m} - \infty < k, m < \infty\}$.

هندسياً، يشار إلى مصفوفة الأعداد n (n -tuples) غالباً كأشعة، حيث إن استخدام مصطلح الشعاع مفيد جداً في معالجة المصفوفات النونية السابقة. وإن مجموعة المصفوفات النونية المكونة من الأعداد الحقيقية تسمى \mathbb{R}^n ومصفوفة الأعداد التخيلية تسمى \mathbb{C}^n . ويتبين مما سبق أن أهم خصائص هذه المصفوفات تنطبق أيضاً على سلاسل لانهاية معدودة من الأعداد الحقيقية أو العقدية. كما أنه لا ينبغي أن يكون مفاجئاً، بعد العودة لنتائج الفقرات السابقة، أن هذه الخصائص تنطبق أيضاً على أمواج L_2 .

إن فضاء الأشعة هو أساساً عبارة عن مجموعة أغراض (مثل مجموعة المصفوفات الحقيقية النونية n -tuples) جنباً إلى جنب مع مجموعة من قواعد معالجة هذه الأغراض. ثمة مجموعة من البديهيات التي تصف بدقة كيفية عمل هذه الأغراض والقواعد الناظمة لها. أية خصائص تتبع تلك البديهيات يجب أن تنطبق على أي فضاء أشعة، وهذا يعني أي مجموعة من الأغراض التي تلي تلك البديهيات. \mathbb{R}^n و \mathbb{C}^n تلي هذه البديهيات، وسوف نرى أن السلاسل المعدودة وأمواج L_2 تنطبق عليها أيضاً تلك البديهيات.

لحسن الحظ، فإنه يمكن تطوير الخواص العامة لفضاءات الأشعة من هذه المسلمات بالسهولة نفسها التي يمكن أيضاً تطوير خواص محددة للحالات الخاصة لكل من $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$. ولحسن الحظ أيضاً يمكننا استخدام \mathbb{R}^n كمثال (وبالتحديد \mathbb{R}^2) لتطوير نظرة عامة هندسية عن فضاءات الأشعة عموماً.

مجموعة توابع L_2 التي تمثل فضاء شعاعي سوف تسمى أيضاً فضاء الإشارة وهو أحد أسس نظرية الاتصالات الرقمية الحديثة منذ شيوعها من خلال الكتاب المرجعي لمؤلفيه Wozencraft و Jacobs [35].

يملك فضاء الإشارة الخواص التالية:

- لا تعتمد العديد من وجهات النظر عن الأمواج (الإشارات) ومجموعاتها على الزمن والتردد، بل تعتمد فقط على العلاقات بين الأشعة.
- تظهر الامتدادات المتعامدة بشكل جيد بدلالة مصطلحات فضاء الأشعة.
- تعالج التساؤلات المتعلقة بالنهايات والتقريب بسهولة في فضاء الأشعة وهذا هو أحد الأسباب التي جعلتنا نبرهن العديد من النتائج المتعلقة بالفصل الرابع في هذا الفصل.

1.5 المبرهنات والسمات الأساسية لفضاء الأشعة

الفضاء الشعاعي V هو مجموعة من العناصر $v \in V$ التي تسمى أشعة، مع مجموعة من القواعد للعمل على هذه الأشعة ومجموعة من العناصر الإضافية التي تسمى مدرجات $scalars$. إن مجموعة الأعداد السلمية \mathbb{F}^{70} يمكن أن تكون لغرض المعالجة في سياق هذا الفصل، إما مجموعة الأعداد الحقيقية \mathbb{R} أو مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} . يسمى الفضاء الشعاعي الذي يتعامل مع الأعداد الحقيقية *الفضاء الشعاعي الحقيقي* والذي يتعامل مع الأعداد العقدية يسمى *الفضاء الشعاعي العقدي*.

المثال الأكثر شيوعاً عن الفضاء الشعاعي الحقيقي هو \mathbb{R}^n ⁷¹ وهنا تمثل الأشعة بمصفوفات نونية من الأعداد الحقيقية. حيث تمثل المجموعة \mathbb{R}^2 هندسياً بمستوي، وتمثل الأشعة في \mathbb{R}^2 بنقط ضمن المستوي. تمثل المجموعة \mathbb{R}^3 هندسياً على نحو مشابه بفضاء إقليدي ثلاثي الأبعاد.

⁷⁰ يمكن تعريف فضاءات الأشعة بحيث تكون المدرجات عناصر في حقل عشوائي. كما أنه ليس ضرورياً في هذا السياق التوسع في مفهوم الحقول.

⁷¹ يفضل العديد من الدارسين تعريف \mathbb{R}^n على أنه صف فضاء أشعة حقيقي ذو n بعد، إلا أن الغالبية العظمى منهم تنظر إلى \mathbb{R}^n على أنه فضاء n -tuples. وبشكل أكثر أهمية، فإن فضاء n -tuples سوف يستخدم دوماً كمثال على \mathbb{R}^n وذلك لكونها تسمية أكثر ملاءمة.

إن المثال الأكثر شيوعاً عن الفضاء الشعاعي العقدي هو \mathbb{C}^2 ، والذي يمثل مجموعة المصفوفات النونية المكونة من أعداد عقدية. المرهفات المتعلقة بالفضاء الشعاعي v مبنية في الأسفل، وتطبق على أي فضاء عشوائي وبالتحديد على الفضاءين الشعاعيين الحقيقي والعقدي قيد الدراسة:

1. الجمع: من أجل كل $v \in v$ و $u \in v$ يوجد شعاع فريد $v + u \in v$ يسمى مجموع u و v ويحقق الخواص التالية:

$$(a) \text{ الخاصية التبديلية: } u + v = v + u$$

$$(b) \text{ الخاصية التجميعية: } v + (u + w) = (v + u) + w \text{ من أجل كل } v, u, w \in v$$

$$(c) \text{ الخاصية الصفرية: يوجد عنصر فريد } 0 \in v \text{ يحقق } v + 0 = v \text{ من أجل } v \in v$$

$$(d) \text{ الخاصية السلبية: من أجل } v \in v \text{ فإنه يوجد شعاع فريد } -v \in v \text{ يحقق: } v + (-v) = 0.$$

2. الجداء السلمي⁷²: من أجل كل عدد α وكل شعاع $v \in v$ يوجد شعاع فريد $\alpha v \in v$ يسمى بجداء α و v السلمي ويحقق:

$$(a) \text{ الخاصية التجميعية: } \alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v \text{ من أجل } v \in v \text{ والأعداد } \alpha \text{ و } \beta.$$

$$(b) \text{ الضرب بواحد: من أجل الأعداد الواحيدة فإن } 1v = v \text{ من أجل } v \in v.$$

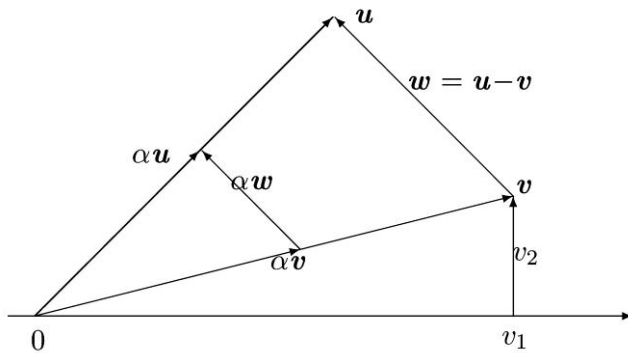
3. القوانين التوزيعية:

$$(a) \text{ من أجل كل الأعداد } \alpha \text{ وكل الأشعة } v, u \in v \text{ فإن: } \alpha(u + v) = \alpha v + \alpha u.$$

$$(b) \text{ من أجل كل الأعداد } \alpha, \beta \text{ والأشعة } v \in v \text{ فإن } (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v.$$

مثال 1.1.5: من أجل فضاء شعاعي \mathbb{R}^n فإن الشعاع v هو من مرتبة n صف $\{v_1, \dots, v_n\}$ من الأعداد الحقيقية. تعرف الإضافة وفق $v + u = (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n)$ ويعرف شعاع الصفر كما يلي $0 = (0, \dots, 0)$ حيث الأعداد السلمية α هي الأرقام الحقيقية وتعرف αv وفق $(\alpha v_1, \dots, \alpha v_n)$ وهذا موضح هندسياً في الشكل (1.5) من أجل \mathbb{R}^2 .

مثال 2.1.5: إن شعاع الفضاء \mathbb{C}^n مماثل للشعاع \mathbb{R}^n إلا أنه يختلف عنه فقط في كون v ذا n صف من أعداد عقدية والأعداد السلمية هي عقدية. كما نلاحظ أن \mathbb{C}^2 لا يمكن تمثيله هندسياً بسهولة لأن أي شعاع في \mathbb{C}^2 يكون محددًا بأربعة أعداد حقيقية. يترتب على القارئ التحقق من البديهية من أجل كل من \mathbb{R}^2 و \mathbb{C}^2 .



مُثلت الأشعة بنقاط أو بخطوط موجهة.

يقع الجداء السلمي αu و u على نفس الخط من النقطة 0.

ينص قانون التوزع أن المثلثات تتدرج على نحو صحيح.

الشكل 1.5: التفسير الهندسي للفضاء \mathbb{R}^2 . يمثل الشعاع $v = (v_1, v_2)$ بنقطة ذات إحداثيين أفقي v_1 وعمودي v_2 في المستوى الإقليدي. يمكن النظر إليها على أنها الخط الموجه من مبدأ الإحداثيات 0 وحتى النقطة v . يمكن النظر إلى شعاع v ، في بعض الأحيان، كما في الحالة $w = u - v$ ، على أنه خط موجه من نقطة غير نقطة الصفر (النقطة v في هذه الحالة) إلى نقطة أخرى u . يدل هذا التفسير الهندسي على مفاهيم الطول والزوايا، غير المتضمنة في البديهيات. سندرس هذه القضية تفصيلاً فيما بعد.

مثال 3.1.5: يوجد فضاء شعاعي عديم الأهمية يكون فيه العنصر الوحيد هو الشعاع الصفر ومن أجل كل من الأعداد الحقيقية والتخييلية يكون $\alpha 0 = 0$ وبالتالي تعرف الفضاءات الشعاعية ذات الأهمية بأنها الفضاءات التي تملك أكثر من عنصر واحد، وذلك ما

⁷² عمليات الجمع والطرح والإضافة والقسمة فيما بين الأعداد scalars، باستخدام القواعد المعروفة لكل من \mathbb{R}^n و \mathbb{C}^n ، ولن نقوم بإعادة دراستها في هذا الكتاب.

نفترضه دوماً دون أي توضيح إضافي.

وبالنظر إلى مبرهنات الترابط والتبادل فيمكننا أن نقول إن المجموع المحدد $\sum_j \alpha_j v_j$ يعرف بشكل غير ملتبس دون الحاجة إلى أقواس، حيث α_j هو عدد سلمي و v_j هو شعاع وهذا المجموع يسمى *المجموع الخطي للأشعة* $\{v_j\}$.
 نبين تالياً أن مجموعة الأمواج العقديّة ذات الطاقة المحدودة يمكن التعبير عنها كفضاء شعاعي.⁷³ عندما ننظر للإشارة $v(t)$ كشعاع فإننا نعبر عنها بالرمز v وذلك لسببين. الأول أنه يذكرنا بأننا نمثل الإشارة بشعاع والثاني هو أن الإشارة $v(t)$ تعبر أحياناً عن تابع وأحياناً أخرى عن قيمة هذا التابع عند قيمة محددة t وبالتالي فإن تمثيل الإشارة بشعاع v يجنبنا هذا الغموض.
 يمثل شعاع الجمع $u + v$ بطريقة واضحة كإشارة حيث تقابل mapped فيها كل t القيمة $u(t) + v(t)$ ؛ وبالتالي فإن الجداء السلمي αv يعرف كإشارة تقابل فيها كل t القيمة $\alpha v(t)$. كما يعرف الشعاع 0 بإشارة تقابل فيها كل t القيمة 0 .

لا تتميز مبرهنات الفضاء الشعاعي بصعوبة التحقق من تمثيل فضاء الإشارات هذه، ولبرهان أن مجموع $u + v$ إشارتين محدودتي الاستطاعة u و v هو أيضاً محدود الاستطاعة لكون مجموع إشارتين قابلتين للقياس هو إشارة قابلة للقياس. كما أنه إذا كانت u, v أعداد عقدية فإن: $|v + u|^2 \leq 2|v|^2 + 2|u|^2$ ، ومنه:

$$(1.5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |v(t) + u(t)|^2 dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} 2|v(t)|^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} 2|u(t)|^2 dt < \infty$$

وبشكل مشابه، إذا كانت v تملك استطاعة محدودة فإن αv تملك استطاعة محدودة أيضاً وهي أكبر بمقدار $|\alpha|^2$ من استطاعة v ؛ وبالتالي يمكن التحقق من الفرضيات الأخرى وبرهنتها.

يبين الجدال السابق أن مجموعة الإشارات محدودة الاستطاعة إضافة إلى تعريف جمع وجداء الأعداد السلمية العقدية تشكل أيضاً فضاء شعاعياً عقدياً وأن مجموعة الإشارات محدودة الاستطاعة ضمن تعريف جمع وجداء الأعداد الحقيقية تشكل فضاء شعاعياً حقيقياً.

1.1.5 الفضاء الشعاعي محدود الاتجاهات

تتمدد *span* مجموعة الأشعة $v \in v$ والتي تسمى مجموعة امتداد v ، إذا كان كل شعاع $v \in v$ هو تركيب خطي للأشعة v_1, \dots, v_n .
 ليكن في مثال R^n ، $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ وأن $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ وأن $e_n = (0, \dots, 1)$ هي الأشعة الواحدة n للفضاء R^n . تمتد الأشعة الواحدة للمجموعة R^n ونظراً لأن شعاع $v \in R^n$ يمكن أن يمثل كمجموعة خطية (تركيب) من الأشعة الواحدة، أي:

$$v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$$

يكون الفضاء الشعاعي v محدود الأبعاد إذا وجد مجموعة أشعة محدودة u_1, \dots, u_n تمتد عبر v . وهكذا فإن R^n محدود الأبعاد لأن e_1, \dots, e_n تمتد عبره، وبشكل مشابه فإن C^n يكن محدود الأبعاد. إذا لم يكن v محدود الأبعاد فهو فضاء غير محدود الاتجاهات؛ وسنرى فيما بعد أن L_2 هو فضاء ذي أبعاد لا متناهية.

مجموعة الأشعة $v \in v$ تكون مرتبطة خطياً إذا تحققت العلاقة $\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j = 0$ من أجل بعض الأعداد السلمية التي لا يساوي بعض منها الصفر وهذا يؤكد أن كل شعاع v_k تكون فيه $\alpha_k \neq 0$ يكون مجموعة خطية مع الأشعة الأخرى. أي:

$$v_k = \sum_{j \neq k} \frac{-\alpha_j}{\alpha_k} v_j$$

كما أن مجموعة الأشعة $v \in v$ تكون مستقلة خطياً إذا لم تكن مرتبطة خطياً أي إذا كان $\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j = 0$ من أجل كل الأعداد التي تساوي الصفر. نحذف كلمة "خطياً" عند التعبير عن الارتباط والاستقلال وذلك لأغراض الاختصار.

من الواضح أن أشعة الواحدة e_1, \dots, e_n التي تمثل عناصر في R^n ، تكون مستقلة خطياً وبشكل مشابه تكون مستقلة خطياً كعناصر في

⁷³ هناك اختلاف هام بين فضاء الأشعة الذي قمنا بتعريفه وذلك الذي سنعرّفه لاحقاً بـ L_2 . يتمحور هذا الفرق حول اصطلاح L_2 المكافئ والذي سنقوم ببحثه لاحقاً.

\mathbb{C}^n .

تعرف مجموعة الأشعة v على أنها أساس الفضاء v إذا امتدت هذه المجموعة عبر v ، وكانت مستقلة خطياً. ولهذا فإن الأشعة الواحدة e_1, \dots, e_n تشكل أساس الفضاء \mathbb{R}^n ، وبشكل مشابه الأشعة الواحدة كعناصر من \mathbb{C}^n تشكل أساس الفضاء \mathbb{C}^n . النظرية التالية مهمة وبسيطة؛ للبرهان، انظر التمرين 1.5 أو أي كتاب عن الجبر الخطي.

النظرية 1.1.5 (أساسيات الفضاء الشعاعي محدود الاتجاهات). بفرض أن v هو فضاء شعاعي⁷⁴ محدود الاتجاهات وذو أهمية

فإن:

- إذا كانت الأشعة v_1, \dots, v_m تسمح للفضاء v لكنها مرتبطة خطياً، فإن مجموعة جزئية للأشعة v_1, \dots, v_m تشكل أساساً للفضاء v من أجل $n < m$ شعاع.
- إذا كانت الأشعة v_1, \dots, v_m مستقلة خطياً لكنها لا تمتد عبر الفضاء v فيوجد بالتالي أساس لـ v مع $n > m$ شعاع تتضمن v_1, \dots, v_m .
- كل أساس لـ v يتضمن العدد نفسه من الأشعة.

يمكن الآن تعريف بعد فضاء شعاع محدود الأبعاد بأنه عدد الأشعة التي تمثل أساس الفضاء الشعاعي. تؤمن هذه النظرية ضمناً خوارزمتين لإيجاد أساس الفضاء الشعاعي: الخوارزمية الأولى: تبدأ من أي مجموعة مستقلة خطياً (مثل شعاع غير صفري) وتقوم بإضافة الأشعة المستقلة حتى الوصول لمجموعة الانتشار (مجموعة الامتداد). الخوارزمية الثانية: تبدأ من أي مجموعة انتشار وتحذف الأشعة المرتبطة خطياً حتى الوصول لمجموعة مستقلة خطياً.

من أجل أي أساس v_1, \dots, v_n في فضاء محدود الاتجاهات فإن كل شعاع $v \in \mathcal{V}$ يمكن أن يمثل كالتالي:

$$(2.5) \quad v = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j, \quad \text{where } \alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ are scalars}$$

إن أي شعاع $v \in \mathcal{V}$ يمكن أن يمثل بشكل فريد بدلالة أساسه كمصفوفة نونية من المعاملات $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ في المعادلة (2.5) ولهذا فإن أي فضاء شعاعي \mathcal{V} ذو نمط n بعد عبر \mathbb{R} أو \mathbb{C} يمكن أن يمثل كنسخة⁷⁵ من \mathbb{R}^n أو \mathbb{C}^n . وهذا يقود إلى النهج الأولي القائم على المصفوفة/الشعاع الذي يمثل الجبر الخطي. والذي يربطه من مقارنة البديهية للتناسق الحر هو القدرة على التفكير بالأشعة دون تحديد الأساس. سوف نرى قيمة ذلك لاحقاً عندما نعرف الفضاءات الجزئية وندرس الفضاءات الجزئية المنتهية للفضاءات الشعاعية اللامتناهية الأبعاد مثل L_2 .

2.5 فضاء الجداء الداخلي

لا تتضمن فرضيات الفضاء الشعاعي المشروحة سابقاً فكرة موروثه عن الطول أو الزاوية على الرغم من أن مثل هذه الخصائص الهندسية مدرجة في الشكل (1.5) وأيضاً ضمن منظورنا الهندسي لكل من \mathbb{R}^n و \mathbb{C}^n ، وبالتالي فإن العنصر المفقود هو الجداء الداخلي.

الجداء الداخلي في الفضاء الشعاعي العقدي \mathcal{V} هو تابع عقدي ذو شعاعين $v, u \in \mathcal{V}$ يمثلان بالشكل $\langle v, u \rangle$ يحققان الفرضيات

التالية:

$$(a) \text{ التماثل الهرميتي (الواحدي): } \langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle^*$$

$$(b) \text{ التماثل الهرميتي المضاعف الخطية: } \langle \alpha v + \beta u, w \rangle = \alpha \langle v, w \rangle + \beta \langle u, w \rangle, \text{ وبشكل مشابه يكون } \langle v, \alpha u + \beta w \rangle = \alpha \langle v, u \rangle + \beta \langle v, w \rangle$$

$$(c) \text{ الإيجابية الحصرية: } \langle v, v \rangle \geq 0 \text{ مع التساوي إذاً فقط إذا كان } v = 0.$$

⁷⁴ يدعى فضاء الأشعة البديهي الذي لا يوجد فيه أي عنصر اصطلاحاً بفضاء ذي بعد منعدم والذي يمكن أن ينظر إليه على أنه ذو أساس فارغ.

⁷⁵ بتعبير أدق \mathcal{V} و \mathbb{R}^n و \mathbb{C}^n متعددة الأشكال بمعنى أنه يوجد علاقة واحد إلى واحد بين الأشعة والصفوف \mathbb{R}^n و \mathbb{C}^n مما يحافظ على عمليات فضاء الأشعة. يعني ذلك ببساطة، أن المسائل التي تتعلق بأشعة الفضاء \mathcal{V} تصبح قابلة للحل عن طريق الترجمة إلى n -صف كأساس، ومن ثم العمل في \mathbb{R}^n و \mathbb{C}^n .

يسمى الفضاء الشعاعي ذو الجداء الداخلي الذي يحقق الفرضيات السابقة الفضاء الشعاعي الداخلي. ينطبق التعريف نفسه على الفضاء الشعاعي الحقيقي، إلا أن الجداء الداخلي هو حقيقي على الدوام والمرافقات conjugates العقدية يمكن أن تحذف. يعرف معيار (مقياس) الطول $\|v\|$ للشعاع v وهو فضاء الجداء الداخلي كالتالي:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

يكون الشعاعان v, u متعامدين إذا كان $\langle v, u \rangle = 0$ ، ولهذا نجد أن الدلالات الهندسية المهمة للطول والتعامد تعرف كمصطلحات بدلالة فضاء الجداء الداخلي.

1.2.5 فضاءات الجداء الداخلي \mathbb{R}^n و \mathbb{C}^n

من أجل الفضاء الشعاعي \mathbb{R}^n المكون من n -صف حقيقي، يعرف الجداء الداخلي للشعاعين $v = (v_1, \dots, v_n)$ و $u = (u_1, \dots, u_n)$ كالتالي:

$$\langle v, u \rangle = \sum_{j=1}^n u_j v_j$$

كما ويترتب على الدارس التحقق من أن هذا التعريف يحقق فرضيات الجداء الداخلي أعلاه. إن الطول $\|v\|$ للشعاع v هو $\sqrt{\sum_j v_j^2}$ والذي يتوافق مع الهندسة الإقليدية وكما بيّنا سابقاً فإن الزاوية بين شعاعين غير صفرين عشوائيين في \mathbb{R}^2 تعطى بالعلاقة:

$$(3.5) \quad \cos(\angle(u, v)) = \frac{v_1 u_1 + v_2 u_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \sqrt{u_1^2 + u_2^2}} = \frac{\langle v, u \rangle}{\|v\| \|u\|}$$

حيث تشير المساواة الأخيرة في العلاقة السابقة إلى جداء داخلي. وبالتالي نجد أن الجداء الداخلي يحدد الزاوية بين الأشعة في \mathbb{R}^2 . سوف نرى لاحقاً أن قانون الجداء الداخلي صحيح في أي فضاء شعاعي حقيقي ويكون الاستنتاج أبسط في بيئة التنسيق الحر لفضاءات الأشعة العامة من فضاءات الأشعة الواحدة في \mathbb{R}^2 .

يعرف الجداء الداخلي من أجل الفضاء الشعاعي \mathbb{C}^2 المؤلف من n -صف عقدي بالعلاقة:

$$(4.5) \quad \langle v, u \rangle = \sum_{j=1}^n v_j u_j^*$$

وبالتالي يعطى مقياس الطول للشعاع v بالعلاقة: $\sqrt{\sum_j |v_j|^2} = \sqrt{\sum_j [\Re(v_j)^2 + \Im(v_j)^2]}$ ولهذا يمكن النظر إلى المصفوفة النونية المركبة للشعاع u كشعاع من مرتبة $2n$ مكون من أجزاء حقيقية وأخرى تخيلية للشعاع u . مع الانتباه إلى أنه على الرغم من أن المصفوفة النونية المركبة يمكن أن ينظر إليها كمصفوفة من مرتبة $2n$ لبعض الأغراض (كالطول) فإن بعض العمليات الأخرى على المصفوفات النونية المركبة تكون مختلفة جداً عن تلك العمليات التي تتم على المصفوفات النونية الحقيقية ذات المرتبة $2n$ فعلى سبيل المثال فإن ضرب الأعداد السلمية والجداء الداخلي في \mathbb{C}^n تكون مختلفة جداً عن العمليات الأخرى على \mathbb{R}^n .

2.2.5 المخططات أحادية الاتجاه

يوجد مشكلة هامة في تشييد الامتدادات المتعامدة هي تقسيم الشعاع v إلى جزأين بالنسبة إلى شعاع آخر $u \neq 0$ في فضاء الجداء الداخلي نفسه. يكون أحد الأجزاء $v_{\perp u}$ عمودياً على u والجزء الآخر $v_{\parallel u}$ يكون متوازياً مع u (يكون شعاعان $v_{\parallel u}$ و u خطيان معاً متوازيان) إذا كان $v_{\parallel u} = \alpha u$ من أجل عدد سلمي ما α . يوضح الشكل (2.5) هذه الآلية في الفضاء \mathbb{R}^n كما أنه من الناحية هندسياً فإن $\|v_{\parallel u}\| = \|v\| \cos(\angle(v, u))$ ، وباستخدام (3.5) نجد: $\|v_{\parallel u}\| = \langle v, u \rangle / \|u\|$. ونظراً لكون $v_{\parallel u}$ متوازياً مع u ، فإننا نجد:

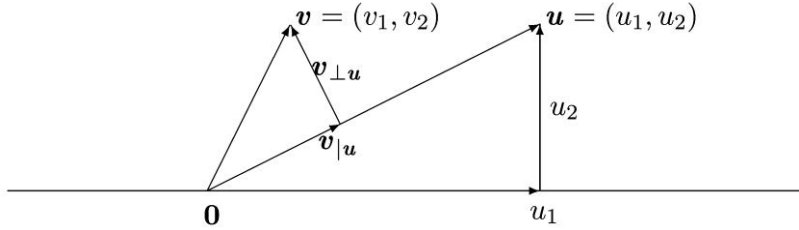
(5.5)

$$v|_u = \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u$$

يسمى الشعاع $v|_u$ بإسقاط $projection$ الشعاع v على u .

نلاحظ أنه من المفاجئ كون المعادلة (5.5) صالحة من أجل أي جداء داخلي، والبرهان العام على ذلك أسهل من استخراج (3.5)

و(5.5) القائم على الهندسة المستوية.



الشكل 2.5: الشعاعين $v = (v_1, v_2)$ و $u = (u_1, u_2)$ في الفضاء \mathbb{R}^2 . لاحظ أن $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = u_1^2 + u_2^2$ هو مربع طول u .

يمكن أيضاً التعبير عن الشعاع v وفق $v = v|_u + v_{\perp u}$ حيث $v|_u$ متوافق مع u و $v_{\perp u}$ متعامد مع u .

النظرية 1.2.5: (نظرية الإسقاط أحادي الاتجاه) بفرض لدينا الشعاعان العشوائيان v, u بحيث إن $u \neq 0$ في فضاء الجداء الداخلي

الحقيقي أو العقدي فإنه يوجد عدد سلمي وحيد α بحيث يكون $\langle v - \alpha u, u \rangle = 0$ حيث تعطى α بالعلاقة: $\alpha = \langle v, u \rangle / \|u\|^2$.

تعقيب: تنص النظرية على أن $v - \alpha u$ عمودي على u إذاً فقط إذا كان $\alpha = \langle v, u \rangle / \|u\|^2$. باستخدام تلك القيمة لـ α

يسمى $v - \alpha u$ العمود على u ويرمز له بالرمز $v_{\perp u}$ ؛ وعلى نحو مشابه يدعى إسقاط v على u ويرمز له بالرمز $v|_u$. أخيراً، يكون

$v = v|_u + v_{\perp u}$ ، أي أنه جرى تقسيم v إلى جزأين أحدهما عمودي والآخر مُتسامت (على خط مستقيم واحد).

البرهان: بحساب القيمة $\langle v - \alpha u, u \rangle$ من أجل عدد سلمي محدد α ، يمكن استنتاج الشرط الذي من أجله يكون الجداء الداخلي

مساوياً للصفر:

$$\langle v - \alpha u, u \rangle = \langle v, u \rangle - \alpha \langle u, u \rangle = \langle v, u \rangle - \alpha \|u\|^2$$

والذي يساوي الصفر فقط إذاً فقط إذا كان العدد $\alpha = \langle v, u \rangle / \|u\|^2$

يمكن أن يفهم السبب الذي يجعل $\|u\|^2$ في مقام قانون الإسقاط السابق بسهولة من خلال إعادة كتابة العلاقة كما يلي:

$$v|_u = \left\langle v, \frac{u}{\|u\|} \right\rangle \frac{u}{\|u\|}$$

وبالتالي فإن إسقاط v على u هو نفسه إسقاط v على النسخة المقيسة من الشعاع u وبشكل عام فإن قيمة $v|_u$ لا تختلف باختلاف

التغيرات العددية للشعاع u أي:

(6.5)

$$v|_{\beta u} = \frac{\langle v, \beta u \rangle}{\|\beta u\|^2} \beta u = \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u = v|_u$$

وهذا يتفق بشكل واضح مع الشكل (2.5) لأجل \mathbb{R}^2 لكنه أيضاً متاح من أجل الفضاءات الشعاعية العقدية التي لا يمكن رسم

الأشكال الهندسية فيها بسهولة. يمكن أن يكتب قانون التجيب في الفضاء \mathbb{R}^2 كالتالي:

(7.5)

$$\cos(\angle(u, v)) = \left\langle \frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle$$

وهو جداء داخلي للنسخة المقيسة من $\langle u, v \rangle$. توجد نتيجة أخرى معروفة في الفضاء \mathbb{R}^2 والتي ترافق أي فضاء جداء داخلي هي

نظرية فيثاغورث: إذا كان u و v متعامدين، فإن:

(8.5)

$$\|v + u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2$$

وبالتالي يمكن القول إن:

$$\langle v + u, v + u \rangle = \langle v, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle u, u \rangle$$

حيث تنعدم الحدود المتقاطعة مما يؤدي إلى المعادلة (4.5). إن لهذه النظرية نتيجة هامة يطلق عليها اسم تباين (أو لا تساوي) شوارتز، التي نبينها أدناه.

النظرية 1.2.5 (Schwarz inequality). بفرض أن u, v شعاعان في فضاء الجداء الداخلي الحقيقي أو العقدي فإن:

$$(9.5) \quad |\langle v, u \rangle| \leq \|v\| \|u\|$$

البرهان: نفترض أن $u \neq 0$ كون المعادلة (9.5) واضحة في خلاف ذلك. ونظراً لكون $v_{\perp u}$ وبشكل مشابه $v_{\perp u}$ متعامدين، فإن المعادلة (8.5) تبين أن:

$$\|v\|^2 = \|v_{\perp u}\|^2 + \|v_{|u}\|^2$$

وبما أن $\|v_{|u}\|^2$ موجبة تماماً فإن:

$$\|v\|^2 \geq \|v_{|u}\|^2 = \left| \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|} \right|^2 \|u\|^2 = \frac{|\langle v, u \rangle|^2}{\|u\|^2}$$

وهي مكافئة للمعادلة (9.5).

من أجل الشعاعين u, v غير الصفريين فإن نظرية شوارتز يمكن أن تكتب بالشكل التالي:

$$\left| \left\langle \frac{v}{\|v\|}, \frac{u}{\|u\|} \right\rangle \right| \leq 1$$

في الفضاء \mathbb{R}^2 فإن نظرية شوارتز تكافئ القول إن الحد الأعظمي لتابع التجيب هو 1. وكما هو موضح في التمرين (6.5)، فإن المعادلة أدناه هي نتيجة مبسطة لنظرية شوارتز:

$$(10.5) \quad \|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$$

3.2.5 فضاء الجداء الداخلي لتوابع \mathcal{L}_2

بفرض لدينا مجموعة من الأمواج العقدية محدودة الطاقة فإننا نكتب علاقة الجداء الداخلي للشعاعين u, v في هذه المجموعة كالتالي:

$$(11.5) \quad \langle v, u \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)u^* dt$$

وقد بيّنا في التمرين (8.5) أن $\langle v, u \rangle$ هو متناه دوماً. إن نظرية شوارتز لا يمكن أن تستعمل لبرهان ذلك لأننا لم نبرهن بعد أنها تحقق فرضيات فضاء الجداء الداخلي. ولكن على أية حال فإن أول فرضيتين في فرضيات الجداء الداخلي تنتجان من وجود ومحدودية الجداء الداخلي (أي التكامل في العلاقة (11.5))، وهاتان الصفتان مفيدتان وحيويتان من أجل \mathcal{L}_2 .

تنص الفرضية الأخيرة على أن $\langle v, v \rangle \geq 0$ مع وجود التساوي عندما فقط عندما $v = 0$. هذه الفرضية لا تحقق شروط الأمواج متناهية الطاقة لأننا وجدنا سابقاً أنه إذا كان التابع $v(t)$ صفرية في كل مكان تقريباً، فهذا يعني أن طاقته تساوي الصفر، على الرغم من أن التابع ليس تابعاً صفرية.

يشكل ذلك إشكالية ضمن بعض المستويات، إلا أننا لا نملك خيار إهمال بعض الفرضيات لأنها فقط غير مناسبة. يكمن حل هذه المشكلة بتعريف التساوي في فضاء الجداء الداخلي \mathcal{L}_2 على أنه تساوي بين توابع \mathcal{L}_2 . وهذا يعني أن كل عنصر من عناصر فضاء الجداء الداخلي \mathcal{L}_2 يكافئ صف توابع \mathcal{L}_2 المتساوية تقريباً في كل مكان. صف التعادل الصفري على سبيل المثال، هو صف التوابع ذات الطاقة الصفريّة لأن كلاً منها هو \mathcal{L}_2 مكافئ للتابع الصفري. تصبح بهذا التعديل كافة فرضيات الجداء الداخلي صالحة.

يبدو للوهلة الأولى أن النظر لشعاع على أنه صف مكافئ لتوابع \mathcal{L}_2 تجريدي جداً ومثير للاستغراب. حيث تعد فكرة كون جميع التوابع ذات الطاقة الصفريّة متماثلة أكثر ملاءمة من فكرة أنه إذا وجد تابعان مختلفان فقط في بعض النقاط المعزولة فإنه يترتب النظر إليهما على

أحدهما مختلفان.

ومن وجهة نظر أكثر عملية سنجد لاحقاً أن توابع L_2 (في نخب الصفوف هذا) يمكن أن تمثل بمعاملات في أي توسع متعامد تمتد عناصره عبر الفضاء L_2 . وبالتالي يكون لأي تابعين المعاملات نفسها في توسع متعامد إذا كانا متكافئين في L_2 ولهذا فإن كل عنصر u من فضاء الجداء الداخلي L_2 يرتبط بعلاقة واحد لواحد مع سلسلة متناهية الاستطاعة من التوسعات المتعامدة $\{u_k; k \in \mathbb{Z}\}$. وبذلك يمكن تجنب وجود توابع ثانوية تقابل سلسلة واحدة من المعاملات L_2 ولا تتوفر طريقة جيدة للعودة من السلسلة إلى التابع؛ وبذلك يلتقي الحس الهندسي والرياضيات مع بعضهما بعضاً مرة أخرى.

سننظر من الآن فصاعداً إلى أن L_2 هو فضاء جداء داخلي ونشير لفكرة تكافؤ L_2 عند الضرورة فقط، ومع هذا الفهم يمكن توظيف كافة أدوات فضاءات الجداء الداخلي بما يتضمن الإسقاط وفرضية شوارتز.

4.2.5 الفضاءات الجزئية في فضاء الجداء الداخلي

الفضاء الجزئي \mathcal{S} من الفضاء الشعاعي \mathcal{V} هو مجموعة جزئية من الأشعة ضمن \mathcal{V} التي تشكل فضاء شعاعياً بحد ذاتها (عبر الأعداد السلمية نفسها المستخدمة في الفضاء \mathcal{V}). يوجد تعريف آخر مكافئ هو أنه من أجل كل \mathcal{V} و $u \in \mathcal{S}$ فإن الاجتماع الخطي $av + bu$ في \mathcal{S} من أجل كل الأعداد α, β . فإذا كان \mathcal{V} فضاء جداء داخلي فهذا يبيّن بسهولة أن \mathcal{S} هي أيضاً فضاء جداء داخلي بتوظيف تعريف الجداء الداخلي نفسه المستخدم في \mathcal{V} .

مثال 1.2.5 (الفضاء الجزئي \mathbb{R}^3). ليكن لدينا فضاء جداء داخلي حقيقي \mathbb{R}^3 ، أي فضاء جداء داخلي مكون من 3-صفوف $v = (v_1, v_2, v_3)$. هندسياً يمكن النظر إلى ذلك على أنه فضاء له ثلاثة اتجاهات إحداثيات متعامدة معرفة بالأشعة الواحدية الثلاثة e_1, e_2, e_3 . وبالتالي فإن الصفوف 3-tuple من المرتبة الثالثة v_1, v_2, v_3 تحدد طول الشعاع v في كل اتجاه من الاتجاهات الثلاثة بحيث يكون: $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$

ليكن $u = (1, 0, 1)$ و $w = (0, 1, 1)$ شعاعين ثابتين، وبفرض لدينا الفضاء الجزئي \mathbb{R}^3 المكون من كل التراكيب الخطية لكل من w, u : $v = au + bw$. يمثل هذا الفضاء هندسياً كمستو ينطلق عبر $w, u, 0$ وفي هذا المخطط فإن كلاً من u, v تملكان الطويلة $\sqrt{2}$ وأن $\langle v, u \rangle = 1$.

نظراً لأن أي من u أو w ليس من المضاريب العددية للآخر، فإنهما مستقلان خطياً، ويمتدان عبر \mathcal{S} وفق التعريف، لذلك \mathcal{S} هو فضاء جزئي ثنائي البعد أساسه $\{u, w\}$.

إن إسقاط u على w يعطى بالعلاقة $u|_w = (0, 1/2, 1/2)$ ، كما أن تعامد u مع w يعطى بالعلاقة: $u_{\perp w} = (1, -1/2, 1/2)$. تشكل هذه الأشعة أساساً متعامداً للفضاء \mathcal{S} يمكن أن تستخدم للنظر إلى الفضاء \mathcal{S} هندسياً بنفس النظرة التي ننظر إلى الأشعة في \mathbb{R}^2 .

مثال 2.2.5 (فضاء جزئي عام ثنائي البعد). لتكن \mathcal{V} فضاء جداء داخلي عشوائي غير زهيد حقيقي أو عقدي، ولتكن u و w أشعة عشوائية غير مترابطة. تكون عندئذ مجموعة \mathcal{S} من تراكيب الأشعة u و w فضاء جزئياً ثنائي الأبعاد \mathcal{V} ذي أساس $\{u, w\}$ ، كما وتشكل $u|_w, u_{\perp w}$ أساساً متعامداً للفضاء \mathcal{S} . سوف نرى قريباً أن هذا الإجراء لتوليد فضاءات جزئية وأساساً متعامداً في فضاء جداء داخلي عشوائي من زوج من الأشعة يمكن تعميمه على الأسس المتعامدة للفضاءات الجزئية ذات الأبعاد العشوائية.

مثال 3.2.5 (\mathbb{R}^2 مجموعة جزئية لكن ليست فضاء جزئي في \mathbb{C}^2). بفرض لدينا فضاء شعاعي عقدي \mathbb{C}^2 فإن المجموعة المكونة من المصفوفة ثنائية البعد الحقيقية هي مجموعة جزئية من \mathbb{C}^2 لكن هذه المجموعة لا تندرج تحت علاقة الضرب بالأعداد السلمية في \mathbb{C} . إن المصفوفة ثنائية البعد $u = (1, 2)$ على سبيل المثال، هي عنصر من \mathbb{C}^2 لكن الضرب بالعدد iu هو الشعاع $(i, 2i)$ ، والذي لا يمثل مصفوفة حقيقية ثنائية البعد. وبشكل أكثر عمومية فإن فكرة التراكيب الخطية تعتمد على ماهية الأعداد السلمية.

لا يمكننا تجنب التعامل مع كل من أمواج L_2 العقدية والحقيقية دون تعقيد الموضوع بشكل هائل (كمثال بسيط، استخدام أشكال الموجات الجيبية والتجيبية لتحويل فورييه وسلسلته). كما أنه لا يمكن تجنب التعامل أيضاً مع فضاء الجداء الداخلي دون مضاعفات كبيرة. إن كلفة ذلك كله هو الخلط المتكرر فيما بين الأعداد السلمية الحقيقية والعقدية. ينصح القارئ للأسباب المبينة بتوخي الحذر مع التراكيب

الخطية والتعامل بوضوح مع ماهية الأعداد المدروسة من حيث كونها حقيقية أو عقدية.

3.5 أسس التعامد المُستنظم ونظرية الإسقاط

تكون مجموعة الأشعة ϕ_1, ϕ_2, \dots في فضاء الجداء الداخلي متعامدة ومُستنظمة *Orthonormal* إذا كان:

$$(12.5) \quad \langle \phi_j, \phi_k \rangle = \begin{cases} 0; & j \neq k \\ 1; & j = k \end{cases}$$

بكلمات أخرى إن المجموعة المتعامدة معيارياً هي أشعة متعامدة غير صفرية حيث إن كل شعاع يبسط (يقبس) إلى طويلة واحدة. وهذا ما يبيّن أنه إذا كانت مجموعة الأشعة u_1, u_2, \dots متعامدة معيارياً فإن المجموعة

$$\phi_j = \frac{1}{\|u_j\|} u_j$$

هي أيضاً متعامدة معيارياً. لاحظ أنه إذا كان لدينا شعاعان متعامدان غير صفريين فإنهما يحافظان على التعامد عند القيام بأي تقييس في أي من الشعاعين.

إذا أسقط الشعاع v على شعاع مقيس ϕ فإن نظرية الإسقاط أحادية البعد تنص أن الإسقاط يعطى بالقانون البسيط التالي:

$$(13.5) \quad v_{|\phi} = \langle v, \phi \rangle \phi$$

إضافة، تنص النظرية على أن $v_{\perp\phi} = v - v_{|\phi}$ متعامد مع ϕ . نعمم الآن نظرية الإسقاط على إسقاط الشعاع $v \in \mathcal{V}$ على أي فضاء جزئي متناهي الأبعاد \mathcal{S} من \mathcal{V} .

1.3.5 الإسقاطات محدودة الأبعاد

إذا كان \mathcal{S} هو فضاء جزئي من فضاء الجداء الداخلي \mathcal{V} والشعاع $v \in \mathcal{V}$ نعرف عندئذ إسقاط الشعاع v على \mathcal{S} على أنه شعاع $v_{|\mathcal{S}} \in \mathcal{S}$ بحيث إن $v - v_{|\mathcal{S}}$ هو شعاع متعامد مع كل الأشعة ضمن \mathcal{S} . تبين هذه النظرية أن $v_{|\mathcal{S}}$ موجود دائماً ويملك قيمة فريدة تعطى وفقاً للنظرية.

التعريف السابق للإسقاط هو حالة خاصة للحالة قيد الدرس في هذه النظرية حيث تؤخذ \mathcal{S} على أنها فضاء جزئي أحادي البعد يمتد بواسطة الشعاع u (تكون أسس التعامد المُستنظم بالتالي $\phi = u/\|u\|$).

نظرية 1.3.5 (نظرية الإسقاط). ليكن \mathcal{S} فضاء جزئياً ذا n بعد من فضاء جداء داخلي \mathcal{V} وبفرض أن $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ هي أسس تعامد مُستنظم للفضاء \mathcal{S} ، عندها فإنه من أجل كل شعاع $v \in \mathcal{V}$ يوجد شعاع فريد $v_{|\mathcal{S}} \in \mathcal{S}$ وبحيث $\langle v - v_{|\mathcal{S}}, \phi_j \rangle = 0$ من أجل كل $\phi_j \in \mathcal{S}$. إضافة فإن $v_{|\mathcal{S}}$ يعطى بالعلاقة:

$$(14.5) \quad v_{|\mathcal{S}} = \sum_{j=1}^n \langle v, \phi_j \rangle \phi_j$$

تنويه: تفترض هذه النظرية أن \mathcal{S} تملك مجموعة أشعة متعامدة معيارياً كأسس، وسوف نرى لاحقاً أن أي فضاء جداء داخلي متناهي الأبعاد وذو أهمية يملك أيضاً أسس تعامد مُستنظم، مما يدعو للقول إن هذا الافتراض لا يقيد عمومية النظرية.

البرهان: بفرض $w = \sum_{j=1}^n \alpha_j \phi_j$ شعاع عشوائي ضمن \mathcal{S} ، وأن الشرط على w الذي يكون بموجبه $v - w$ متعامداً مع كافة الأشعة $\phi_j \in \mathcal{S}$. يمكن أن نبرهن أولاً أن $v - w$ متعامد مع كل $\phi_j \in \mathcal{S}$ إذاً فقط إذا كان:

$$\langle v - w, \phi_j \rangle = 0 \quad \text{for all } j, \quad 1 \leq j \leq n$$

أو بشكل مشابه إذا كان فقط إذا كان:

$$(15.5) \quad \langle v, \phi_j \rangle = \langle w, \phi_j \rangle \quad \text{for all } j, \quad 1 \leq j \leq n$$

وبما أن $w = \sum_{\ell=1}^n \alpha_{\ell} \phi_{\ell}$ وبما أن:

$$(16.5) \quad \langle w, \phi_j \rangle = \sum_{\ell=1}^n \alpha_{\ell} \langle \phi_{\ell}, \phi_j \rangle = \alpha_j \quad \text{for all } j, \quad 1 \leq j \leq n$$

بدمج ذلك مع المعادلة (15.5)، فإن $v - w$ متعامد مع كافة $s \in \mathcal{S}$ إذا كان فقط إذا كان $\langle v, \phi_j \rangle = \alpha_j$ من أجل كل j أي إذا كان فقط إذا كان $w = \sum_j \langle v, \phi_j \rangle \phi_j$. وبذلك فإن $v_{|\mathcal{S}}$ كما هو معطى بالمعادلة (14.5) هو الشعاع المتفرد $w \in \mathcal{S}$ الذي يكون فيه $v - v_{|\mathcal{S}}$ متعامداً مع كافة $s \in \mathcal{S}$.

نشير إلى الشعاع $v - v_{|\mathcal{S}}$ وفق $v_{\perp \mathcal{S}}$ ، أي العمودي من v إلى \mathcal{S} ، وبما أن $v_{|\mathcal{S}} \in \mathcal{S}$ فإن الشعاعين $v_{|\mathcal{S}}$ و $v_{\perp \mathcal{S}}$ متعامدان. تؤكد هذه النظرية أن v يمكن أن يقسم بشكل متفرد إلى جزأين متعامدين $v = v_{\perp \mathcal{S}} + v_{|\mathcal{S}}$ ، حيث الإسقاط $v_{|\mathcal{S}}$ ضمن \mathcal{S} والمركبة المتعامدة $v_{\perp \mathcal{S}}$ متعامد مع كافة أشعة $s \in \mathcal{S}$.

2.3.5 بديهيات نظرية الإسقاط

يوجد ثلاث بديهيات ذات أهمية في نظرية الإسقاط التي تتضمن معيار الإسقاط. يعطى في الأولى مربع $w = \sum_j \alpha_j \phi_j$ من أجل أي عدد سلمي $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ، بالعلاقة:

$$\|w\|^2 = \langle w, \sum_{j=1}^n \alpha_j \phi_j \rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j^* \langle w, \phi_j \rangle = \sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2$$

حيث استخدمنا العلاقة (16.5) في استخراج العلاقة السابقة، لذلك من أجل الإسقاط $v_{|\mathcal{S}}$ ، $\alpha_j = \langle v, \phi_j \rangle$ ، ومنه:

$$(17.5) \quad \|v_{|\mathcal{S}}\|^2 = \sum_{j=1}^n |\langle v, \phi_j \rangle|^2$$

ونظراً لأن $v = v_{\perp \mathcal{S}} + v_{|\mathcal{S}}$ ولكون $v_{|\mathcal{S}}$ عمودياً على $v_{\perp \mathcal{S}}$ ، وتبعاً لنظرية فيثاغورث (8.5)، فإن:

$$(18.5) \quad \|v\|^2 = \|v_{|\mathcal{S}}\|^2 + \|v_{\perp \mathcal{S}}\|^2$$

وبسبب كون $\|v_{\perp \mathcal{S}}\|^2 \geq 0$ ، فإننا نكون قد برهنا البديهية التالية:

البديهية 1.3.5 (norm bound)

$$(19.5) \quad 0 \leq \|v_{|\mathcal{S}}\|^2 \leq \|v\|^2$$

حيث تتحقق المساواة في الجانب الأيمن من المعادلة إذا كان فقط إذا كان $v \in \mathcal{S}$ ، وفي الجانب الأيسر من المعادلة إذا كان فقط إذا كان v متعامداً مع كافة الأشعة في \mathcal{S} .

بتعويض (17.5) في (19.5)، فإننا نحصل على متباينة (لا متساوية) بسبيل Bessel's inequality، والتي تعد أساساً لفهم تقارب توسعات التوابع المتعامدة المستنظمة.

البديهية 2.3.5 (تباين بسبيل) بفرض أن $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$ فضاء المستنظمة المتعامدة الأشعة مجموعة من مكون جزئي $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ ومن أجل كل $v \in \mathcal{V}$ ، نجد:

$$0 \leq \sum_{j=1}^n |\langle v, \phi_j \rangle|^2 \leq \|v\|^2$$

حيث تتحقق المساواة في الجانب الأيمن من المعادلة إذا كان فقط إذا كان $v \in \mathcal{S}$ ، وفي الجانب الأيسر من المعادلة إذا كان فقط إذا كان v متعامد مع كافة الأشعة في \mathcal{S} .

توصيف آخر مفيد للإسقاط هو أن $v|_S$ هو الشعاع في S الأقرب إلى v . وبعبارة أخرى، باستخدام بعض $s \in S$ كتقريب إلى v ، فإن مربع الخطأ هو $\|v - s\|^2$. تنص البديهية التالية أن $v|_S$ هو خيار s الذي يعطي مربع الخطأ الأدنى (Least squared error (LS).

البديهية 3.3.5 (خاصية مربع الخطأ الأدنى) الإسقاط $v|_S$ هو الشعاع الفريد في S الأقرب إلى v ، أي من أجل كل $s \in S$ فإن:

$$\|v - v|_S\|^2 \leq \|v - s\|^2$$

حيث يتحقق التساوي إذا كان فقط إذا كان $s = v|_S$.

البرهان: إذا قمنا بتفكيك v إلى $v|_S + v_{\perp S}$ يكون لدينا $v - s = [v|_S - s] + v_{\perp S}$. ونظراً لأن $v|_S$ و s هي ضمن الفضاء S ، يكون $v|_S - s$ ، لذلك باستخدام فيثاغورث:

$$\|v - s\|^2 = \|v|_S - s\|^2 + \|v_{\perp S}\|^2 \geq \|v_{\perp S}\|^2$$

تتحقق المساواة إذا كان فقط إذا كان $\|v|_S - s\|^2 = 0$ ، أي إذا كان فقط إذا كان $s = v|_S$. وبما أن $v_{\perp S} = v - v|_S$ ، فإن ذلك يتم البرهان.

3.3.5 تعامد غرام – شमित المُستَظَم Gram-Schmidt orthonormalization

افترضت نظرية الإسقاط أسس تعامد مُستَظَم $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ من أجل أي فضاء جزئي ذي n بعد S من V . يُبسّط استخدام أسس التعامد المُستَظَم كل ما يتعلق تقريباً بفضاءات الجداء الداخلي، كما تصبح تلك الأسس أكثر فائدة في توسعات الأبعاد غير المحدودة. نظراً لكون كل فضاء جزئي ذا n بعد يحوي أسس تعامد مُستَظَم، فيجدر بالذكر أن نظرية الإسقاط تبقى صالحة لمثل هذا الفضاء الجزئي. يمثل هذا القسم إجرائية غرام شमित والتي تبدأ من أساس عشوائي $\{s_1, \dots, s_n\}$ ، من أجل فضاء جداء داخلي جزئي ذي n بعد S وتنشئ أساس تعامد من أجل كل S . هذا الإجراء مفيد لإيجاد أسس التعامد المُستَظَم لكنه أكثر فائدة من الناحية النظرية لأنه يبين أن أسس التعامد هذه موجودة على الدوام.

إن الإجرائية واضحة بالنظر إلى الفقرات السابقة، حيث إن أسس التعامد المُستَظَم $\phi = s_1 \|s_1\|$ موجودة في فضاء جزئي أحادي البعد S يمتد عبر الشعاع s_1 . بإسقاط s_2 على هذا الفضاء الجزئي أحادي البعد، يمكن إيجاد شعاع التعامد المُستَظَم الثاني وتكرار هذه العملية يمكن بناء أسس تعامد مُستَظَم كاملة.

بتفصيل أكثر، نفرض أن $(s_2)|_{S_1}$ هو إسقاط s_2 على S_1 ، ونظراً لأن s_1 و s_2 مستقلان خطياً فإن $(s_2)|_{S_1} = s_2 - (s_2)|_{S_1}$ لا يساوي الصفر، كما أنه عمودي على ϕ_1 لأن $\phi_1 \in S_1$. يقيس هذا الإسقاط وفق $\|(s_2)|_{S_1}\|$ وبالنتيجة فإن كل من ϕ_1 و ϕ_2 تمتد عبر الفضاءين S_1 و S_2 .

نفرض أن أسس تعامد مُستَظَم $\{\phi_1, \dots, \phi_k\}$ قد جرى بناؤها من أجل الفضاء الجزئي S_k الذي يمتد عبر $\{s_1, \dots, s_k\}$. إن نتيجة إسقاط s_{k+1} على S_k هي $(s_{k+1})|_{S_k} = \sum_{j=1}^k \langle s_{k+1}, \phi_j \rangle \phi_j$. تعطي المركبة المتعامدة $(s_{k+1})_{\perp S_k} = s_{k+1} - (s_{k+1})|_{S_k}$ ، بالعلاقة:

$$(20.5) \quad (s_{k+1})_{\perp S_k} = s_{k+1} - \sum_{j=1}^k \langle s_{k+1}, \phi_j \rangle \phi_j$$

وهذا الشعاع غير صفري على اعتبار أن s_{k+1} غير موجودة في S_k ولهذا العلاقة غير الخطية مع $\{\phi_1, \dots, \phi_k\}$ ، وبالقيام بعملية التقييس نجد:

$$(21.5) \quad \phi_{k+1} = \frac{(s_{k+1})_{\perp S_k}}{\|(s_{k+1})_{\perp S_k}\|}$$

إن وبالتالي فإن الشعاع s_{k+1} هو مجموع خطي للأسس $\phi_1, \dots, \phi_{k+1}$ ، و s_1, \dots, s_k هي مجموع خطي للأسس ϕ_1, \dots, ϕ_k ، لذلك فإن $\phi_1, \dots, \phi_{k+1}$ هي أسس تعامد مُستَظَم للفضاء s_{k+1} الممتد عبر s_1, \dots, s_{k+1} . يمكن تلخيص ما سبق بأنه من أجل أي فضاء جزئي S ذي n بعد وأسس تعامد $\{s_1, \dots, s_n\}$ ، فإن إجرائية غرام شमित تعطي أسس

تعامل مُستنظم $\{\phi_1, \dots, \phi_{k+1}\}$ للفضاء S .

لاحظ أنه إذا كانت مجموعة من الأشعة ليست مستقلة بالضرورة، فإن الإجرائية ستجد تلقائياً أي شعاع s_j وهو تركيبة خطية للأشعة السابقة من خلال نظرية الإسقاط؛ ومن ثم يمكن ببساطة تجاهل مثل هذا الشعاع والمضي قدماً. ونتيجة لذلك، فإن الإجرائية ستعثر على أسس تعامد مُستنظمة، من أجل الفضاء الممتد من قبل مجموعة الأشعة الأصلية.

4.3.5 توسعات أسس التعامد المُستنظمة في L_2

تمّ تطوير الخلفية اللازمة لفهم توسعات تعامد مُستنظمة محدودة في L_2 . كما قمنا بدراسة عدد من التوسعات المتعامدة مثل تلك التي تستخدم في نظرية العينات وسلسلة فورييه وتوابع sinc الموزونة، وغيرها. يتضمن تحويل كل ذلك إلى توسعات متعامدة مُستنظمة تغيرات تقييس طفيفة.

سوف نستخدم سلسلة فورييه لتوضيح هذه التغيرات كمثال على توسع تعامد مُستنظم عام، حيث يتيح منظور الفضاء الشعاعي فهم سلسلة فورييه على نحو أعمق. نعرف $\phi_k(t) = e^{2\pi ikt/T} \text{rect}(t/T)$ من أجل $k \in \mathbb{Z}$ وبالتالي فإن مجموعة التوابع $\{\theta_k(t); k \in \mathbb{Z}\}$ تكون متعامدة مع $\|\theta_k\|^2 = T$ وبالتالي نحصل على التوسعات المتعامدة المُستنظمة الموافقة عن طريق تقييس كل θ_k بالمعامل $1/\sqrt{T}$ ، أي:

$$(22.5) \quad \phi_k(t) = \sqrt{\frac{1}{T}} e^{\frac{2\pi ikt}{T}} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

وبالتالي فإن سلسلة فورييه للتابع L_2 المحصورة بالمجال $\{v(t) : [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{C}\}$ تصبح $\sum_k \alpha_k \phi_k(t)$ حيث $\alpha_k = \int v(t) \phi_k^*(t) dt = \langle v, \phi_k \rangle$ من أجل عدد صحيح $n > 0$ وبفرض أن S_n هو فضاء جزئي ذو $(2n+1)$ بعد ممتد بالأشعة $\{\phi_k; -n \leq k \leq n\}$ ، ومن خلال نظرية الانطباق فإن إسقاط الشعاع $v_{|S_n}$ من v على S_n يعطى بالعلاقة:

$$v_{|S_n} = \sum_{k=-n}^n \langle v, \phi_k \rangle \phi_k$$

أي أن إسقاط $v_{|S_n}$ هو ببساطة التقريب إلى v الناجم عن تقريب التوسع إلى $-n \leq k \leq n$. الخطأ في التقريب السابق $v_{\perp S_n} = v - v_{|S_n}$ عمودي على كل شعاع في S_n وانطلاقاً من احتمالية الخطأ الأصغر LS فإن $v_{|S_n}$ هي أقرب نقطة من S_n إلى v ، ومع زيادة n فإن الفضاء الجزئي S_n سيصبح أكبر وستصبح $v_{|S_n}$ أقرب إلى v (أي أن $\|v - v_{|S_n}\|$ لا يتزايد). يمكن دراسة الحالة العامة كون التحليل السابق ينطبق أيضاً وبشكل جيد على أي تسلسل توابع من التوسعات المتعامدة المُستنظمة. النتيجة الرئيسية ذات الأهمية هي التعميم غير محدود الأبعاد لنظرية الإسقاط.

نظرية 2.3.5 (الإسقاط غير محدود الأبعاد). بفرض $\{\phi_m, 1 \leq m \leq \infty\}$ سلسلة من الأشعة المتعامدة المُستنظمة ضمن L_2 وبفرض أن v شعاع عشوائي ضمن L_2 وبالتالي يوجد شعاع فريد u ضمن L_2 ⁷⁶ بحيث يكون $v - u$ عمودي على كل ϕ_m ويحقق العلاقة:

$$(23.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| u - \sum_{m=1}^n \alpha_m \phi_m \right\| = 0 \quad \text{where} \quad \alpha_m = \langle v, \phi_m \rangle$$

$$(24.5) \quad \|u\|^2 = \sum |\alpha_m|^2$$

⁷⁶ يذكر هنا أن الأشعة في صفوف التوابع L_2 هي صفوف تكافؤ، وهذا التفرد يحدد فقط صف التكافؤ وليس وظيفة محددة ضمن ذلك الصف.

لذلك من أجل أي سلسلة عقدية $\{\alpha_m; 1 \leq m \leq \infty\}$ وبحيث $\sum_k |\alpha_k|^2 < \infty$ فإنه يوجد شعاع وحيد u من تابع L_2 يحقق العلاقاتين السابقتين.

تعليل: تنص النظرية على أن التوسعات المتعامدة المستنظمة $\sum_m \alpha_m \phi_m$ تتقارب إلى شعاع u التابع L_2 والذي سنفسره لاحقاً كإسقاط v على الفضاء الجزئي غير محدود الأبعاد S الممتد عبر $\{\phi_m; 1 \leq m \leq \infty\}$. إن التوسعات المتعامدة المستنظمة في حالة سلسلة فورييه على سبيل المثال، تمتد عبر الفضاء الجزئي لتتابع L_2 والمحددة زمنياً بالمجال $[-T/2, T/2]$ حيث يعطى u عندها بالعلاقة $v(t) \text{ rect}(\frac{t}{T})$ والفرق $v(t) - v(t) \text{ rect}(\frac{t}{T})$ هو L_2 مكافئ للصفر عبر $[-T/2, T/2]$ وبالتالي متعامد مع كل ϕ_m .

البرهان: بفرض أن S_n هو فضاء جزئي ممتد عبر $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ ومن خلال نظرية الإسقاط محدودة الأبعاد فإن إسقاط v على S_n يعطى بالعلاقة $v|_{S_n} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k$. ومن المعادلة نجد أن:

$$(25.5) \quad \|v|_{S_n}\|^2 = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 \quad \text{where } \alpha_k = \langle v, \phi_k \rangle$$

هذا المقدار لا يزداد بزيادة n ومن خلال تباين باسيل فإن الحد الأعلى هو $\|v\|^2$ الذي يكون محدوداً على اعتبار أن v تنتمي للفضاء L_2 وبالتالي من أجل أي $n < m$ وأي n ، فإنه:

$$(26.5) \quad \|v|_{S_m} - v|_{S_n}\|^2 = \sum_{n < |k| \leq m} |\alpha_k|^2 \leq \sum_{|k| > n} |\alpha_k|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

يدل ذلك على أن الإسقاطات $\{v|_{S_n}; \in \mathbb{Z}^+\}$ تتقارب مع بعضها بعضاً عندما $n \rightarrow \infty$ بدلالة فرق طاقتها.

تسمى السلسلة التي تتقارب حدودها مع بعضها بعضاً بسلسلة كوشي. نظرية Riesz-Fischer⁷⁷ هي محورية للتحليل والتي تنص على أن أي سلسلة كوشي من أمواج L_2 محدودة بالفضاء L_2 . وبالتالي بفرض أن u هي هذا الحد، أي $u = \lim_{n \rightarrow \infty} v|_{S_n}$ ، فيكون لدينا المعادلات (23.5) و (24.5).⁷⁸

يوفر الاستخدام نفسه لنظرية Riesz-Fischer الحصول على المعادلات (23.5) و (24.5) مبتدئين بالسلسلة $\alpha_1, \alpha_2, \dots$.

ليكن S فضاء التتابع (أو بشكل أدق الصفوف المكافئة) التي يمكن أن تمثل وفق $\sum_k \alpha_k \phi_k(t)$ عبر كافة السلاسل $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ بحيث $\sum_k |\alpha_k|^2 < \infty$. فإننا يمكن أن نرى أن ذلك هو فضاء جداء داخلي وهو فضاء يمتد عبر السلسلة المتعامدة المستنظمة المتعامدة $\{\phi_k; k \in \mathbb{Z}\}$. والبرهان التالي لنظرية سلسلة فورييه يفترض استخدام نظرية الإسقاط غير محدودة الأبعاد ومجموعات الامتداد غير محدودة الأبعاد أيضاً.

برهان النظرية 1.4.4: ليكن لدينا تابع اعتباطي من L_2 مُعرف بـ $\{v(t) : [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{C}\}$. وجدنا للتو أن $v(t)$ هي L_2 وأن العلاقة $\hat{v}_k = \frac{1}{T} \int v(t) e^{-2\pi i k t / T} dt$ موجودة وأنها تساوي $|\hat{v}_k| \leq \int |v(t)| dt$ من أجل كافة $k \in \mathbb{Z}$. يوجد من النظرية (2.3.5) تابع L_2 يحقق العلاقة $\theta_k(t) = \text{l.i.m.} \sum_k \hat{v}_k e^{2\pi i k t / T} \text{ rect}(t/T)$ يكون $v(t) - u(t)$ عمودي على $\theta_k(t) = e^{2\pi i k t / T} \text{ rect}(t/T)$ من أجل كل $k \in \mathbb{Z}$.

نحتاج الآن إلى حقيقة أساسية إضافية:⁷⁹ إن المجموعة الآنفة من التتابع المتعامدة $\{\theta_k(t) = e^{2\pi i k t / T} \text{ rect}(t/T); k \in \mathbb{Z}\}$ تمتد في فضاء التتابع L_2 خلال الفترة $[-T/2, T/2]$ ، أي، لا يوجد أي تابع ذي طاقة موجبة ضمن الفترة $[-T/2, T/2]$ متعامد مع كل $\theta_k(t)$. باستعمال هذه الحقيقة، فإن $v(t) - u(t)$ يملك طاقة صفرية وهو يساوي الصفر في كل مكان تقريباً. ولهذا فإن $v(t) = \text{l.i.m.} \sum_k \hat{v}_k e^{2\pi i k t / T} \text{ rect}(t/T)$ ، وتنتج معادلة الطاقة بعد ذلك من العلاقة (24.5). أما الجزء الأخير من النظرية فإنه ينجم عن الجزء الأخير من النظرية (2.3.5).

⁷⁷ يمكن العودة لأي مرجع يتعلق بالتحليل الحقيقي والعقدي مثل [26] Rudin.

⁷⁸ يقال عن فضاء جداء داخلي تكون فيه كل سلاسل كوشي محدودة، إنه كامل ويسمى فضاء هيلبرت. لذلك تنص نظرية Riesz-Fischer أن L_2 هو فضاء هيلبرت.

⁷⁹ يمكن العودة لأي مرجع يتعلق بالتحليل الحقيقي والعقدي.

كما رأينا من خلال البرهان السابق فإن نظرية الإسقاط غير محدودة الأبعاد يمكنها أن تؤمن براهين مفيدة وبسيطة لهذه النهايات والتقريب المقترح من هذه النهايات. يستخدم ملحق هذه النظرية لبرهان نظرية أخذ العينات، ونظرية التزيف (aliasing) ونظرية برانشيريل. يكمن الجزء الأكثر عملائية في استخدام النظرية من خلال تأمين طريقاً منتظماً لمعالجة كافة التوسعات المتعامدة المستنظمة. وكما هو الحال في برهان سلسلة فورييه سابقة الذكر، فإن النظرية لا تؤمن سمات بسيطة للفضاء الممتد عبر المجموعة المتعامدة المستنظمة. ولحسن الحظ فإن معرفة أن التابع الجيبي يمتد عبر $[-T/2, T/2]$ تبين أن تابع sinc ذا البارامتر T يمتد عبر فضاء L_2 ذات الحزمة القاعدية. وبشكل مماثل فإن كلّ توابع T -spaced والتوابع الجيبية الموزونة بتابع sinc تمتد عبر L_2 .

4.5 الملخص

نظرية أمواج L_2 التي ينظر إليها على أنها أشعة في فضاء جداء داخلي يعرف بفضاء الإشارة قد تم تطويرها والنتيجة الأكثر أهمية من وجهة النظر هذه هو أن جميع التوسعات المتعامدة المستنظمة في L_2 يمكن النظر إليها كإطار مشترك، حيث تعد سلسلة فورييه مثلاً على ذلك.

نتيجة هامة أخرى هي أنه رغم إضافة حدود إضافية إلى التوسعات المتعامدة المستنظمة الجزئية لموجة L_2 فإن التوسعات الجزئية تتزايد بمقادير صغيرة مقترية من الحد الأقصى للفضاء L_2 . يعود السبب الرئيس لتقييد التركيز على الأمواج محدودة الاستطاعة هي أنه عندما تستهلك استطاعتها بدرجات متفاوتة من الحرية (أي معاملات التوسع)، مما يربط إنتاج نوع من التقارب لأن هذه الاستطاعة أقل من الاستطاعة المتاحة لدرجات مغايرة من الحرية. يجعل هذا الحد المبين أعلاه من هذا الحدس أكثر دقة. توجد نتيجة أخرى هي إدراك أن توابع L_2 تمثل كتوسعات متعامدة مستنظمة متعامدة أو مقربة إلى توسعات متعامدة مستنظمة جزئية لذلك لا توجد حاجة إضافية للتعامل مع قضايا رياضية معقدة مثل التكافؤ في L_2 . وبالطبع فإن كيفية انقطاع truncate التوسعات قد تكون معقدة رياضياً، إلا أن التوسعات المنقطعة ذاتها هي أكثر بساطة وسهولة.

A5 ملحق: المتتمات والبراهين

يستخدم الجزء الأول من الملحق نتائج الجداء الداخلي لهذا الفصل بغية برهنة النظريات المتعلقة بتحويلات فورييه في الفصل الرابع. ويستخدم الجزء الثاني الجداء الداخلي لبرهان نظرية أخذ العينات (الاعتيان) والتزيف aliasing المستخدمة في الفصل الرابع والجزء الأخير يناقش الأمواج الكروية. وبالتالي فإن هذا يؤمن نظرة إضافية عن درجات الحرية في منطقة عرض الحزمة والزمن.

1.A5 نظرية بلانشيريل Plancherel

برهان النظرية 1.5.4 (Plancherel 1): إن الفكرة من البرهان هي توسيع الموجة الزمنية u إلى توسعات متعامدة مستنظمة والتي تكون مجاميعها الجزئية ذات تحويلات فورييه معروفة؛ تعرف نهاية L_2 لهذه التحويلات بالتالي على أنها تحويل L_2 للموجة u أي \hat{u} . انشر أولاً تابع كيني $u(t)$ من L_2 في الامتداد الجيبي المنقطع T -spaced، باستخدام $T=1$. يمتد هذا التوسع عبر L_2 والتوابع المتعامدة $e^{2\pi ikt} rect(t-m)$ متعامدة معيارياً لأن $T=1$. وهكذا يكون الإسقاط اللامتناهي الأبعاد المحدد بالنظرية 2.3.5:⁸⁰

$$u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u^{(n)}(t) \quad \text{where} \quad u^{(n)}(t) = \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n \hat{u}_{k,m} \theta_{k,m}(t)$$

$$\theta_{k,m}(t) = e^{2\pi ikt} rect(t-m) \quad \text{and} \quad \hat{u}_{k,m} = \int u(t) \theta_{k,m}^*(t) dt$$

بما أن $u^{(n)}(t)$ محدود زمنياً، بالفضاء L_2 وبالتالي له تحويل فورييه مستمرّ معرّف وفق:

⁸⁰ لاحظ أن $\{\theta_{k,m}; k, m \in \mathbb{Z}\}$ هي مجموعة معدودة من الأشعة المتعامدة، وقد رتبنا بطريقة حيث إنه من أجل $n \in \mathbb{Z}^+$ فإن كل الحدود التي يكون فيها $|m| \leq n$ و $|k| \leq n$ تأتي قبل كل الحدود الأخرى.

$$(27.5) \quad u^{(n)}(f) = \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-n}^n \hat{u}_{k,m} \psi_{k,m}(f)$$

حيث $\psi_{k,m}(f) = e^{2\pi ifm} \text{sinc}(f - k)$ هو الحد k, m من مجموعة التوسعات المتعامدة المستنظمة الموزونة بتابع sinc والمتقطعة T - spaced مع $T = 1$. من خلال الجزء الأخير من النظرية (2.3.5)، تتقارب سلسلة الأشعة $\hat{u}^{(n)}$ إلى الشعاع \hat{u} من L_2 (الفئة المكافئة من التتابع) التي ترمز إلى تحويل فورييه للتابع $u(t)$ وتحقق:

$$(28.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{u} - \hat{u}^{(n)}\| = 0$$

ويجب ربط ذلك مع التتابع $u_A(t)$ و $\hat{u}_A(f)$ في النظرية. بدايةً من أجل كل عدد صحيح $n > \ell$ ، نعرف:

$$(29.5) \quad \hat{u}^{(n,\ell)}(f) = \sum_{m=-n}^n \sum_{k=-\ell}^{\ell} \hat{u}_{k,m} \psi_{k,m}(f)$$

وذلك لأن هذا التوسع الجزئي مكتمل أكثر من $\hat{u}^{(n)}(f)$ ، حيث:

$$\|\hat{u} - \hat{u}^{(n)}\| \geq \|\hat{u} - \hat{u}^{(n,\ell)}\|$$

وبجعل الحد $\ell \rightarrow \infty$ ، فإن $\hat{u}^{(n,\ell)}$ هو تحويل فورييه لـ $\hat{u}_A(f)$ من أجل $A = n + \frac{1}{2}$ من $u_A(t)$ وبجمع هذا مع (28.9)، نجد:

$$(30.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{u} - \hat{u}_{n+\frac{1}{2}}\| = 0$$

أخيراً، بأخذ معادلة الطاقة ذات الأبعاد المنتهية يكون لدينا:

$$\|u^{(n)}\|^2 = \sum_{k=-n}^n \sum_{m=-n}^n |\hat{u}_{k,m}|^2 = \|\hat{u}^{(n)}\|^2$$

حيث نحصل على معادلة الطاقة L_2 ، $\|u\|^2 = \|\hat{u}\|^2$. يظهر هذا أيضاً أن $\|\hat{u} - \hat{u}_A\|$ مكرر monotone حسب A بحيث إن المعادلة (30.5) يمكن أن تستبدل بالمعادلة:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \|\hat{u} - \hat{u}_{n+\frac{1}{2}}\| = 0$$

برهان نظرية 2.5.4 (Plancherel 2): من خلال ازدواجية الزمن/التردد مع النظرية (1.5.4)، نلاحظ أن $l.i.m._{B \rightarrow \infty} u_B(t)$ موجود ونرمز له على هذا من خلال $\mathcal{F}^{-1}(\hat{u}(f))$. الأمر الوحيد المتبقي هو أن نبرهن أن تحويل فورييه المعاكس هذا هو L_2 المكافئ للتابع الأصلي $u(t)$. نشير بدايةً أن تحويل فورييه لـ $\text{rect}(t) = \theta_{0,0}(t)$ هو $\text{sinc}(f)$ وأن التحويل المعاكس المعروف أعلاه، هو L_2 مكافئ لتابع $\text{rect}(t)$. مع الإزاحات الزمنية والترددية، نجد أن $u^{(n)}(t)$ هو التحويل المعاكس، المعروف أعلاه، للتابع $\hat{u}^{(n)}(f)$. ينجم عن ذلك أن $\|\mathcal{F}^{-1}(\hat{u}) - u^{(n)}\| = 0$ ، وبالتالي نجد أن $\|\mathcal{F}^{-1}(\hat{u}) - u^{(n)}\| = 0$.

وكمثال لنظرية بلانشيريل، ليكن $h(t)$ في النسبة هو $(0, 1)$ وذا قيمة منعدمة فيما عدا ذلك. وعليه فإن h هي L_1 و L_2 ولها تحويل فورييه $\hat{h}(f) = 0$ المستمر في L_1 و L_2 . التحويل المعاكس هو أيضاً منعدم ويساوي $h(t)$.

إن للتابع $h(t)$ المبين أعلاه، معنى بديهياً لأنه L_2 مكافئ للتابع الصفري. سيناقش المثال التالي L_2 الذي يكون غير صفري في L_1 ، إلا أن كل أعضاء (مكونات) صفه المكافئ غير مستمرة في أي مكان وغير محدودة في كل مجال.

نناقش الآن مثلاً عن تابع L_2 حقيقي وغير صفري في المجال $(0, 1)$. يعد هذا التابع L_1 وله تحويل فورييه مستمر، لكن كل التتابع في فئته المكافئة غير مستمرة في أي مكان وغير محدودة في أي مجال مفتوح ضمن $(0, 1)$. يوضح هذا المثال كيف يمكن أن يكون للتتابع الغريبة (Bizarre) تحويلات فورييه متقنة وبالعكس، كما سنستخدم هذا لاحقاً لشرح بعض خواص تتابع L_2 .

مثال 1.A5: تتابع L_2 و L_1 الغريبة. نقوم أولاً بوضع قائمة بالكسور ضمن المجال $(0,1)$ حيث نزيد المقام أي:

ثم نعرف التابع: $a_1 = 1/2, a_2 = 1/3, a_3 = 2/3, a_4 = 1/4, a_5 = 3/4, a_6 = 1/5 \dots$

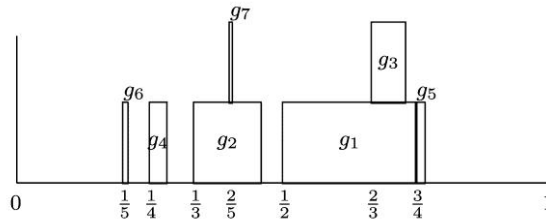
$$g_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } a_n \leq t \leq a_n + 2^{-n-1} \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)$$

وبذلك فإن $g(t)$ يمثل مجموع توابع مستطيلة يمثل كل واحد منها أحد الكسور ويتناهي عرض كل منها إلى الصفر على نحو متسارع مع زيادة قيمة دليل الكسر كما هو مبين في الشكل (3.5). يمكن بالتالي حساب تكامل التابع $g(t)$ على النحو التالي:

$$\int_0^1 g(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n-1} = \frac{1}{2}$$

وهكذا فإن $g(t)$ هو تابع L_1 كما هو مبين في الشكل (3.5).



الشكل 3.5: الحدود السبعة الأولى من $\sum_i g_i(t)$.

بدراسة الفاصل $[\frac{2}{3}, \frac{2}{3} + \frac{1}{8}]$ الذي يتعلق بالمستطيل g_3 في الشكل. بما أن الفواصل الزمنية الكسرية مزدحمة على المحور الحقيقي، يوجد بالتالي عدد كسري a_j ضمن هذا الفاصل الزمني، يبدأ فيه فاصل جديد تكون فيه كافة قيم g_1 و g_3 و g_j مساوية الواحد؛ وعليه يكون $g(t) \geq 3$ ضمن هذا الفاصل الزمني الجديد. وهكذا يمكن تكرار النهج نفسه ضمن هذا الفاصل الزمني الجديد الذي يحوي كسراً وليكن a'_j . يوجد بالتالي عدد كسري a'_j ضمن هذا الفاصل الزمني، يبدأ فيه فاصل جديد تكون فيه كافة قيم g_1 و g_3 و g_j و a'_j مساوية الواحد؛ وعليه يكون $g(t) \geq 4$.

إذا كررنا النقاش السابق فإننا نجد بالتالي أن الفترة $[\frac{2}{3}, \frac{2}{3} + \frac{1}{8}]$ تتضمن فترات جزئية يأخذ عندها التابع $g(t)$ قيم كبيرة عشوائية لكن في الواقع وعند أخذ نهاية كل من $a_1, a_3, a_j, a_{j+1}, \dots$ نجد نقطة نهاية a يكون عندها $g(a) = \infty$. وأكثر من ذلك، يمكننا تطبيق ما سبق على أي فاصل مفتوح بين $(0, 1)$ لنبين أن $g(t)$ تأخذ قيم لانهائية ضمن هذه الفترة.⁸¹ وبشكل أكثر وضوحاً ومن أجل $\varepsilon > 0$ وكل $t \in (0, 1)$ ، يوجد زمن t' يكون فيه $|t - t'| < \varepsilon$ و $g(t') = \infty$. إن ذلك يعني أن $g(t)$ غير مستمر وغير محدود في كل منطقة من $(0, 1)$. والتابع $g(t)$ موجود أيضاً ضمن L_2 كما هو موضح أدناه:

$$(31.5) \quad \int_0^1 g^2(t) dt = \sum_{n,m} \int g_n(t) g_m(t) dt$$

$$(32.5) \quad = \sum_n \int g^2(t) dt + 2 \sum_n \sum_{m=n+1}^{\infty} \int g_n(t) g_m(t) dt$$

$$(33.5) \quad \leq \frac{1}{2} + 2 \sum_n \sum_{m=n+1}^{\infty} \int g_m(t) dt = \frac{3}{2}$$

⁸¹ سوف يلاحظ القارئ الحذر أن $g(t)$ ليس في الحقيقة تابع $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، وإنما هو تابع من \mathbb{R} إلى المجموعة الموسعة من القيم الحقيقية بما في ذلك ∞ و $-\infty$. مجموعة t التي يكون فيها $g(t) = \infty$ ومقاس صفري يمكن تجاهله في تكامل Lebesgue. كما يترتب عدم الخلط بين تابع يأخذ قيمة لامتناهية في نقطة معزولة مع تابع استجابة واحدي unit impulse في تلك النقطة. يتكامل الأول حول الصفر من أجل نقطة التفرد singularity، في حين أن الثاني هو تابع معمم يتكامل بالتعريف للقيمة 1.

حيث استخدمنا في العلاقة (33.5) حقيقة كون $g_n^2(t) = g_n(t)$ في الحد الأول وأن $g_n(t) \leq 1$ في الحد الثاني. نستنتج مما سبق أن $g(t)$ هو L_1 و L_2 لكنه غير مستمر في كل مكان ويأخذ قيماً لانهائية عند نقاط محددة ضمن كل فاصل زمني. بينما يكون التحويل $\hat{g}(f)$ مستمراً وهو L_2 لكنه ليس L_1 . التحويل المعاكس $g_B(t)$ للتابع $\hat{g}(f) \text{ rect}(\frac{f}{2B})$ مستمر ويتقارب في L_2 مع $g(t)$ عندما $B \rightarrow \infty$. عندما $B = 2^k$ يقرب التابع $g_B(t)$ إلى $g_1(t) + \dots + g_k(t)$ بحيث يكون ذا حواف غير حادة. هذا مثال جيد على التابع $\hat{g}(f)$ الذي يملك تحويل فورييه معاكساً تقريباً لبعض الشيء. نلاحظ أن التابعين $g(t)$ و $h(t)$ اللذين يأخذان القيمة 1 من أجل الأعداد الكسرية المحصورة بين (0, 1) والقيمة 0 خارج هذا الحيز، يكونان غير مستمرين ضمن هذا الحيز (0, 1). وعلى أية حال فإن التابع $h(t)$ يأخذ القيمة 0 وفي هذه الحالة هو غريب بالمعنى الصناعي، وهو من أجل معظم الأغراض نفس التابع الصفري. أما التابع $g(t)$ فهو أكثر غرابة في معناه الأساسي، حيث لا يمكن تغييره ضمن مجموعة محددة من النقاط. ينبغي ألا يستنتج المرء من هذا المثال أنه لا يمكن الوثوق بالحدس، أو أنه من الضروري دراسة بعض مقررات الرياضيات المخصصة لطلبة الدراسة العليا كي يشعر بالثقة في التعامل مع التوابع. يمكن للمرء أن يستنتج على أية حال، أن البساطة في النتائج المتعلقة بتحويلات فورييه والتوسعات المتعامدة المستنظمة لتوابع L_2 غير عادية حقاً على ضوء التوابع الغريبة المنضوية ضمن صف L_2 . وبشكل مختصر، يمكننا القول إن نظرية بلانشيريل قد قدمت لنا أمرين أساسيين: الأول: تحويل فورييه والتحويل العكسي موجودان من أجل جميع توابع L_2 . الثاني: أصبحت الفترات المنتهية وتقريبات عرض الحزمة المحدودة جيدة عشوائياً (على ضوء تقارب L_2) طالما أن الحيز الزمني وعرض الحزمة تزداد كبيراً.

2.A5 نظريتنا أخذ العينات والتزييف Aliasing

تحتوي هذه الفقرة على براهين نظريتي أخذ العينات والتزييف. إن هذه البراهين مهمة إلا أنها غير متاحة في أي مكان آخر بهذه الصيغة، حيث تنطوي هذه البراهين على تحليل رياضي دقيق قد لا يكون ذا أهمية لبعض الطلبة أو خلفيتهم العلمية. **برهان نظرية 2.6.4 (نظرية أخذ العينات):** بفرض أن $\hat{u}(f)$ يمثل تابع L_2 والذي يأخذ قيمة 0 خارج المجال $[-W, W]$ ، ومن خلال النظرية (2.3.4) فإن $\hat{u}(f)$ هو L_1 وبأخذ علاقة Lemma (1.5.4) يمكننا كتابة:

$$(34.5) \quad u(t) = \int_{-W}^W \hat{u}(f) e^{2\pi i f t} df$$

التي تكون محققة من أجل $t \in \mathbb{R}$. نرغب بإظهار كون توسع نظرية أخذ العينات محققاً أيضاً عند t ، لذلك ومن خلال نظرية DTFT يمكننا كتابة:

$$(35.5) \quad \hat{u}(f) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \hat{u}^{(\ell)}(f), \quad \text{where} \quad \hat{u}^{(\ell)}(f) = \sum_{k=-\ell}^{\ell} u_k \hat{\phi}_k(f)$$

حيث إن $\hat{\phi}_k(f) = e^{2\pi i k f / (2W)} \text{rect}(f/2W)$ وأن:

$$(36.5) \quad u_k = \frac{1}{2W} \int_{-W}^W \hat{u}(f) e^{2\pi i k f / (2W)} df$$

وبمقارنة العلاقتين (34.5) و (35.5) نجد أن $2Wu_k = u(\frac{k}{2W})$ وبما أن التوابع $\hat{\phi}_k(f)$ موجودة في L_1 فإن المجموع المنتهي $\hat{u}^{(\ell)}(f)$ يقع أيضاً ضمن L_1 . لهذا فإن تحويل فورييه العكسي:

$$u^{(\ell)}(t) = \int \hat{u}^{(\ell)}(f) df = \sum_{k=-\ell}^{\ell} u\left(\frac{k}{2W}\right) \text{sinc}(2Wt - k)$$

يعرف عند كل نقطة t . ومن أجل $t \in \mathbb{R}$ فإن الفرق $u(t) - u^{(\ell)}(t)$ يكتب كما يلي:

$$u(t) - u^{(\ell)}(t) = \int_{-W}^W [\hat{u}(f) - \hat{u}^{(\ell)}(f)] e^{2\pi i f t} df$$

يمكن أن ينظر إلى هذا التكامل كجاء داخلي للتابعين $\hat{u}(f) - u^{(\ell)}(f)$ و $e^{-2\pi ift} \text{rect}[\frac{f}{2W}]$ لذلك ومن خلال تبين شوارتز يمكننا كتابة العلاقة:

$$|u(t) - u^{(\ell)}(t)| \leq \sqrt{2W} \|\hat{u} - \hat{u}^{(\ell)}\|$$

من خلال تقارب L_2 من DTFT، يقترب الطرف الأيمن من العلاقة السابقة من القيمة 0 من أجل $\ell \rightarrow \infty$ ، وبذلك يقترب الطرف الأيسر القيمة 0 من أجل كل t ، مما يؤدي إلى تقارب عند كل نقطة.

برهان نظرية 3.6.4 (نظرية أخذ العينات للإرسال). نفترض من أجل W معينة أن السلسلة $\{u(\frac{k}{2W}); k \in \mathbb{Z}\}$ تحقق $\sum_k |u(\frac{k}{2W})|^2 < \infty$ ونعرف $u_k = \frac{1}{2W} u(\frac{k}{2W})$ من أجل كل $k \in \mathbb{Z}$. ومن خلال نظرية DTFT فإنه يوجد تابع ترددي $\hat{u}(f)$ غير صفري فقط ضمن المجال $[-W, W]$ والذي يحقق العلاقتين (60.4) و (61.4). نجد من خلال نظرية أخذ العينات أن تحويل فورييه العكسي $u(t)$ للتابع $\hat{u}(f)$ يملك المواصفات المرغوبة.

برهان النظرية 1.7.4 (نظرية التزييف Aliasing Theorem). يمكننا البدء بفصل $\hat{u}(f)$ إلى شرائح ترددية $\{\hat{v}_m(f); m \in \mathbb{Z}\}$:

$$(37.5) \quad \hat{u}(f) = \sum_m \hat{v}_m(f), \quad \hat{v}_m(f) = \hat{u}(f) \text{rect}^+(fT - m)$$

يعرف التابع $\text{rect}^+(f)$ بأنه يساوي 1 من أجل $-\frac{1}{2} < f \leq \frac{1}{2}$ والقيمة 0 خلاف ذلك، وهو L_2 مكافئ للتابع $\text{rect}(f)$ إلا أنه يعطينا مساواة نقطة لنقطة في المعادلة (37.5). نعرف التابع $\hat{v}^{(n)}(f)$ من أجل كل عدد صحيح n على النحو التالي:

$$(38.5) \quad \hat{v}^{(n)}(f) = \sum_{m=-n}^n \hat{v}_m(f) = \begin{cases} \hat{u}(f) & \text{for } \frac{2n-1}{2T} < f \leq \frac{2n+1}{2T} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

يبيّن التمرين (16.5) أن الشروط المفترضة على $\hat{u}(f)$ نستلزم أن $\hat{u}(f)$ هو L_1 . ومن خلال العلاقة (38.5) فإن ذلك ينطوي على:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(f) - \hat{v}^{(n)}(f)| df = 0$$

وبما أن $\hat{u}(f) - \hat{v}^{(n)}(f)$ موجودة ضمن L_1 فإن تحويل فورييه المعاكس عند كل قيمة t يحقق:

$$\begin{aligned} |u(t) - v^{(n)}(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{u}(f) - \hat{v}^{(n)}(f)] e^{2\pi ift} df \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(f) - \hat{v}^{(n)}(f)| df = \int_{|f| \geq 2n+1/2T} |\hat{u}(f)| df \end{aligned}$$

وبما أن $\hat{u}(f)$ موجود في L_1 فإن التكامل النهائي السابق يقترب من الصفر مع زيادة n . وهكذا ومن أجل كل t لدينا:

$$(39.5) \quad u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} v^{(n)}(t)$$

نعرف الآن $\hat{s}_m(f)$ كشريحة ترددية $\hat{v}_m(f)$ مزاحة نحو حزمة قاعدية، أي:

$$(40.5) \quad \hat{s}_m(f) = \hat{v}_m\left(f - \frac{m}{T}\right) = \hat{u}\left(f - \frac{m}{T}\right) \text{rect}^+(fT)$$

وبتطبيق نظرية أخذ العينات على $v_m(t)$ يصبح لدينا:

$$(41.5) \quad v_m(t) = \sum_k v_m(kT) \text{sinc}\left(\frac{t}{T} - k\right) e^{2\pi imt/T}$$

وبتطبيق علاقة الإزاحة الترددية على (40.5) نجد أن $s_m(t) = v_m(t) e^{-2\pi ift}$ ، ولهذا يكون:

$$(42.5) \quad s_m(t) = \sum_k v_m(kT) \text{sinc}\left(\frac{t}{T} - k\right)$$

الآن نعرف $\hat{s}^{(n)}(f) = \sum_{m=-n}^n \hat{s}_m(f)$ ومن العلاقة (40.5) نجد أن $\hat{s}^{(n)}(f)$ هو نسخة رديفة من $\hat{v}^{(n)}(f)$ وذلك كما هو موضح في الشكل (10.4). وبذلك يعطى تحويل فورييه المعاكس بالعلاقة:

$$(43.5) \quad s^{(n)}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-n}^n v_m(kT) \text{sinc}\left(\frac{t}{T} - k\right)$$

لقد قمنا بتغيير نمط الجمع والذي يعد صحيحاً نظراً لأن الجمع عند m يكون محدوداً. أخيراً، نعرف $\hat{s}(f)$ ليكون النسخة "المطوية" folded من $\hat{u}(f)$ التي تجمع عبر كافة m ، أي:

$$(44.5) \quad \hat{s}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{s}^{(n)}(t)$$

يبين التمرين (16.5) أن هذه النهاية تتقارب مع تابع $\hat{s}(f)$ وهو L_2 أيضاً. يوفر التمرين (38.4) مثالاً عن حالة كون $\hat{s}(f)$ ليس تابعاً L_2 إذا لم يتحقق الشرط $\lim_{|f| \rightarrow \infty} \hat{u}(f)|f|^{1+\varepsilon} = 0$.

بما أن $\hat{s}(f)$ يقع ضمن L_2 ويأخذ قيمة 0 خارج المجال ...، فإن نظرية أخذ العينات تظهر أن التحويل العكسي $s(t)$ يحقق العلاقة:

$$(45.5) \quad s(t) = \sum_k s(kT) \text{sinc}\left(\frac{t}{T} - k\right)$$

وبدمج ذلك مع العلاقة (43.5) نجد أن:

$$(46.5) \quad s(t) - s^{(n)}(t) = \sum_k \left[s(kT) - \sum_{m=-n}^n v_m(kT) \right] \text{sinc}\left(\frac{t}{T} - k\right)$$

ومن خلال العلاقة (44.5) نجد أن: $\lim_{n \rightarrow \infty} \|s - s^{(n)}\| = 0$ ولهذا يكون:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k |s(kT) - v^n(kT)|^2 = 0$$

هذا يحقق $s(kT) = \lim_{n \rightarrow \infty} v^{(n)}(kT)$ من أجل كل عدد صحيح k . ومن خلال العلاقة (39.5) لدينا أيضاً $u(kT) = \lim_{n \rightarrow \infty} v^{(n)}(kT)$

ولهذا فإنه من أجل $k \in \mathbb{Z}$ لدينا:

$$(47.5) \quad s(t) = \sum_k u(kT) \text{sinc}\left(\frac{t}{T} - k\right)$$

هذا يبين أن العلاقة (44.5) تحقق (47.5). وبما أن $s(t)$ موجود في L_2 فنستنتج أن $\sum_k |u(kT)|^2 < \infty$. وبشكل معاكس، فإن العلاقة

(47.5) تعرف تابع L_2 فريد ولهذا فإن تحويل فورييه يجب أن يكون L_2 مكافئاً للتابع $\hat{s}(f)$ كما توضح العلاقة السابقة (47.5).

3.A5 الأمواج الكروية المتطاولة Prolate Spheroidal Waveforms

الأمواج الكروية المتطاولة (انظر [29]) هي مجموعة من التوابع المتعامدة المستنظمة والتي توفر طرائق أكثر دقة لدراسة درجات الحرية الموضحة بالفقرة 2.7.9. فمن أجل كل اختيار لعرض الحزمة الأساسي W والفترة الزمنية $[-T/2, T/2]$ فإن هذه التوابع تشكل مجموعة متعامدة $\{\phi_0(t), \phi_1(t), \dots\}$ من توابع L_2 الحقيقية والحدودة بالفترة الزمنية $[-T/2, T/2]$ تملك هذه التوابع أعظم استطاعة ممكنة في المجال الترددي $[-W, W]$ ، مع أخذ قيد الفاصل الزمني $[-T/2, T/2]$ بالحسبان.

وبشكل أكثر دقة، فمن أجل $n \geq 0$ نفرض أن $\hat{\phi}_n(f)$ هو تحويل فورييه للتابع $\phi_n(t)$ ، نعرف العلاقة:

$$(48.5) \quad \hat{\theta}_n(f) = \begin{cases} \hat{\phi}_n(f) & ; -W < t < W \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

إن التابع $\theta_n(t)$ هو التابع $\phi_n(t)$ المقطوع ترددياً ضمن المجال $(-W, W)$ ؛ وبشكل مكافئ، يمكن النظر إلى $\theta_n(t)$ على أنه نتيجة

تمرير $\phi_n(t)$ خلال مرشح تمرير تردد منخفض مثالي.

اختبر التابع $\phi_n(t)$ ليكون نسخة مبسطة من التابع $\phi_0(t): (-T/2, T/2) \rightarrow \mathbb{R}$ الذي يعطي أعظم قيمة للاستطاعة في $\theta_0(t)$ ، إلا أننا لن نبحث في كيفية حل الأمثلة هذه. على أية حال، فإن التابع $\theta_0(t)$ يحاول أن يحاكي القيمة $\sqrt{1/T} \text{rect}(t/T)$ ، عدا عن كونه ذا حواف مستديرة في محاولة لإنقاص الطاقة التي تقع خارج المجال.

وبشكل مشابه، من أجل كل $n > 0$ فإن التابع $\phi_n(t)$ اختبر ليكون نسخة مبسطة من التابع $\{\phi_n(t): (-T/2, T/2) \rightarrow \mathbb{R}\}$ المتعامد معيارياً على $\phi_m(t)$ من أجل كل $m < n$ كما يعطي أعظم استطاعة في $\theta_n(t)$. وأخيراً، نعرف $\lambda_n = \|\theta_n\|^2$ وبالتالي يمكن أن نجد أن $1 > \lambda_0 > \lambda_1 > \dots$. نفسر λ_n على أنها الجزء من الاستطاعة في ϕ_n المحددة بالمجال القاعدي $[-W, W]$. يعرف عدد درجات الحرية في $[-T/2, T/2]$ و $[-W, W]$ ، على أنه أكبر قيمة للمتحويل n والتي يكون عندها λ_n أقرب إلى الواحد. إن قيم λ_n تعتمد على الجداء TW لذلك يمكن أن يرمز لها بالرمز $\lambda_n(TW)$ وبالتالي فإن النتيجة الرئيسية للأمواج الكروية والتي لن نقوم ببرهانها هي أنه من أجل أي $\varepsilon > 0$ فإن:

$$\lim_{TW \rightarrow \infty} \lambda_n(TW) = \begin{cases} 1 & ; n < 2TW(1 - \varepsilon) \\ 0 & ; n > 2TW(1 + \varepsilon) \end{cases}$$

هذا يعني أنه عندما تكون TW كبيرة فإنه يوجد ما يقارب $2TW$ تابع متعامد معيارياً والذي من أجلهم تكون معظم الاستطاعة في التوابع المحدودة زمنياً أيضاً محدودة ترددياً لكن لا يوجد توابع متعامدة معيارياً ذات أهمية كبيرة متعلقة بهذه السمة.

تملك توابع الأمواج الكروية المتطاولة $\phi_n(t)$ بعض الميزات الرائعة الأخرى نذكر بعضها:

- أيًا كانت n فإن التابع $\phi_n(t)$ مستمر ويوجد n تقاطع صفري.
- التابع $\phi_n(t)$ زوجي عندما n زوجية وفردية عندما n فردية.
- التابع $\phi_n(t)$ يمثل مجموعة متعامدة من التوابع.
- يعطي هذا التابع خلال الفترة الزمنية $[-T/2, T/2]$ بالعلاقة: $\theta_n(t) = \lambda_n \phi_n(t)$.

5.E تمارين

1.5 (basis) برهن النظرية (1.1.5) باقتراح خوارزمية تبرهن البند الأول ومن ثم خوارزمية تبرهن البند الثاني.

2.5 (basis) أظهر أن الشعاع 0 يمكن أن يكون جزءاً من مجموعة امتداد Spanning لكن لا يمكنه أن يكون جزءاً من مجموعة خطية مستقلة.

3.5 (basis) برهن أنه إذا كانت مجموعة الأشعة n تنشر بشكل متفرد فضاء الأشعة v ، بمعنى أن كل $v \in \mathcal{V}$ له تمثيل وحيد كجمع خطي من n شعاع، ثم أن هذه الأشعة n هي خطية ومستقلة و \mathcal{V} في فضاء ذي بعد n .

4.5 (a) بيّن أن فضاء الأشعة \mathbb{R}^2 الذي يحوي الأشعة $\{v = (v_1, v_2)\}$ ذات الضرب الداخلي من الشكل $\langle v, u \rangle = v_1 u_1 + v_2 u_2$ يحقق بديهيات فضاء الضرب الداخلي.

(b) بيّن أنه في المستوى الإقليدي فإن طول v (أي المسافة من 0 إلى v) هي $\|v\|$.

(c) بيّن أن المسافة من v إلى u هي $\|v - u\|$.

(d) بيّن أن $\cos(\angle(v, u)) = \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\| \|v\|}$ ، بافتراض أن $\|v\| > 0$ و $\|u\| > 0$.

(e) افترض بأن تعريف الجداء الداخلي قد تغير وأصبح وفق العلاقة: $\langle v, u \rangle = v_1 u_1 + 2v_2 u_2$. هل لا يزال هذا التعريف يحقق بديهيات فضاء الجداء الداخلي؟ وهل لا زالت معادلة الطول ومعادلة الزاوية (أي الطور) ترتبط مع طول وزاوية إقليدس التقليدية؟

5.5 اعتبر \mathbb{C}^n وعرف $\langle v, u \rangle$ بالعلاقة: $\sum_{j=1}^n c_j v_j u_j^*$ حيث c_1, \dots, c_n أرقام عقدية. حدد من أجل كل الحالات التالية، فيما إذا كان \mathbb{C}^n فضاء جداء داخلي أو ليس كذلك مع الشرح:

(a) c_j كلها مساوية للرقم الحقيقي الموجب نفسه.

(b) c_j كلها أرقام حقيقية موجبة.

(c) c_j كلها أرقام حقيقية ليست سالبة.

(d) c_j كلها مساوية للرقم العقدي غير الصفري نفسه.

(e) c_j كلها أرقام عقدية غير صفرية.

6.5 (Triangle inequality) برهن المتراجحة المثلثية (10.5). تلميح: انشر $\|v + u\|^2$ إلى أربعة حدود، واستخدم متراجحة شورترز (Schwarz) على كل من الجزأين المتداخلين.

7.5 لتكن u, v أشعة متعامدة في الفضاء \mathbb{C}^n ولتكن $w = w_u u + w_v v$ و $x = x_u u + x_v v$ شعاعين في الفضاء الجزئي الممتد من قبل u و v .

(a) إذا كانت w و x أشعة في الفضاء الجزئي \mathbb{C}^n ، أوجد $\langle w, x \rangle$.

(b) وإذا كانت الآن w و x أشعة في الفضاء \mathbb{C}^n ، أي أن .. حيث .. من أجل $1 \leq j \leq n$. احسب $\langle w, x \rangle$ وأظهر بأن الجواب يتوافق مع جواب الحالة السابقة.

8.5 (ضرب داخلي L_2) ليكن الفضاء الشعاعي للتتابع L_2 بحيث $\{u(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$. وليكن v و u شعاعين ممثلين بالشكل $v(t)$ و $u(t)$ وأيضاً يعرف الجداء الداخلي بالعلاقة

$$\langle v, u \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) u^*(t) dt$$

(a) افترض أن $u(t) = \sum_{k,m} \hat{u}_{k,m} \theta_{k,m}(t)$ حيث $\{\theta_{k,m}(t)\}$ مجموعة توابع متعامدة وافترض أن $v(t)$ يمكن توسيعه بشكل مشابه، بيّن أن:

$$\langle u, v \rangle = T \sum_{k,m} \hat{u}_{k,m} \hat{v}_{k,m}^*$$

(b) بيّن أن $\langle u, v \rangle$ متناه. لا تستخدم متراجحة شوارتز، لأن الهدف من هذا التمرين هو إظهار أن \mathcal{L}_2 هو فضاء جداء داخلي، وتقوم متراجحة شوارتز على كونها افتراض فضاء جداء داخلي. استخدم النتيجة في الحالة السابقة مع خواص الأعداد العقدية (يمكن استخدام متراجحة شوارتز من أجل فضاء شعاعي وحيد البعد \mathbb{C}^1).

(c) لماذا هذه النتيجة ضرورية لإظهار أن \mathcal{L}_2 هو فضاء جداء داخلي؟

9.5 ليكن لدينا الشكلان الموجيان $u_1, u_2 \in \mathcal{L}_2$ ولتكن \mathcal{V} مجموعة جميع الأشكال الموجية ذات البعد المتساوي مع u_1 و u_2 ، وعليه:

$$\mathcal{V} = \{v : \|v - u_1\| = \|v - u_2\|\}$$

(a) هل \mathcal{V} هو شعاع فضاء جزئي من \mathcal{L}_2 ؟

(b) بيّن أن:

$$\mathcal{V} = \left\{ v : \Re(\langle v, u_2 - u_1 \rangle) = \frac{\|u_2\|^2 - \|u_1\|^2}{2} \right\}$$

(c) أثبت أن $(u_1 + u_2)/2 \in \mathcal{V}$

(d) أعط تفسيراً هندسياً لـ \mathcal{V} .

10.5 من أجل أي تابع $\{u(t) : [-W, W] \rightarrow \mathbb{C}\} \in \mathcal{L}_2$ ولأجل أي t ، ولتكن $a_k = u\left(\frac{k}{2W}\right)$ ولتكن $b_k = \text{sinc}(2Wt - k)$ ، بيّن أن $\sum_k |a_k|^2 < \infty$ و $\sum_k |b_k|^2 < \infty$. استخدم ذلك لإثبات $\sum_k |a_k b_k| < \infty$ واستخدم ذلك أيضاً لإثبات أن الجمع في عملية أخذ العينات يتقارب مع كل t .

11.5 لتكن مجموعة التوابع التالية:

$$u_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

⋮

$$u_m(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 2^{-m} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

⋮

اعتبر هذه التوابع كأشعة u_0, u_1, \dots في فضاء الأشعة \mathcal{L}_2 الحقيقية. لاحظ أن u_0 مُستنظمة؛ نعبّر عنها بالعلاقة $\phi_0 = u_0$.

(a) أوجد إسقاط u_1 على ϕ_0 ، أي $(u_1)_{|\phi_0}$ ، وأوجد التعامد $(u_1)_{\perp \phi_0}$ ، وكذلك الصيغة المستنظمة ϕ_0 لـ $(u_1)_{\perp \phi_0}$. ارسم كلاً من هذه التوابع بدلالة t .

(b) عبّر عن $u_1(t - 1/2)$ كتراكيب خطي لكل من ϕ_0 و ϕ_1 . عبر (كلامياً) عن الفضاء الجزئي الحقيقي لـ \mathcal{L}_2 الممتد بالتابعين $u_1(t)$ و $u_1(t - 1/2)$. ما هو الفضاء الجزئي S_1 الخاص لـ \mathcal{L}_2 والممتد بواسطة ϕ_0 و ϕ_1 ؟

(c) أوجد إسقاط u_2 على S_1 ، أي $(u_2)_{|S_1}$ ، وأوجد التعامد $(u_2)_{\perp S_1}$ ، وكذلك الصيغة المستنظمة من $(u_2)_{\perp S_1}$. اعتبر الصيغة المستنظمة لهذا التعامد $\phi_{2,0}$ ، سيُتضح قريباً سبب استخدام صيغة مزدوجة هنا. ارسم $\phi_{2,0}$ كتاباً للزمن t .

(d) أوجد إسقاط $u_2(t - 1/2)$ على S_1 ، وأوجد التعامد $(u_2(t - 1/2))_{\perp S_1}$. اعتبر الصيغة المستنظمة لهذا التعامد $\phi_{2,1}$. ارسم $\phi_{2,1}$ كتاباً لـ t ثم اشرح لماذا $\langle \phi_{2,0}, \phi_{2,1} \rangle = 0$.

(e) عبّر عن $u_2(t - 1/2)$ و $u_2(t - 3/4)$ على أنهما تراكيب خطية لكل من $\{\phi_0, \phi_1, \phi_{2,0}, \phi_{2,1}\}$. اعتبر S_1 فضاء جزئي للجزء الحقيقي من الفضاء \mathcal{L}_2 ويمتد بواسطة $\{\phi_0, \phi_1, \phi_{2,0}, \phi_{2,1}\}$ و اشرح هذا الفضاء الجزئي كلامياً.

(f) أوجد إسقاط u_3 على S_2 وكذلك تعامد $(u_2)_{\perp S_1}$ ، ثم أوجد الصيغة المستنظمة $\phi_{3,0}$ و ارسم $\phi_{3,0}$ بدلالة t .

(g) أوجد تعامد $u_3(t - j/4)_{\perp S_2}$ على S_2 وأوجد الصيغة المستنظمة $\phi_{3,j}$ وذلك من أجل $j = 1, 2, 3$ ومن ثم اشرح الفضاء الجزئي S_3 الممتد بواسطة $\phi_0, \phi_1, \phi_{2,0}, \phi_{2,1}, \phi_{3,0}, \dots, \phi_{3,3}$.

(h) قم بتكرار هذه العملية إلى الصيغة S_4, S_5, \dots ، ما هو بعد S_m ؟ اشرح هذا الفضاء الجزئي، و اشرح إسقاط أي تابع حقيقي \mathcal{L}_2 مقيد بالفترة (0, 1) على S_m .

12.5 من أجل أي فضاء جزئي S خاص بفضاء الجداء الداخلي \mathcal{V} ، عرف S^\perp على أنه مجموعة أشعة حيث $v \in \mathcal{V}$ متعامدة مع كل $w \in S$.

(a) أثبت أن S^\perp على أنه فضاء جزئي من \mathcal{V} .

(b) باعتبار S ذا بعد متناه، أثبت أنه أي $u \in \mathcal{V}$ يمكن تفكيكها إلى $u = u_{|S} + u_{\perp S}$ حيث $u_{|S} \in S$ و $u_{\perp S} \in S^\perp$.

(c) باعتبار \mathcal{V} ذا بعد محدود، أثبت أن \mathcal{V} لها قواعد متعامدة حيث بعض القواعد الشعاعية تشكل قاعدة S وباقي القواعد تشكل S^\perp .

13.5 وسع التابع $\text{sinc}(3t/2)$ باعتباره نشرًا متعامدًا معيارياً متعامد في مجموعة التوابع: $\{\text{sinc}(t-n); -\infty < n < \infty\}$

14.5 (a) أثبت أن النبضات $g_n(t)$ في المثال (1.A5) من الفقرة (1.A5) تتداخل مع بعضها بشكل كامل أو غير كامل.

(b) قم بتعديل كل نبضة $g_n(t)$ إلى $h_n(t)$ حسب التالي: اعتبر $h_n(t) = g_n(t)$ إذا كان $\sum_{i=1}^{n-1} g_i(t)$ زوجياً و $h_n(t) = -g_n(t)$ إذا كان $\sum_{i=1}^{n-1} g_i(t)$ فردياً. أثبت أن $\sum_{i=1}^n h_i(t)$ محصور بين $[0,1]$ من أجل كل $t \in (0,1)$ وكل $n \geq 0$.

(c) أثبت أنه يوجد عدد محدود ومحدود من النقاط t والتي عندها لا تكون $\sum_n h_n(t)$ متقاربة.

15.5 برهن علاقة بارسيفال (44.4) من أجل توابع L_2 . استخدم نفس المنطق الذي تم استخدامه لإيجاد معادلة الطاقة في برهان نظرية بلانشيرل.

16.5 افترض أن $\hat{u}(f)$ هو L_2 وأيضاً $\lim_{|f| \rightarrow \infty} \hat{u}(f) |f|^{1+\varepsilon} = 0$ لأجل بعض $\varepsilon > 0$.

(a) أثبت أنه عندما $A > 0$ فإن $|\hat{u}(f)| \leq |f|^{-1-\varepsilon}$ من أجل $|f| > A$.

(b) أثبت أن $\hat{u}(f)$ هو L_1 . تلميح: من أجل A أعلاه، قسم التكامل $\int |\hat{u}(f)| df$ إلى تكامل من أجل $|f| > A$ وآخر من أجل $|f| \leq A$.

(c) أثبت أنه من أجل $T = 1$ ، فإن $\hat{u}(f)$ المعرفة في (44.5) أنها تحقق:

$$|\hat{s}(f)| \leq \sqrt{(2A+1) \sum_{|m| \leq A} |\hat{u}(f+m)|^2 + \sum_{|m| \geq A} m^{-1-\varepsilon}}$$

(d) أثبت أن $\hat{s}(f)$ هو L_2 من أجل $T = 1$ استخدم التقييس لإثبات أن $\hat{s}(f)$ هو L_2 من أجل أي $T > 0$.

6. الأقنية والتعديل وكشف التعديل

1.6 مقدمة

التعديل الرقمي (أو ترميز القناة) هو عملية تحويل تتابع رموز الدخل إلى الشكل الموجي المناسب للإرسال عبر قناة الاتصال. كشف التعديل (قناة كشف الترميز) هي العملية المقابلة في المستقبل وتتلخص بتحويل الشكل الموجي المستقبل إلى (مع احتمال وجود الضجيج) تتابع رموز (بتات) الدخل الأساسية. جرى في الفصل الأول مناقشة أسباب استخدام تتابع الرمز (البيتي) كرابط بين مصدر معلومات غير محدد وقناة اتصال غير محددة وفي الفصل الثاني والثالث ناقشنا كيفية ترميز خرج المصدر بتحويله إلى تتابع الرمز.

في الفصلين الرابع والخامس تم تطوير رؤية فراغ الإشارة من الأشكال الموجية. كما تم توضيحه في الفصلين المذكورين فمن الممكن تمثيل القناة والأشكال الموجية كأشعة حقيقية أو عقدية⁸² من نوع L_2 . يُنظر إلى أمثال هذه الأشعة كتتابع تقليدية بالنسبة للزمن $x(t)$. عند معرفة الأسس المتعامدة معيارياً التالية: $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \dots\}$ من أجل L_2 ، فإن التابع $x(t)$ يمكن تمثيله كما يلي:

$$(1.6) \quad x(t) = \sum_j x_j \phi_j(t)$$

يتم حساب x_j في المعادلة (1.6) بشكل منفرد من التابع $x(t)$ ، وتقوم السلسلة أعلاه بتقريب L_2 ضمن التابع $x(t)$. علاوة على ذلك وبدءاً من أي تتابع يتوافق مع المعادلة $\sum_j |x_j|^2 < \infty$ فهناك تابع $x(t)$ من نوع L_2 يتوافق مع المعادلة (1.6) مع التقريب إلى L_2 . وهذا يوفر طريقة عامة وبسيطة من الانتقال ما بين التتابع الزمنية والتتابع الرقمية.

في معظم حالات التعديل فإنه يتم اختيار مجموعة من الأشكال الموجية $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots$ في المعادلة (1.6) ليس كأساس لـ L_2 ولكن كأساس⁸³ لبعض الفراغات الجزئية من L_2 كمجموعة من التتابع لحزمة أساسية محددة ضمن التردد المساوي إلى المجال w أو حزمة تمرير محددة لبعض مجالات ترددية معينة. يستحسن في بعض الحالات استخدام تتابع من الأشكال الموجية غير المتعامدة. يمكننا النظر إلى كل من تحويل البتات (bit) إلى إشارة رقمية وتحويل الإشارة الرقمية إلى شكل موجي كمرحلة منفصلة. لذلك فإن دارة كشف التعديل تقوم بتحويل الشكل الموجي المستقبل إلى تتابع من الإشارات المستقبلية والتي بدورها تتحول إلى تتابع من البتات، مع الأمل بأن تكون مساوية إلى الدخل الإثنائي. الهدف الرئيس عند تصميم دارة المعدل ودارة كشف التعديل هو الوصول إلى الدرجة العظمى لمعدل بتات دخل وحدة الترميز، ويتم ذلك عادة وفقاً للتركيز على الطاقة المرسله وعرض الحزمة. عملياً هناك أيضاً تركيز التأخر الزمني ودرجة التعقيد ودرجة التوافق مع القيم المعيارية.... الخ، ولكن لن نركز على هذه العوامل فيما بعد.

مثال 1.1.6 كمثال عملي بسيط نفترض أن تتابع من الرموز الثنائية تم إدخالها في دارة الترميز خلال زمن لحظي يتباعد يساوي إلى T . من الممكن تحويل هذه الرموز إلى إعداد حقيقية باستخدام التحويل أو التوجيه 0 إلى 1+ و 1 إلى -1، عند ذلك يتم تحويل التتابع الناتج u_1, u_2, \dots للأرقام الحقيقية إلى الشكل الموجي المراد إرساله:

$$(2.6) \quad u(t) = \sum_k u_k \text{sinc} \left(\frac{t}{T} - k \right)$$

في المستقبل وعند عدم وجود الضجيج و التخماد وغيرها من العوامل فإن الشكل الموجي المستقبل هو $u(t)$. من الممكن أخذ العينات عند الزمن T_1, T_2, \dots لاسترداد u_1, u_2, \dots والذي بالتالي يتم فك ترميزه وإعادته إلى الرموز الثنائية الأصلية.

⁸² كما تم توضيحه أعلاه، فإن الأشكال الموجية الفعلية هي حقيقية. وعلى كل فهي تعتبر عادة أشكال موجية حقيقية ضمن حزمة تمرير معينة، والتي يتم تمثيلها كأشكال موجية ذات حزم أساسية عقدية.

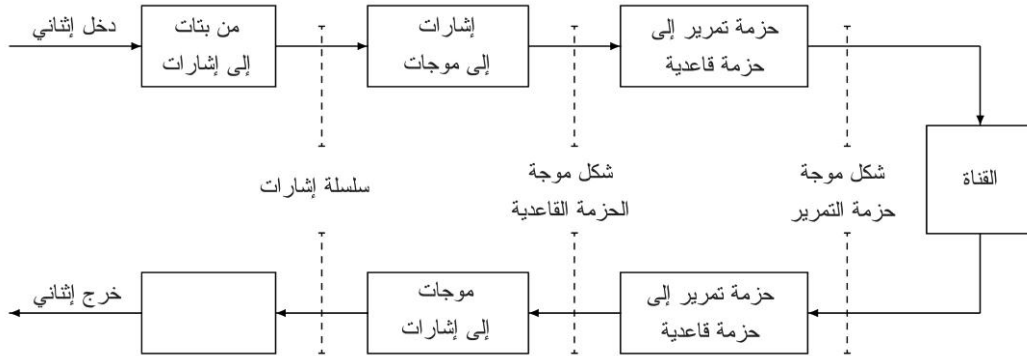
⁸³ يمكن اختيار وبصورة متكافئة $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots$ كأساس لـ L_2 ولكن هناك بعض المؤشرات التي تحدد قيم x_j غير الصفرية.

يحتوي المثال أعلاه على صيغ أولية لمرحلتين أو مستويين وقد تمت مناقشته أعلاه. الأولى وهي تحويل الرموز الثنائية⁸⁴ لإشارات رقمية والثانية تحويل تتابع الإشارات إلى شكل موجي. بشكل عام فإنه من الممكن استبدال المجموعة المؤلفة من التتابع sinc خلال الزمن T في المعادلة (2.6) وذلك بأية مجموعة من التتابع المتعامدة (أو حتى تتابع غير متعامدة). يمكن أيضاً تعميم عملية التحويل 0 إلى 1+ و 1 إلى 1- من خلال تجزئة التتابع أو التدفق إلى شرائح من نوع b من الرموز الثنائية والتي بالتالي تتحول إلى شرائح من نوع n من الأرقام الحقيقية والعقدية. تسمى المجموعة والمؤلفة شرائح عددها 2^b والناتجة عن عملية التحويل هذه، تموضع (تحشد) الإشارة.

تتضمن عادة وحدات التعديل المرحلة الثالثة والتي تقوم بتحويل الشكل الموجي المرمرز للحزمة الأساسية، مثال ذلك $u(t)$ في المعادلة (2.6) إلى الشكل الموجي لحزمة التمرير والتي تتمركز عند تردد الحامل $x(t) = \Re\{u(t)e^{2\pi i f t}\}$. يتم في وحدة فك الترميز إعادة الشكل الموجي لحزمة التمرير هذه إلى الحزمة الأساسية وذلك قبل انجاز عمليات أخرى من فك الترميز. يطلق على عملية التحويل الترددي هذه في وحدة الترميز ووحدة فك الترميز، بعملية التعديل وفك التعديل لكن الأكثر شيوعاً في هذه الأيام استخدام كلمة تعديل لكامل عملية تحويل البتات إلى الأشكال الموجية. يوضح الشكل (1.6) المراحل الثلاث هذه.

لقد تمّ التوضيح فيما سبق بأن القناة عبارة عن مسار ذي اتجاه واحد يبدأ عادة من المنبع وينتهي في المصب. ومع ذلك فإن نظام الاتصالات يعمل ضمن مسارين بحيث يقوم بإرسال البيانات من نقطة معينة إلى نقطة أخرى ويقوم باستقبال بيانات من تلك النقطة. تسمى الوحدة الفيزيائية والتي تعمل معاً على ترميز المصطلحات المرسل عبر القناة وتعمل أيضاً بشكل معكوس على فك ترميز المصطلحات المستقبلية الآتية من القناة، المودم (نسبة إلى التعديل وفك التعديل). كما هو موضح في الفصل الأول فيمكن استخدام التغذية العكسية على القناة في الاتجاه المعكوس كطلب لإعادة الإرسال على القناة ذات الاتجاه الأمامي، ولكن ذلك يحدث عملياً كجزء من استراتيجية عملية طلب إعادة الإرسال الآلي (ARQ). عند إجراء الجمع بين عملية الترميز واستراتيجيات التغذية العكسية الأكثر تطوراً من (ARQ) فإن ذلك يتيح مجالاً للأبحاث النظرية في أنظمة الاتصالات والمعلومات ولكن لن يتم مناقشته هنا للأسباب التالية:

- من المهم أن نفهم نظام الاتصالات باستخدام مسار واحد قبل التطرق إلى دراسة المسارين الأكثر تعقيداً.
- إن التغذية العكسية لا تزيد من سعة القناة في حالة القنوات النموذجية (انظر [28]).
- تعتبر دراسة كشف الأخطاء البسيطة وإعادة الإرسال هي الأفضل كموضوع في شبكات المعطيات.



الشكل 1.6: مراحل وحدة التعديل (وحدة ترميز القناة) ووحدة فك التعديل (وحدة فك ترميز القناة)

هناك تشابه مثير للاهتمام بين عملية ترميز المنبع والتعديل الرقمي. في حالة ترميز المنبع تتحول الإشارة التشابهية أولاً إلى تتابع من الأرقام الحقيقية والعقدية (مثل ذلك المعاملات في تمدد التعامد) ويتم تكميم هذا التتابع من الإشارات ليصبح تتابعاً من الرموز المكافئة لأحرف معينة، وأخيراً تحول هذه الرموز إلى تتابع ثنائي، بينما في التعديل فيتم ترميز (تحويل) تتابع البتات إلى تتابع من تموضع الإشارة. إن عناصر هذه الإشارة عبارة عن نقاط حقيقية أو عقدية ضمن بعد واحد أو عدة أبعاد. يتحول تتابع نقاط الإشارة عندئذ إلى شكل موجي وذلك

⁸⁴ غالباً ما تستخدم كلمة إشارة في مختلف مراجع الاتصالات للتعبير عن الرموز أو الأشعة أو الأشكال الموجية أو أي شيء آخر قريباً من ذلك. نحن نستخدمها للتعبير أو الإشارة إلى الأرقام الحقيقية أو العقدية وفقاً لأهمية الخصائص الرقمية. مثال ذلك، في (2.6) الإشارات (القيم الرقمية) u_1, u_2, \dots تحدد القيم الحقيقية للشكل الموجي $u(t)$ ، في حين أن رمز الدخل الثنائي يمكن أن يكون "أليس" أو "بوب" بقدر سهولة 0 أو 1.

بانعكاس عملية تحويل الشكل الموجي إلى تسلسل.

2.6 التعديل السعوي النبضي (PAM)

يعتبر هذا النوع من التعديل السعوي النبضي⁸⁵ (PAM) أبسط أنواع التعديل. يتم تقسيم رموز الدخل الثنائية إلى مجموعات، كل مجموعة مؤلفة من بتات عددها b . بعد ذلك هناك عملية تحويل لعدد من المجموعات المحتملة عددها $M = 2^b$ إلى تموضع الإشارة $A = \{a_1, a_2, \dots, a_M\}$ من الأرقام الحقيقية. إذا اعتبرنا أن R هي معدل رموز الدخل الثنائية والتي وحدته عدد البتات في كل ثانية، عند ذلك فإن تتابع المجموعات (كل مجموعة مؤلفة من بتات عددها b والتتابع المقابل u_1, u_2, \dots والمؤلف من مصفوفة إشارات عددها M تحوي المعدل $R_s = R/b$ والتي وحدته عدد الإشارات في الثانية. يتحول تتابع الإشارات بعد ذلك إلى الشكل الموجي $u(t)$ بواسطة استخدام الإزاحات الزمنية للشكل الموجي للنبضة الأساسية $p(t)$:

$$(3.6) \quad u(t) = \sum_k u_k p(t - kT)$$

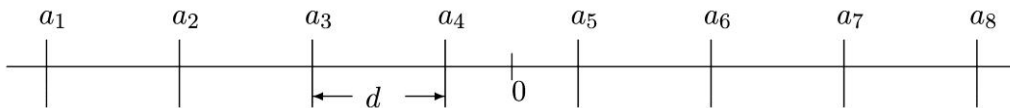
حيث إن $T = 1/R_s$ تمثل الفاصل الزمني بين إشارات متتالية. هناك حالة خاصة عندما $b=1$ وتسمى عندها بإشارة PAM/ثنائية. أما عندما تكون $b > 1$ فتسمى إشارة PAM/متعددة. نجد في المثال 1.1.6 مثالاً لإشارة PAM الثنائية حيث إن شكل النبضة الأساسية $p(t)$ عبارة عن تابع sinc. عند مقارنة المعادلة (1.6) والمعادلة (3.6) نجد أن إشارة PAM عبارة عن حالة خاصة من التعديل الرقمي، حيث إن مجموعة التتابع $\dots, \phi_2(t), \phi_1(t)$ يتم استبدالها بتتابع عبارة عن توابع أساسية $p(t)$ تتباعد عن بعضها زمنياً بمقدار T . نناقش في الفقرتين التاليتين من هذا القسم تموضع الإشارة (المرحلة أو المستوى الخارجي في الشكل (1.6) والفقرة الثالثة تناقش عملية اختيار الشكل الموجي للنبضة $p(t)$ (المرحلة المتوسطة في الشكل (1.6). في معظم الحالات⁸⁶، فإن $p(t)$ عبارة عن الشكل الموجي لحزمة الدخل الأساسية والشكل الموجي المعدل الناتج $u(t)$ يمثل الشكل الموجي لحزمة التمرير (المستوى الداخلي في الشكل (1.6). ويناقش القسم (4.6) التعديل من حزمة الدخل الأساسية إلى حزمة التمرير وبالعكس.

1.2.6 تموضع الإشارة

يتألف تموضع الإشارة M-PAM (انظر الشكل 2.6) من أعداد حقيقية عددها $M = 2^b$ ومتباعدة بقيم متساوية (d) وتوجد بشكل متناظر حول المصدر:

$$A = \left\{ \frac{-d(M-1)}{2}, \dots, \frac{-d}{2}, \frac{d}{2}, \dots, \frac{d(M-1)}{2} \right\}$$

بمعنى آخر، فإن نقاط الإشارة هي نفس النقاط الممثلة في وحدة التكميم العددي للنقاط المتناظرة و عددها M .



الشكل 2.6: مجموعة الإشارة 8-PAM

إذا كانت بتات (خانات) الدخل عبارة عن رموز مستقلة وعشوائية بنسب احتمالات متساوية (والتي يمكن تقريبها بشكل جيد من خلال الترميز الفعال للمنبع)، عند ذلك فإن كل إشارة u_k تمثل عينة من المتحول وبنسبة احتمال متساوية عبر التوضع (الأحرف الأبجدية) A لذلك فإن التتابع u_1, u_2, \dots هو مستقل وموزع بشكل متطابق. كما رأينا في التمرين (1.6) فإن القيمة المتوسطة لمربع الإشارة أو "الطاقة بكل

⁸⁵ تعود المصطلحات إلى التعديل السعوي (المطالي) التماثلي، حيث يتم تعديل إشارة حزمة الدخل الأساسية لتصبح إشارة حزمة تمرير. بينما في الاتصالات الرقمية فإن المشكلة أكثر اهتماماً من خلال تحويل التدفق أو تتابع البتات إلى شكل موجي عند حزمة الدخل الأساسية.

⁸⁶ يعتبر التعديل ذو الحزمة الواسعة جداً (UAW) من أنواع تقنيات التعديل الجديرة بالاهتمام حيث أن الشكل الموجي المرسل هو بالأساس نظام للحزمة الأساسية ذات التردد من مضاعفات غيغا هرتز. وهذا ما سيتم شرحه بشكل ملخص في الفصل التاسع.

إشارة " $E_s = E[U_k^2]$ تعطي بالعلاقة التالية:

$$(4.6) \quad E_s = \frac{d^2(M^2 - 1)}{12} = \frac{d^2(2^{2b} - 1)}{12}$$

مثال ذلك إذا كان لدينا $M = 2, 4, 8$ فيكون $E_s = d^2/4, 5d^2/4, 21d^2/4$ على التوالي.

يتم تقريب $2^{2b} - 1$ من أجل $b > 2$ لتصبح 2^{2b} ، لذا نجد أنه عند ازدياد كل وحدة في b يؤدي إلى ازدياد في E_s بعامل يساوي إلى 4. وبالتالي فزيادة المعدل R يتطلب طاقة كبيرة عندما تكون قيمة b كبيرة. قبل شرح أسباب اختيار M-PAM المعياري من أجل PAM وما هي العوامل التي أدت إلى اختيار قياس التموضع M والمسافة d ، لابد من التطرق على شرح ملخص لعيوب القناة.

2.2.6 النقاط السلبية في القناة - نظرة أولية

تخضع القنوات فيزيائياً وبشكل دائم إلى تأخير الانتشار والاضمحلال والاضحيج. إن كثيراً من القنوات السلوكية تتأثر بهذه العوامل فقط، بينما القنوات اللاسلوكية فتتأثر بالإضافة إلى ذلك بعوامل أخرى ستم مناقشتها في الفصل التاسع. سنتطرق في هذه الفقرة إلى مناقشة العوامل الثلاثة المذكورة آنفاً.

إن زمن التأخير في وحدة الاستقبال (المستقبل) يطابق نسبياً مثيله في وحدة الإرسال (المرسل). يخضع الشكل الموجي $u(t)$ في المرسل إلى تأخر الانتشار بالإضافة إلى تأخيرات أخرى بالمرشحات في المعدل وكاشف التعديل. لذلك وفقاً لزمن المرسل فإن $u(t)$ تظهر عند المستقبل بالشكل $u(t - \tau)$ ، حيث τ تمثل التأخر الكلي. عند تأخير زمن المستقبل بقيمة t عن زمن المرسل، في هذه الحالة فإن الشكل الموجي المستقبل سيكون $u(t)$. بهذه الطريقة يمكننا اعتبار أن القناة نموذجية ولا تحوي أي تأخير ومن الممكن تبسيط العلاقات الرياضية المرتبطة بذلك. يبين هذا التوضيح لماذا يقوم مهندسي الاتصالات عادة بنمذجة المرشحات في المعدل وكاشف التعديل حيث من الممكن إضافة الاستجابات قبل الزمن 0 إلى الفرق بين زمني الإرسال والاستقبال، يعتبر التأخر الثابت عند المستقبل مشكلة هامة تسمى الاستعادة الزمنية. ولكن هذه المشكلة بعيدة كل البعد عن استعادة المعلومات المرسل.

إن مطال التأخير يعتبر عاملاً هاماً في أنظمة الاتصالات، وهو أحد العوامل التي يطلق عليها جودة الخدمة في أنظمة الاتصالات. إن عامل التأخير بشكل عام هام في الاتصالات السمعية ويعتبر في غاية الأهمية عندما تكون الاتصالات في حلقة التغذية العكسية لنظام التحكم في الزمن الحقيقي. بالإضافة إلى التأخير الثابت في الزمن المرجعي بين المعدل وكاشف التعديل، هناك أيضاً تأخير في ترميز المنبع وفك الترميز يضيف الترميز لتصحيح الأخطاء تأخيراً إضافياً قد أولاً قد يحتسب كجزء من التأخير الحاصل في المعدل وكاشف التعديل. في كلا الحالتين فإن درجة التأخير في ترميز المنبع والترميز لتصحيح الأخطاء غالباً ما تكون أكبر بكثير مما نجده في المعدل وكاشف التعديل. إن درجة التأخير الأخيرة يمكن أن تكون هامة ولكن عادة ليست ذات أهمية أولية. عند ازدياد سرعة القناة فإن درجة التأخير في المرشحات تصبح أقل أهمية.

عادة ما يتم قياس المطالات ضمن نطاق مختلف عند المعدل وكاشف التعديل. إن الاضمحلال التي تعاني منه عملية الإرسال هو ناتج عن ربح التكبير، ربح الهوائي المباشر، خسائر الانتشار... إن عملية تحديد عوامل الربح والخسائر هذه (أو ربما تغييرهم)، تسمى "رابط الميزانية". وتحسب دائماً في الديسيبل (dB). إن عدد الديسيبل المقابل لربح القدرة α يعطى بالعلاقة التالية: $10 \log_{10} \alpha$. لذلك فإن خسائر القدرة تقابل dB السلبى وربح القدرة يقابل dB الايجابي. إن استخدام القياس اللوغاريتمي يسمح بجمع مختلف مكونات الربح بدلاً من ضربها. إن الدافع وراء استخدام الديسيبل بدلاً من اللوغاريتم الطبيعي أو اللوغاريتمات ذات الأساس الثنائي هو إمكانية إجراء العمليات الحسابية ذهنياً. عامل العدد 2 هو $10 \log_{10} 2 = 3.010$ ويتم تقريبه إلى 3 dB. لذلك فإن 2^2 يساوي إلى 4 ويساوي 6 dB و 8 يساوي 9 dB. بما أن 10 يساوي 10 dB، فهنا نجد أن 5 تساوي 10/2 أو 7 dB. وبسهولة نجد أن 20 يكافئ 13 dB وهكذا.

قبل الشرح لماذا M-PAM هو الخيار الجيد من المهم أن نتذكر بأن الأرباح المقاسة بالديسيبل هي أرباح قدرة. لذلك إذا كان g يعبر عن مضاعف الربح في الإشارة، فهذا يتوافق مع ربح يساوي g^2 والذي يطابق بدوره: $20 \log_{10} g$ dB. يمكن فصل رابط الميزانية في نظام الاتصالات تماماً عن أمور أخرى، لذلك فإن مقياس المطال عند المرسل عادة ما يتم معايرته مع

مثله في المستقبل.

من خلال علاج الاضمحلال والتأخير بصورة منفصلة عن عملية التعديل، نحصل على نموذج للقناة حيث إن الشكل الموجي للحزمة الأساسية $u(t)$ تتحول إلى حزمة تمرير ومن ثم يتم إرسالها. بعد تحويلها بشكل معاكس عند المستقبل إلى الحزمة الأساسية، فإن علاقة الشكل الموجي المستقبلية تصبح: $v(t) = u(t) + z(t)$ حيث تُعبر $z(t)$ عن الضجيج. إن الضجيج يمثل أحد المشاكل الأساسية في أنظمة الاتصالات وينشأ نتيجة عدة عوامل تتضمن التأثيرات الحرارية والإشعاعات غير المرغوبة على المُستقبل. في الفصل السابع سندرس مفهوم الشكل الموجي للضجيج من خلال تحديده بعينات عددية من عمليات عشوائية. أما الفصل الثامن فسيطرق إلى فك ترميز الإشارات وبوجود الضجيج. سندستعرض هنا هذه الأفكار وباختصار لنرى كيف تؤثر على اختيار تموضع الإشارة إذا كانت $p(t)$ عمودية على جميع إزاحاتها بواسطة مضاريب القيمة T ، عندئذ وبدون وجود الضجيج فإن الإشارات المرسله u_1, u_2, \dots يمكن استعادتها من الشكل الموجي للحزمة الأساسية $u(t)$ من خلال العملية التالية:

$$u_k = \int u(t)p(t - kT)dt$$

أما بوجود الضجيج فإن نفس العملية يمكن أن تصبح كما يلي:

$$(5.6) \quad v_k = \int v(t)p(t - kT)dt = u_k + z_k$$

حيث إن $z_k = \int z(t)p(t - kT)dt$ تمثل مسقط $z(t)$ على النبضة المزاحة.

إن النموذج الأكثر شيوعاً (وعادة الأكثر ملاءمة) للضجيج يسمى نموذج ضجيج غوص الأبيض المُضاف. كما هو مبين في الفصلين السابع والثامن فإن المعاملات المذكورة آنفاً $\{z_k; k \in \mathbb{Z}\}$ في هذا النموذج عبارة عن قيم العينة لمتغيرات غوص العشوائية ذات القيمة المتوسطة الصفرية والمستقلة والموزعة بانتظام (iid)، $\{z_k; k \in \mathbb{Z}\}$. يبقى هذا التعبير صحيحاً بغض النظر عن كيفية اختيار التتابع المتعامدة المستظمة $\{p(t - kT); k \in \mathbb{Z}\}$ ، وهذه المتغيرات العشوائية أيضاً مستقلة عن المتغيرات العشوائية للإشارة $\{u_k; k \in \mathbb{Z}\}$. يبين الفصل الثامن أيضاً أن العملية في المعادلة (5.6) هي الطريقة المناسبة للانتقال من الشكل الموجي إلى تتابع الإشارة في وحدة كاشف التعديل الطبقي في الشكل 1.6.

فيما يلي سنأخذ بالدسبان تأثير الضجيج على اختيار كل من M و d في وحدة تعديل PAM. بما أن الإشارة المرسله ستعود للظهور في المُستقبل مع متغير غاوس العشوائي والتي أضيفت لها، لذلك فإن أي محاولة لاستعادة u_k من V_k مع درجة احتمال خطأ⁸⁷ صغيرة ستتطلب بأن تتجاوز d عدة انحرافات معيارية للضجيج. لذلك فإن الضجيج يحدد درجة كبر قيمة d ، وبإضافة قيد الاستطاعة، يُحدد قيمة M .

تساعد العلاقة بين احتمال الخطأ والتباين النقطي للإشارة، في توضيح ماهية استخدام أنظمة PAM متعددة المستويات لمجموعة M -PAM المعيارية وبشكل ثابت. بسبب انخفاض كثافة غاوس بسرعة كبيرة مع ازدياد المسافة، فإن احتمال الخطأ نتيجة الخلط بين أقرب النقاط المتجاورة ستتناقص أيضاً على قدم المساواة وبسرعة. لذلك فإن درجة احتمال الخطأ تهيم على النقاط المتقاربة فيما بينها في التوضع. إذا كانت نقاط الإشارة مقيدة بأن تكون d المسافة الصغرى فيما بينهم، عند ذلك نلاحظ بأنه يتم تحقيق القدرة الصغرى E_s من أجل عدد معين من النقاط في M بواسطة مجموعة M -PAM المعيارية.⁸⁸

وبالتعمق بشكل أكبر في العلاقة بين M ، d والتباين σ^2 للضجيج z_k ، نفترض أن d قد جرى اختيارها لتكون $\alpha\sigma$ ، حيث اختيرت α لجعل الكشف أكثر واقعية. عند ذلك من أجل $M = 2^b$ ، حيث تعبر b عن عدد البتات المررمة ضمن كل إشارة PAM، فإن المعادلة (4.6) تصبح:

⁸⁷ عند استخدام نظام الترميز الخطأ مع PAM، فإن قيمة d تصبح أصغر، إلا أنه ومن أجل أي نظام ترميز لتصحيح الخطأ فإن قيمة d تعتمد على الانحراف لمعيارى للتابع Z_k .

⁸⁸ بصورة أخرى إذا قمنا باختيار مجموعة من نقاط الإشارة M لتصغير E_s ، من أجل احتمال خطأ محدد، فإن مجموعة M -PAM القياسية لن تكون نموذجية بشكل كامل (انظر التمرين 3.6).

$$(6.6) \quad E_s = \frac{\alpha^2 \sigma^2 (2^{2b} - 1)}{12}; \quad b = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{12E_2}{\alpha^2 \sigma^2} \right)$$

هذه المعادلة تشبه إلى حد كبير صيغة شانون للسعة عند إضافة ضجيج غاوس الأبيض، والتي تقول بأنه ومن أجل عرض نطاق مناسب في PAM فإن سعة الإشارة تعطى بالعلاقة التالية: $C = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{E_s}{\sigma^2} \right)$. الفرق الهام في المعادلة (6.6)، هو أنه يجب زيادة α لذا لا بد من تخفيض قيمة b لتقليل نسبة احتمال الخطأ. من ناحية أخرى فإن نتيجة نظرية شانون تبين بأنه من الممكن الحصول على قيمة صغيرة لنسبة احتمال الخطأ لأي عدد من البتات في كل إشارة بحيث يكون هذا العدد أقل من قيمة C . بالإضافة إلى ذلك نجد أن كلتا المعادلتين تحدد الشكل الأساسي للعلاقة بين عدد البتات في كل إشارة من جهة ونسبة الإشارة إلى الضجيج E_s/σ^2 من جهة أخرى. أيضاً كلتا المعادلتين توضح بأنه عند عدم وجود الضجيج ($\sigma^2 = 0$)، عندئذ فإن عدد البتات المرسل في كل إشارة يمكن أن يكون كبيراً جداً (المسافة d يجب أن تكون صغيرة جداً). لذلك ينتج عن كلا المعادلتين بأن الضجيج يمثل القيود الأساسية في أنظمة الاتصالات.

3.2.6 اختيار التعديل النبضي

كما لاحظنا في (3.6) يتم تحديد الشكل الموجي للحزمة الأساسية المرسل، $u(t) = \sum_k u_k p(t - kT)$ ، وذلك من أجل معدل PAM بواسطة كل من تموضع الإشارة A وفاصل الإشارة الزمني T ونبضة التعديل $p(t)$ الحقيقية \mathcal{L} . من المفيد أن نتصور $p(t)$ كنبضة استجابة لمرشح خطي زمنياً. عندئذ $u(t)$ تمثل استجابة هذا المرشح بالنسبة لتتابع من النبضات بتباعد $\{u_k \delta(t - kT)\}$. إن مسألة اختيار $p(t)$ من أجل قيمة T منفصلة بشكل كبير عن عملية اختيار A . تبقى مسألة عملية اختيار $p(t)$ ذات أهمية وتحد أكبر.

تحدد النقاط التالية شروط اختيار $p(t)$:

- يجب أن تكون $p(t) = 0$ عندما $t < -\tau$ من أجل قيم معينة للمتحول τ . لملاحظة ذلك نفترض أن k th التي تمثل الشكل الموجي لإشارة الدخل عند المعدل، يتم توليدها في الزمن $kT - \tau$ ، وتبدأ مشاركة u_k ضمن الشكل الموجي المرسل $u(t)$ فقط عند بداية $kT - \tau$ ، والذي يعني ضمناً $p(t) = 0$ عندما $t < -\tau$ كما ذكرنا. هذا يستبعد خيار $\text{sinc}(t/T)$ من أجل $p(t)$ (على الرغم من إمكانية تقطيع $\text{sinc}(t/T)$ عند $t = -\tau$ لتحقيق الشرط).
- في معظم الحالات فإن $\hat{p}(f)$ يجب أن تكون حزمة قاعدية محددة بعرض حزمة B_b أكبر بقليل من $\frac{1}{2T}$. وسنرى لاحقاً بأنه لا يمكن أن تكون حزمة قاعدية محددة بأقل من $\frac{1}{2T}$ عادة، ثمة حد أعلى لـ B_b بسبب القيود الناظمة لحزمة التمرير، أو للسماح لبعض أقنية الإرسال في الحزم المجاورة. إذا كان هذا التحديد أكبر بكثير من $\frac{1}{2T}$ ، عندها يمكن أن تزداد قيمة T ، وبالتالي يزداد معدل الإرسال.
- إن عملية استرجاع التتابع $\{u_k; k \in \mathbb{Z}\}$ من الشكل الموجي المستقبل والمتضمن الضجيج، يجب أن تكون بسيطة وموثوقة نسبياً. في حالة عدم وجود الضجيج فإن $\{u_k; k \in \mathbb{Z}\}$ يبقى محددًا بشكل منفرد من قبل الشكل الموجي المستقبل.

إن الشرط الأول يجعل عملية تحقيق الشرط الثاني صعبة نسبياً. لتحقيق الشرط الثاني على وجه الخصوص فإن نظرية بالي - ينر [20] تنص بأن الشرط الضروري والكافي لتابع $p(t)$ من نوع \mathcal{L} غير صفري يساوي إلى الصفر عندما $t < 0$ ، هو أن يحقق تحويل فورييه فيه المعادلة التالية:

$$(7.6) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|\hat{p}(f)||}{1 + f^2} df < \infty$$

يلخص الجمع بين هذه الحالة وشرط الإزاحة لتحويلات فورييه، بأن أي تابع من نوع \mathcal{L}_2 يساوي الصفر من أجل جميع قيم $t < -\tau$ ومن أجل زمن تأخير τ محدد، يجب أن يحقق شرط المعادلة (7.6). إن ذلك يبين في الواقع بأن التتابع لا يمكن أن تكون محددة بنفس الوقت في الزمن والتردد. تبين بعض نتائج المعادلة (7.6) بأنه إذا $p(t) = 0$ عندما $t < -\tau$ ، عندئذ $\hat{p}(f)$ يجب ألا يكون صفراً. وتُظهر نتيجة أخرى بأن $\hat{p}(f)$ يجب أن يتناقص إلى الصفر مع تزايد f بشكل أكبر بقليل من التزايد الأسّي. تتحول حالة بالي - ينر لأن تكون عديمة الفائدة كأداة لاختيار $p(t)$. حيث نجد أولاً أنها تميز ما إذا كان التأخير الزمني τ محدود أو لا

نهائي، ولكن لا تعطي إشارة عن قيمتها عندما تكون محدودة. ثانياً، إذا تم اختيار التابع $p(t)$ من نوع \mathcal{L}_2 بغض النظر عن (7.6)، عندئذ يتجزأ ليصبح صفرًا عندما $t < -\tau$. من الممكن \mathcal{L}_2 تخفيض قيمة الخطأ الناتج عن التجزئة (التقطيع) من خلال اختيار قيمة τ بحيث تكون كبيرة نسبياً. يتم تحسين المفاضلة بين الخطأ الناتج عن التجزئة والتأخير الزمني باختيار $p(t)$ بحيث تصل إلى 0 بشكل متسارع عندما $t \rightarrow -\infty$.

باختصار فإننا سنستبدل الشرط الأول أعلاه باختيار $p(t)$ بحيث تقترب من الصفر بشكل متسارع عندما $t \rightarrow -\infty$. لذا يتم تقريب $\hat{p}(f) \leftrightarrow p(t)$ إلى نبضة الإرسال فيما بعد، وهذا يعني $\hat{p}(f)$ يجب أن يكون ذا نطاق محدد عند تردد أكبر من $\frac{1}{2T}$. ننتقل بعد ذلك إلى الشرط الثالث، لاسيما استرداد التابع u_1, u_2, \dots بسهولة من $u(t)$ بدون وجود الضجيج. قام بتحليل هذه الحالة هاري نايكويست [19] من خلال نشرة علمية في عام 1928. قبل النظر إلى نتائج نايكويست لابد من التطرق إلى وحدة كشف التعديل.

4.2.6 كشف تعديل PAM

نفترض في الوقت الراهن ومع تجاهل ضجيج القناة بأنه قد تم اختيار الزمن المرجعي ونطاق السعة عند المستقبل بحيث يكون الشكل الموجي للحزمة الأساسية في المستقبل يتطابق مع الشكل الموجي للحزمة الأساسية في المرسل $u(t)$. وهنا يفترض أيضاً أن لا وجود للضجيج عبر القناة.

المشكلة عند وحدة كشف التعديل هي إذا استرداد الإشارات المرسل u_1, u_2, \dots من الشكل الموجي الذي تم استقباله $u(t) = \sum_k u_k p(t - kT)$ حدد المرحلة الوسطى من كشف التعديل PAM من خلال فاصل الإشارة الزمني T (تماماً كما في المعدل) والشكل الموجي $q(t)$ من نوع \mathcal{L}_2 . يقوم كاشف التعديل أولاً بترشيح (فلتر) الشكل الموجي المُستقبل باستخدام مرشح مع استجابة نبضية $q(t)$. ومن ثم أخذ عينات الخرج عند فترات زمنية متباعدة بقيمة T . بهذا فإن الشكل الموجي المُستقبل بعد الترشيح هو:

$$(8.6) \quad r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)q(t - \tau)d\tau$$

والعينات المُستقبلة هي $r(T), r(2T), \dots$

إن هدفنا هو اختيار $p(t)$ و $q(t)$ بحيث $r(kT) = uk$ من أجل كل k . وإذا ما تحقق هذا الهدف لجميع الخيارات من u_1, u_2, \dots عندئذ فإن نظام PAM المتضمن $p(t)$ و $q(t)$ ، لا يحوي تدخلاً بين الرموز. يمكن القول خلاف ذلك بأن التداخل بين الرموز موجود. يجب على القارئ أن يبرهن بأن $p(t) = q(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \text{sinc}(\frac{t}{T})$ هو الحل الوحيد.

إن مسألة اختيار المرشحات لتفادي التداخل الإثنائي تظهر في البداية وكأنها مصنعة إلى حد ما. أولاً، يقتصر شكل المُستقبل على مرشح ويليهِ وحدة أخذ العينات. يبين التمرين (4.6) أنه إذا كانت عملية الكشف لكل إشارة، محددة أو مفيدة بصورة خطية على الشكل الموجي الذي تم استقباله، عندئذ ذلك لن يكون هناك خسارة حقيقية بشكل عام عند زيادة تقييد العملية بحيث تصبح مؤلفة من مرشح وتليهِ وحدة أخذ العينات بتباعد زمني قدره T . وهذا لا يفسر تقييد الخطية.

في جميع الأحوال النقطة المصنعة الثانية هي إهمال الضجيج. وبالتالي إهمال التحديد (التقييد) الأساسي على المعدل البتي (نسبة عدد البتات). والسبب في طرح هذه المسألة المصنعة هو، أولاً إن تجنب التدخل يعتبر نقطة هامة في اختيار $p(t)$ ، وثانياً هناك حل بسيط وأنيق لهذه المسألة. يوفر هذا الحل أيضاً جزءاً منه عندما يأخذ الضجيج بعين الاعتبار.

كنا قد رأينا أن $u(t) = \sum_k u_k p(t - kT)$ وبالتالي ومن المعادلة (8.6) نستطيع الوصول إلى المعادلة التالية:

$$(9.6) \quad r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_k u_k p(\tau - T)q(t - \tau) d\tau$$

إذا افترضنا⁸⁹ أن $g(t) = p(t) * q(t) = \int p(\tau)q(t - \tau)d\tau$ وأن $g(t)$ من نوع \mathcal{L}_2 فيمكننا عند ذلك تبسيط المعادلة (9.6)

⁸⁹ بما يخص المجال الترددي في البحث فإنه ليس من الصعب إنشاء الطاقة اللانهائية للتابع $g(t)$ من التوابع $p(t)$ و $q(t)$ من نوع \mathcal{L}_2 . سوف نجد عند دراسة الضجيج أنه لا داعي لإنشاء التابع $g(t)$ ، لذلك سنهمل هذا الاحتمال.

لتصبح:

$$(10.6) \quad r(t) = \sum u_k g(t - kT)$$

إن هذا لا ينبغي أن يكون مفاجئاً. المرشحات $p(t)$ و $q(t)$ هما على التسلسل مع بعضهما بعضاً وبالتالي فإن $r(t)$ لا تعتمد على أن جزء معين من الترشيح قد تم في أحدهما وجزء آخر في الثاني. عند الأخذ بالاعتبار فيما بعد إضافة الضجيج في القناة فإن الاختيار الفردي لكل من $p(t)$ و $q(t)$ سيكون ذو أهمية.

لن يكون هناك تدخل بين الرموز إذا كان $r(kT) = u(t)$ من أجل كل k الذي يمثل عدداً صحيحاً، وأيضاً من المعادلة (10.6) يبقى ذلك مقبولاً إذا كان $g(0) = 1$ و $g(kT) = 0$ من أجل كل k غير الصفري. مع هذه الخاصية فإن الأشكال الموجية تعبر عن نايبويست المثالية، أو بتعبير أدق نايبويست المثالية مع الفاصل الزمني T .

على الرغم من أن نبضة الساعة عند المُستقبل تتأخر بقيمة محددة نسبة لما يناظرها في المرسل، ويمكن توليد كل إشارة uk في المرسل عند زمن محدد قبل kT ، فيجب أن تبقى $g(t)$ تحوي الخاصية التي تقول بأن $g(0)$ ينتهي إلى الصفر عندما $t < \tau$. كما ذكرنا سابقاً فإن نبضة الإرسال ذات التأخر المحدد $p(t)$ ، سيتم استبدالها بهدف أن تصل $g(t)$ إلى الصفر بشكل متسارع وذلك عندما $|t| \rightarrow \infty$. وهكذا فإن التابع $\text{sinc}(1/T)$ هو نايبويست مثالي مع فاصل زمني T ، ولكنه غير مناسب بسبب بطء وصوله إلى الصفر عندما $|t| \rightarrow \infty$. وكمثال بسيط آخر، فإن التابع $\text{rect}(t/T)$ يمثل تابع نايبويست مثالي مع فاصل زمني T ومن الممكن توليده مع قيمة تأخير محددة، ولكنه من الصعب تقريبه ليصبح حزمة أساسية محددة.

باختصار، فإن نرغب بإيجاد توابع $g(t)$ بحيث تكون نايبويست مثالية ولكن بنفس الوقت حزمة أساسية محددة تقريبية. يؤمن معيار نايبويست والذي سنتم مناقشته في الفقرة القادمة، مميزات تردد مفيدة لتابع نايبويست مثالي. تستخدم هذه المميزات لدراسة توابع نايبويست المثالية والتي هي حزمة أساسية محددة تقريبية ومحددة بالزمن أيضاً بصورة تقريبية.

3.6 معيار نايبويست

يتم تحديد خاصية نايبويست المثالية من خلال عينات الشكل الموجي $g(t)$ المتباعدة بقيمة T . هذا يوحي بأن النتائج حول منطقة التعرج من المفترض أن تكون نسبية. لنفترض أن $s(t)$ يعبر عن شكل موجي لحزمة أساسية محددة تم توليدها من خلال عينات $g(t)$ ، أي أن:

$$(11.6) \quad s(t) = \sum_k g(kT) \text{sinc}\left(\frac{t}{T} - k\right)$$

إذا كان $g(t)$ تابع نايبويست مثالياً فإن جميع الحدود في المعادلة السابقة تُلغى باستثناء عندما $k = 0$ عند ذلك $s(t) = \text{sinc}(t/T)$. بصورة مغايرة إذا كان $s(t) = \text{sinc}(t/T)$ ، عند ذلك فإن $g(t)$ يجب أن يكون تابع نايبويست مثالي. عند إيجاد تحويل فورييه للمعادلة (11.6) سنرى بأن $g(t)$ هو نايبويست مثالي إذا فقط إذا:

$$(12.6) \quad \hat{s}(f) = T \text{rect}(fT)$$

ومن نظرية التعرج:

$$(13.6) \quad \hat{s}(f) = \text{l. i. m.} \sum_m \hat{g}\left(f + \frac{m}{T}\right) \text{rect}(fT)$$

معيار نايبويست يمثل نتيجة الجمع بين المعادلتين (12.6) و (13.6).

نظرية 1.3.6 (معيار نايبويست) لنفترض أن $\hat{g}(f)$ يتوافق مع الشرط $\lim_{|f| \rightarrow \infty} |\hat{g}(f)| |f|^{1+\epsilon} = 0$ عندما $\epsilon > 0$ عند ذلك فإن عكس تحويل فورييه $g(t)$ للتابع $\hat{g}(f)$ هو نايبويست مثالي مع فاصل زمني T إذا فقط إذا $\hat{g}(f)$ يتوافق مع معيار نايبويست من أجل

T ، ويتم⁹⁰ إيجادها من المعادلة:

$$(14.6) \quad \text{l. i. m.} \sum_m \hat{g}(f + m/T) \text{rect}(fT) = T \text{rect}(fT)$$

البرهان: من خلال نظرية التدرج الزمني فإن الحزمة الأساسية التقريبية $s(t)$ في المعادلة (11.6) هو \mathcal{L}_2 . بشكل مماثل فإن تحويل فورييه $\hat{s}(f)$ يتوافق مع المعادلة (13.6). إذا كان $g(t)$ نايكويست مثالي، عند ذلك $s(t) = \text{sinc}(t/T)$. وهذا يعني أن $\hat{s}(f)$ من نوع \mathcal{L}_2 . يكافئ $T \text{rect}(fT)$ ، والذي بدوره يتوافق مع المعادلة (14.6). على العكس من ذلك، فإن توافق معيار نايكويست (14.6) يعني أن $\hat{s}(f) = T \text{rect}(fT)$. وهذا يقود إلى أن $s(t) = \text{sinc}(t/T)$ مما يعني أنه نايكويست مثالي.

هناك العديد من الخيارات من أجل $\hat{g}(f)$ تحقق العلاقة (14.6) ولكن الخيارات الأكثر أهمية هي تلك المحدودة في كل من الحزمة والزمن. نهتم على نحو خاص بالحالات التي يكون فيها $\hat{g}(f)$ محدد الحزمة على نحو صارم، والذي يعني، كما رأينا، أن $g(t)$ غير محدد الزمن على نحو صارم. وقبل استخدام هذه المرشحات، طبعاً، لا بد من تقطيعها لتكون محدودة الزمن على نحو صارم. من الغريب أن نبحت عن توابع محدودة الحزمة على نحو صارم ومحدودة الزمن على نحو تقريبي فيما المطلوب هو المعاكس، لكن السبب هو أن القيد الترددي هو الأكثر أهمية. أما القيد الزمني فهو عادة أكثر مرونة ويمكن فرضه بوصفه تقريب.

1.3.6 تناظر حافة الحزمة

تحدد قيمة حزمة نايكويست المرتبطة مع $g(t)$ التي تمثل نبضة PAM مع فاصل زمني T وفق العلاقة التالية: $W_b = 1/(2T)$. يمكن تحديد عرض النطاق⁹¹ الفعلي للحزمة الأساسية B_b كأصغر رقم بحيث $\hat{g}(f) = 0$ عندما $|f| > B_b$. نلاحظ هنا أنه إذا كان $\hat{g}(f) = 0$ عندما $|f| > W_b$ ، عندئذ فإن الطرف الأيسر من المعادلة (14.6) يساوي الصفر باستثناء عندما $m = 0$ ، لذلك فإن $\hat{g}(f) = T \text{rect}(fT)$. هذا يعني أن $B_b \geq W_b$ ، وتبقى المساواة صحيحة إذا وفقط إذا كان $g(t) = \text{sinc}(t/T)$. كما رأينا سابقاً، إذا كان W_b أصغر بكثير من B_b ، عند ذلك يمكن زيادة W_b ، بمعنى ازدياد معدل (نسبة) إرسال الإشارات R_s . لذلك يجب اختيار $g(t)$ بحيث تتجاوز قيمة B_b قيمة W_b بقليل. عملياً يجب أن نركز على $W_b \leq B_b < 2W_b$.

إن افتراضية B_b أصغر من $2W_b$ تعني أن $\hat{g}(f) = 0$ من أجل $|f| > 2W_b$ إذاً عندما $0 \leq f \leq W_b$ فإن $\hat{g}(f + 2mW_b)$ يمكن أن يكون غير صفري فقط عندما $m = 0$ و $m = -1$. وبالتالي فإن معيار نايكويست (14.6) في هذا التردد الموجب للفواصل T يصبح:

$$(15.6) \quad \hat{g}(f) + \hat{g}(f - 2mW_b) = T \quad \text{for} \quad 0 \leq f \leq W_b$$

بما أن $p(t)$ و $q(t)$ ذو قيمة حقيقية فهذا يعني أن $g(t)$ ذو قيمة حقيقية أيضاً، لذا

$$\hat{g}(f - 2mW_b) = \hat{g} * (f - 2mW_b)$$

عند تعويض هذه المعادلة في (15.6) مع افتراض أن $\Delta = f - W_b$ فإن (15.6) تصبح كما يلي:

$$T - \hat{g}(W_b + \Delta) = \hat{g} * (W_b - \Delta)$$

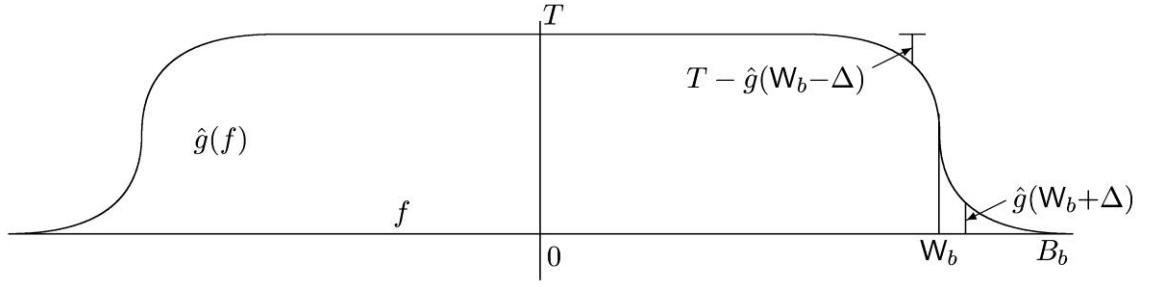
يبين الشكل (3.6) توضيحاً للمعادلة (15.6) بالحالة النموذجية مع افتراض أن $\hat{g}(f)$ حقيقي. في الحالة العامة يوضح الشكل الجزء

الحقيقي من $\hat{g}(f)$ ، وحيث يتوافق الجزء التخيلي مع كون:

$$\mathfrak{F}\{\hat{g}(W_b + \Delta)\} = \mathfrak{F}\{\hat{g}(W_b - \Delta)\}$$

⁹⁰ يمكن الملاحظة بأن $\sum_m \hat{g}(f + \frac{m}{T})$ هو دوري لذلك فإن $\text{rect}(fT)$ يمكن حذفه من كلا الطرفين في (14.6). إن القيام بذلك من شأنه أن يجعل الحد في الوسط لا معنى له وسيقتد أيضاً معنى النظرية.

⁹¹ قد يكون من الأفضل أن نطلق على هذا بتصميم عرض النطاق. حيث إن بعد التجزئة (الاقطاع) الضروري للتأخير المحدد، فإن التابع الترددي الناتج سيكون غير صفري في كل مكان تقريباً. مع ذلك يتم إهمال الطاقة خارج B_b ، إذا كانت قيمة التأخير كبيرة. يبين التمرين (9.6) بأنه يجب التعامل مع عمليات التقريب بعناية.



الشكل 3.6: توضيح تناظر حافة الحزمة من أجل $\hat{g}(f)$ ذو قيمة حقيقية: من أجل كل Δ ، إذا كان $0 \leq \Delta \leq W_b$ فإن
 $\hat{g}(W_b + \Delta) = T - \hat{g}(W_b - \Delta)$. عند تدوير القسم من المنحني والذي فيه $f \geq W_b$ 180 درجة مئوية حول النقطة $(W_b, T/2)$
 يساوي القسم الأخر من المنحني من أجل $f \leq W_b$.

نرى في الشكل (3.6) بأن B_b يجب أن يتوافق مع المتراحة $B_b \geq W_b$ وذلك لإبطال تأثير التداخل بين الرموز (التداخل الرمزي). وكذلك أيضاً تخفيف تجاوز B_b لعرض نطاق نايكويست W_b . يُطلق على هذا التجاوز مصطلح معامل الانحدار $92^{\text{roll off factor}}$ ويساوي $1 - (B_b - W_b)$ ، ويُعبر عنه عادة كنسبة مئوية. لذلك فإن قيمة معامل الانحدار في الشكل للتابع $\hat{g}(f)$ هي تقريباً 30%. إن مرشحات PAM عادة وبشكل عملي تحوي تحويلات cosine الترددية المتزايدة التي تعطي بالعلاقات التالية من أجل أي قيمة α بين

0 و 1:

$$(17.6) \quad \hat{g}_\alpha(f) = \begin{cases} T, & 0 \leq |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T} \\ T \cos^2 \left[\frac{\pi T}{2\alpha} \left(|f| - \frac{1-\alpha}{2T} \right) \right], & \frac{1-\alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0, & |f| \geq \frac{1+\alpha}{2T} \end{cases}$$

تبيّن العلاقة التالية تحويل فورييه العكسي للتابع $\hat{g}_\alpha(f)$ (انظر التمرين (8.6)):

$$(18.6) \quad g_\alpha(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi \alpha t}{T}\right)}{1 - 4\alpha^2 t^2/T^2}$$

والذي يتناقص بشكل تقريبي ليصبح $1/t^3$ ، بالمقارنة مع $1/t$ من أجل $\text{sinc}(t/T)$. على وجه الخصوص وعندما $\alpha = 1$ فإن $\hat{g}_\alpha(f)$ غير صفري ضمن المجال من $-1/T$ إلى $2W_b = 1/T$ ومعظم طاقة $\hat{g}_\alpha(t)$ تقع بين $-T$ و T . يتم استخدام α عملياً بنسبة 5-10% ينتقل الناتج $\hat{g}_\alpha(t)$ إلى الصفر بسرعة أكثر من $\text{sinc}(t/T)$ مع ازدياد $|t|$. إن نسبة $\hat{g}_\alpha(t)$ إلى $\text{sinc}(t/T)$ تعبر عن التأخير المتناسب طردياً مع $1/\alpha$.

إن الدافع لاستخدام شكل cosine المرفوع هو أنّ $\hat{g}(f)$ يجب أن يكون ناعماً لكي يتناقص $g(t)$ بسرعة مع الزمن، ولكن $\hat{g}(f)$ يجب أن يتناقص من T عند القيمة $(1-\alpha)W_b$ إلى الصفر عند القيمة $(1+\alpha)W_b$ ؛ وكما يظهر في الشكل (3.6)، فإن تابع جيب التمام المرفوع ببساطة يدور انقطاعات الخطوة في التابع $\text{rect}(f/2W_b)$ بطريقة تحافظ على معيار نايكويست فيما تجعل $\hat{g}(f)$ مستمراً باشتقاق مستمر، وبالتالي تضمن تناقص $g(t)$ على نحو تقاربي مع $1/t^3$.

2.3.6 اختيار $\{p(t - kT); k \in \mathbb{Z}\}$ كمجموعة متعامدة معيارياً

توضح الفقرة السابقة اختيار $\hat{g}(f)$ كحل وسط بين α وعملية التنعيم، رهنأ بتناظر حافة (درجة) المجال. كما يبيّن الشكل (3.6) فليس هناك تركيز إضافي جدي، لضمان أن يكون $\hat{g}(f)$ حقيقياً وغير سالب (لماذا نترك $\hat{g}(f)$ يصبح سالباً أو خيالياً لجعل الانتقال من T

⁹² إن اشتراط وجود α بقيمة صغيرة هو نتيجة المتطلب على نبضة الإرسال $p(t)$ ، أي على عرض النطاق الفعلي لقناة الإرسال، بدلاً من التركيز على $g(t) = p(t) * q(t)$. إن الاشتراط الضمني هنا هو أن $\hat{p}(f) = 0$ عندما $\hat{g}(f) = 0$. سنرى لاحقاً بأنه يتم اختيار كل منهما عادة بسعة متساوية، مع الضمان بأن لكل منهما له قيمة α نفسها.

إلى صفر ناعماً؟). بعد اختيار $\hat{g}(f) \geq 0$ تبقى مسألة اختيار مرشح الإرسال $p(t)$ ، ومرشح الاستقبال $q(t)$ رهناً بتحقيق العلاقة $\hat{p}(f) \hat{q}(f) = \hat{g}(f)$. عند دراسة ضجيج غوص الأبيض لاحقاً سنرى بأنه يجب اختيار $\hat{q}(f)$ بحيث يساوي $\hat{p}^*(f)$ ⁹³ لذا يكون لدينا:

$$(19.6) \quad |\hat{p}(f)| = |\hat{q}(f)| = \sqrt{\hat{g}(f)}$$

يمكن اختيار طور $\hat{g}(f)$ بطريقة عشوائية، ولكن هذه الطريقة يجب أن تحقق $\hat{q}(f) = \hat{g}^*(f)$. تحقيق الشرط $\hat{p}(f) \hat{q}(f) = \hat{g}(f) \geq 0$ يعني بالتالي تحقيق $\hat{q}(f) = \hat{p}^*(f)$. بالإضافة إلى ذلك، إذا كان $p(t)$ حقيقي عندئذ $\hat{p}(-f) = \hat{p}^*(f)$ ، والذي يحدد الطور من أجل f السالب وفقاً للطور العشوائي عندما $f > 0$. من المناسب هنا أن تكون الحالة أكثر عمومية والسماح للتابع $p(t)$ أن يصبح عقدياً. سنبرهن فيما يلي النظرية الهامة التالية:

نظرية 2.3.6 (الإزاحات المتعامدة معيارياً): إذا كان $p(t)$ تابع من نوع L_2 بحيث $\hat{g}(f) = |\hat{p}(f)|^2$ يلبى معيار نايكويست من أجل T . لذا فإن $\{p(t - kT); k \in \mathbb{Z}\}$ عبارة عن مجموعة توابع متعامدة معيارياً، وبالتالي فإن $|\hat{p}(f)|^2$ يحقق معيار نايكويست.

البرهان: إذا كان $q(t) = p^*(-t)$ ، عندها فإن $g(t) = p(t) * q(t)$ ، وهذا يعني:

$$(20.6) \quad g(kT) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau) q(kT - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau) p^*(\tau - kT) d\tau$$

إذا كان $\hat{g}(f)$ يحقق معيار نايكويست، فإن $g(t)$ يمثل نايكويست المثالي والمعادلة (6.20) تساوي الصفر من أجل كل عدد صحيح $k \neq 0$ ، وتساوي الواحد من أجل $k = 0$. عند إزاحة متحول التكامل بقيمة jT ، حيث j عدد صحيح في المعادلة (6.20)، سنرى أيضاً أن $\int p(\tau - jT) p^*(\tau - (k + j)T) d\tau = 0$ عندما $k \neq 0$ وتساوي 1 عندما $k = 1$. لذلك $\{p(t - kT); k \in \mathbb{Z}\}$ هي مجموعة متعامدة معيارياً. على العكس من ذلك إذا افترضنا أن $\{p(t - kT); k \in \mathbb{Z}\}$ مجموعة متعامدة معيارياً، عندئذ (6.20) تساوي الصفر عندما $k \neq 0$ وتساوي الواحد عندما $k = 0$. لذلك فإن $g(t)$ نايكويست مثالي و $\hat{g}(f)$ توافق معيار نايكويست.

مع الأخذ بعين الاعتبار خاصية إزاحة التعامد المعيارية من أجل $p(t)$ فإن الشكل الموجي لإشارة PAM المرشلة وهي $u(t) = \sum_k u_k p(t - kT)$ يعبر عن توسع التعامد المعيارية. من الملاحظ بأنه يتم إنجاز $u(t)$ من خلال عملية الترشيح باستخدام $q(t)$ ومن ثم تُؤخذ العينات عند الزمن kT . يُطلق على المرشح $q(t)$ بالمرشح التوافقي مع $p(t)$ ؛ وسنناقش هذه المرشحات فيما بعد عند التطرق إلى الضجيج.

لاحظ أننا حددنا النبضة $p(t)$ لتحتوي على طاقة واحدة. ليس ثمة ضياع في التعميم هنا، حيث إن إشارات الدخل $\{u_k\}$ يمكن تقييسها اعتبارياً وليس ثمة داع لأخذ معامل تقييس اعتباطي في كلا الموضعين.

عندما يكون $\hat{g}(f) = |\hat{p}(f)|^2$ ، فإن عرض النطاق الفعلي لكل من $\hat{g}(f)$ و $\hat{q}(f)$ و $\hat{p}(f)$ متساو ونرمز له B_b . لذا إذا كان $B_b < \infty$ ، فنحن نرى أن كل من $p(t)$ و $q(t)$ لا يتحقق إلا مع تأخير لانهاية، والذي يعني أن كلاهما يجب تجزئتهما (اقتطاعهما). بما أن $q(t) = p^*(-t)$ فيجب اقتطاعهما من أجل t السلبية والإيجابية. نحن نفترض بأن الاقتطاع عند قيمة كبيرة للتأخر ولذا فإن خطأ الاقتطاع يُهمل. من الملاحظ أن التأخير الناتج عن كل من مرشح المرسل والمستقبل (من الزمن الذي يبدأ فيه تكوين $u_k p(t - kT)$ في المرسل، إلى الزمن عندما يتم أخذ عينات في المستقبل) يساوي إلى ضعف المدة الزمنية لـ $p(t)$.

3.3.6 العلاقة بين PAM وترميز المنبع التماثلي

كان التركيز الرئيس في تعديل PAM هو تحويل تتابع إشارات ذات تباعد T إلى شكل موجي وبالمثل فإن المرحلة الأولى لترميز المنبع التماثلي في كثير من الأحيان تعمل على تحويل الشكل الموجي إلى تتابع عينات ذات تباعد T . الفرق الرئيس هو أنه في تعديل PAM نتحكم على مدى PAM بنبضة $p(t)$ وبالتالي التحكم ببعض فئات الأشكال الموجية. نحن نتعامل في ترميز المنبع مع أي فئة من الأشكال الموجية

⁹³ يسمى التابع $p(t)$ والذي يتوافق مع المعادلة (6.19)، بالجذر التربيعي لنايكويست، بالرغم من أنه يمثل السعة في التحويل والذي يمثل الجذر التربيعي لتحويل نبضة نايكويست المثالي.

والتي تحدد نقطة اهتمامنا.

في كلا النظامين فإن عرض النطاق الاسمي هو $W_b = 1/(2T)$ ، بينما يمكن تعريف B_b بعرض النطاق الفعلي في الحزمة الأساسية للأشكال الموجية. يعتبر $B_b \leq W_b$ شرط ضروري في حالة ترميز المنبع، لتقريب أخذ العينات: $\sum_k u(kT) \text{sinc}(\frac{t}{T} - k)$ وذلك لاسترداد الشكل الموجي $u(t)$ بشكل مثالي. تُستخدم نظرية التعرج في هذه الحالة لتحليل الخطأ التربيعي عندما $B_b > W_b$. بالمقابل في حالة PAM فإن الشرط الضروري لكاشف PAM لاسترداد تتابع PAM الأولي هو $B_b \geq W_b$. تُستخدم نظرية التعرج عندما $B_b > W_b$ ، لتحقيق وتحسين النبضة $g(t)$ والتي تمثل نايكويست المثالي. هناك خيار جدير بالاعتبار في مثل هذه النبضة، حيث يتم اختياره باستخدام مساهمات من كل من $f < W_b$ و $f > W_b$. أخيراً كنا قد رأينا أنه يمكن اختيار نبضة الإرسال $p(t)$ في PAM بحيث تشكل ازاحتها بتباعد T مجموعة التعمد المعيارية. إن التتابع من نوع sinc لها هذه الخاصية، بالإضافة إلى ذلك فإن كثيراً من الأشكال الموجية والتي فيها عرض النطاق أكبر بقليل، لها نفس الخاصية أيضاً ولكنها تتضاءل أسرع بكثير مع الزمن t .

4.6 التعديل: الحزمة الأساسية إلى حزمة التمرير وبالعكس

كانت مناقشة PAM في الفقرتين السابقتين، تركز على تحويل التتابع للإشارات الحقيقية بتباعد T ، إلى شكل موجي حقيقي عرض النطاق فيه B_b أكبر قليلاً من عرض نطاق نايكويست $W_b = 1/2T$. سيتم التركيز في هذه الفقرة على تحويل الشكل الموجي للحزمة الأساسية إلى الشكل الموجي لحزمة التمرير والمناسب للوسط الفيزيائي، والقيود التنظيمية، وتجنب إرسال حزم أخرى.

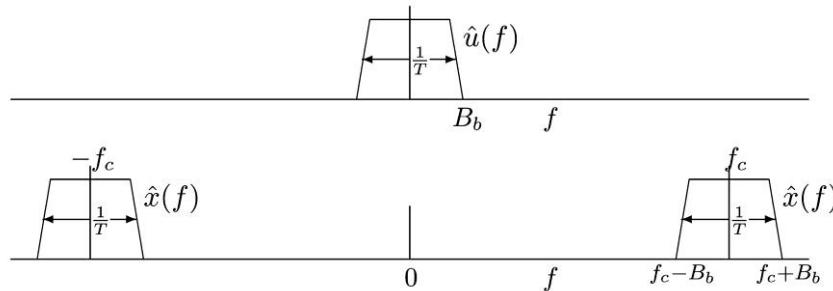
1.4.6 التعديل السعوي ذو عرض الحزمة المضاعفة

الغاية من تعديل الشكل الموجي للحزمة الأساسية $u(t)$ في PAM إلى حزمة مجال ذي تردد أعلى حول الحامل f_c ، هو ببساطة إزاحة (f) \hat{u} ترددياً إلى $\hat{u}(f) e^{2\pi i f_c t}$. لذا إذا كان $\hat{u}(f)$ صفراً باستثناء الحالة $-B_b \leq f \leq B_b$ ، فإن مقدار الإزاحة سيكون صفراً ما عدا الحالة $f_c + f_c \leq f \leq B_b + f_c$. إن ذلك لا يعمل تماماً لأنه يؤدي إلى شكل موجي عقدي، في حين أن الأشكال الموجية الحقيقية هي التي تُرسل فعلياً. وهكذا يتم ضرب $u(t)$ بالمرافق العقدي للتابع $\exp(2\pi i f_c t)$ ، بمعنى أنه ينتج عن ذلك الشكل الموجي لحزمة المجال التالي:

$$(6.21) \quad x(t) = u(t)[e^{2\pi i f_c t} + e^{-2\pi i f_c t}] = 2u(t)\cos(2\pi i f_c t)$$

$$(6.22) \quad \hat{x}(f) = \hat{u}(f - f_c) + \hat{u}(f + f_c)$$

كما هو مبين في الشكل (6.4) فإن $u(t)$ تنتقل ترددياً صعوداً بقيمة f_c وكذلك هبوطاً بنفس القيمة. بما أن $x(t)$ يجب أن يكون حقيقياً لذا $[-B_b + f_c, B_b + f_c]$ صعوداً وهبوطاً بمقدار $[B_b - f_c, -B_b - f_c]$. لذا (مع افتراض أن $f_c > B_b$) فإن عرض مجال الترددات غير الصفري الذي تشغله $x(t)$ يساوي إلى ضعف عرض مجال الترددات الذي تشغله $u(t)$.



الشكل 4.6: تمثيل المجال الترددي للشكل الموجي للحزمة الأساسية $u(t)$ والمزاح صعوداً إلى حزمة التمرير بقيمة الحامل f_c . نلاحظ بأن عرض النطاق للحزمة الأساسية B_b في $u(t)$ قد تضاعف في عرض النطاق لحزمة التمرير في $x(t)$ ليصبح $B = 2B_b$.

يُعرف عرض النطاق في أنظمة الاتصالات بمجال الترددات الموجبة المُستخدمة في الإرسال. بما أن الأشكال الموجية المُرسلة حقيعية، فيتم تحديد الجزء السالب من تردد هذه الأشكال الموجية من خلال الجزء الموجب ولكن لا يتم حسابه. وهذا يتفق مع استخدامنا للحزمة الأساسية فيما مضى، حيث تعبر B_b عن عرض النطاق للشكل الموجي للحزمة الأساسية $u(t)$ في الشكل (6.4)، ومع استخدامنا الجديد للأشكال الموجية لحزمة التمرير بحيث $B = 2B_b$ ، فهي تعبر عن عرض النطاق في $\hat{x}(f)$.

إن نظام تعديل حزمة التمرير الموضح رياضياً في (6.21) يسمى بالتعديل السعوي ذي الحزمة المضاعفة. إن هذا المصطلح لم يأت من مجال التردد السالب حول $-f_c$ ولا من مجال التردد الموجب حول f_c ، ولكن بدلاً من ذلك فقد أتى من $[f_c - B_b, f_c + B_b]$ كحزمتين أساسيتين، الحزمة الجانبية العليا $[f_c, f_c + B_b]$ الناتجة من المركبات الترددية الموجبة في $u(t)$ ، والحزمة الجانبية الدنيا $[f_c - B_b, f_c]$ الناتجة عن المركبات الترددية السالبة في $u(t)$. بما أن $u(t)$ حقيقي فإن هاتين الحزمتين بمثابة زوائد ويمكن إعادة تشكيلها بطريقة أو بأخرى. يعتبر التعديل ذو الحزمة المضاعفة مسرفاً إلى حد كبير في عرض نطاق حيث إن نصف المجال عبارة عن زوائد. غالباً ما تكون الزوائد ذات فائدة كإضافة للحد من الضجيج، ولكن يتم تشكيل أمثال تلك الزوائد باستخدام الترميز الرقمي.

الحل الأبسط والأكثر استخداماً⁹⁴ لهذا النوع من عرض النطاق هو التعديل السعوي الترابعي QAM والذي ستنم مناقشته في الفقرة القادمة. يُنظر إلى حزمة التمرير PAM وبشكل مناسب كحالة خاصة من QAM، وبالتالي ستنم مناقشة كشف تعديل PAM من حزمة التمرير إلى الحزمة الأساسية في نفس الوقت عند دراسة كشف تعديل QAM.

6.5 التعديل السعوي الترابعي

إن نظام QAM مماثلاً لنظام PAM باستثناء أن الشكل الموجي للحزمة الأساسية $u(t)$ في QAM عقدي. لذلك فإن الشكل الموجي العقدي QAM يُزاح بمقدار $\exp(2\pi if_c t)$ يتم تحويل هذا الشكل الموجي العقدي إلى حقيقي من إرساله، وذلك بإضافة المرافق العقدي له. المعادلة التالية تمثل الشكل الموجي لحزمة التمرير الناتج عن هذه العملية:

$$x(t) = u(t)e^{2\pi if_c t} + u^*(t)e^{-2\pi if_c t} \quad (23.6)$$

يجدر الملاحظة بأن الشكل الموجي لحزمة التمرير PAM في (6.21) هو حالة خاصة والتي فيها $u(t)$ حقيقي. يمكن كتابة الشكل الموجي لحزمة التمرير $x(t)$ في (6.23) ضمن العلاقات المكافئة التالية:

$$x(t) = 2\Re\{u(t)e^{2\pi if_c t}\} \quad (24.6)$$

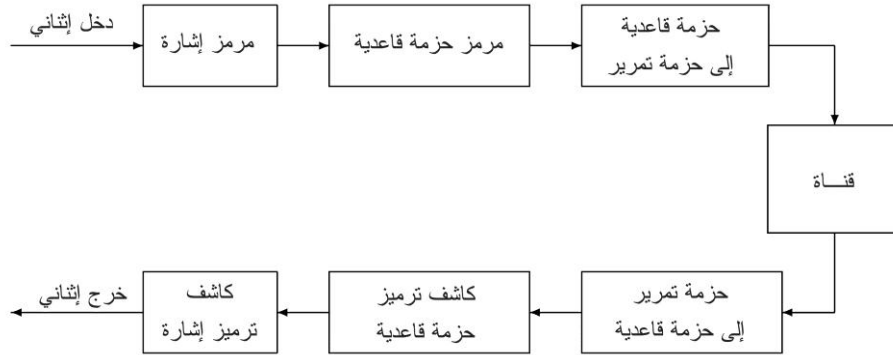
$$x(t) = 2\Re\{u(t)\} \cos(2\pi if_c t) - 2\Im\{u(t)\} \sin(2\pi if_c t) \quad (25.6)$$

العامل 2 في كل من (6.24) و(6.25) هو عامل قياس عشوائي. لذلك يتركه بعض المؤلفون جانباً، لذلك يتطلب عاملاً قيمته 1/2 في (6.23). وآخرون يستبدلون العامل 2 بالجذر التربيعي له وبهذا يتطلب $1/\sqrt{2}$ في (6.23). يسبب هذا العامل القياسي (المُختار) التباساً إضافياً عند التطرق إلى الطاقة في الأشكال الموجية، والقياس المستخدم في هذه الحالة هو $\|u\|^2 = 2\|x\|^2$. تُحل المشكلة باستخدام العامل القياسي (الجذر التربيعي للعدد 2)، ولكنه ينتج عن ذلك العديد من المشاكل الأخرى، وليس أقلها هو عدد غير عادي من جذور 2 في المعادلات.

في بعض الحالات فإن القياس مسألة غير هامة. نقدم فيما تبقى من هذه الفقرة شرحاً أكثر تفصيلاً عن QAM، وأيضاً العديد من النقاط حول PAM. يحوي معدل QAM (انظر الشكل 6.5) ثلاث مراحل كما في معدل PAM. تقوم المرحلة الأولى بتحويل تتابع البتات إلى تتابع الإشارات العقدي، وبعد ذلك تحويل تتابع العقدي إلى شكل موجي عقدي للحزمة الأساسية، وأخيراً تحويل الأخير إلى شكل موجي حقيقي لحزمة التمرير. وليس من المستغرب أن ينجز كاشف التعديل عكس تلك العمليات، حيث يقوم أولاً بتحويل لحزمة التمرير المستقبلة إلى الشكل الموجب للحزمة الأساسية، بعد ذلك استرجاع تتابع الإشارات، وأخيراً استرجاع الأرقام الثنائية. سنقوم بمناقشة كل مرحلة من هذه المراحل

⁹⁴ النظام البديل هو تعديل الحزمة الجانبية الوحيدة. في هذه الحالة يتم ترشيح (فصل) إحدى الحزمتين العليا أو الدنيا خارجاً، لذلك فإن عرض نطاق الإرسال يتناقص إلى النصف. يستخدم هذا النظام بشكل واسع في الاتصالات التماثلية ولكن من الصعب إنجازه في الاتصالات الرقمية بالمقارنة مع QAM.

تباعاً.



الشكل 5.6: معدل وكاشف تعديل QAM

1.5.6 مجموعة إشارة QAM

يحدد تتابع بتات الدخل بمعدل (نسبة) قيمته R بت في كل ثانية b/s وتتحول لبتات b إلى تتابع الإشارات العقدية uk التي تم اختيارها من مجموعة الإشارة (الأبجدية، التحشد) A بكمية متساوية إلى $M = |A| = 2^b$. وبالتالي فإن معدل الإشارة هو: $R_s = R/b$ إشارات في كل ثانية، وفاصل الإشارة هو $T = 1/R_s$ ثانية.

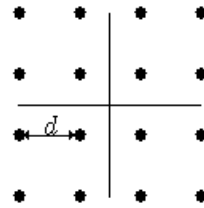
إن الإشارات المرسله uk في حالة QAM، عبارة عن أرقام عقدية بدلاً من الأرقام الحقيقية. تمثل مجموعة إشارة QAM القياسية QAM - $(M' \times M')$ حيث إن $M = (M')^2$ ، حاصل ضرب مجموعتي PAM - M' ، أي أن:

$$A = \{ \{a' + ia'' \} \mid a' \in A', a'' \in A' \}$$

حيث إن:

$$A' = \{ -d(M' - 1)/2, \dots, -d/2, d/2, \dots, d(M' - 1)/2 \}$$

تتألف مجموعة الإشارة A في هذه الحالة من مصفوفة مربعة من $M = (M')^2 = 2^b$ نقاط إشارة تقع بشكل متناظر حول المركز، كما هو موضح أدناه عندما $M = 16$.



يُرمز للمسافة الصغرى بين بعدي نقطتين بالرمز d . أيضاً إن مستوى الطاقة لكل إشارة ذات بعدين والتي يرمز لها E_s هو ضعف مستوى الطاقة لكل بعد:

$$E_s = \frac{d^2[(M')^2 - 1]}{6} = \frac{d^2[M - 1]}{6}$$

هناك العديد من الطرائق لترتيب نقاط الإشارة فضلاً عن الطريقة المعروضة أعلاه. مثال ذلك في ASK - M (مفتاح إزاحة الطور) تتألف نقاط الإشارة من نقاط عددها M ومتباعدة بالتساوي على دائرة واقعة في المركز. وهكذا فإن 4-QAM = 4-PSK. من الملاحظ أن نقاط الإشارة على الدائرة تصبح قريبة جداً من بعضها بعضاً عندما تكون قيمة M كبيرة، لذلك ما يستخدم نظام PSK في حالة M هذه. من ناحية أخرى فإن PSK لها بعض المزايا العملية بسبب سعة الإشارة الثابتة والمنتظمة.

كما في حالة PAM فإن احتمال خطأ الترميز تابع بشكل أساسي للمسافة الصغرى d . ليس من المستغرب، أن تكون E_s خطية في طاقة الإشارة للشكل الموجي لحزمة التمرير. يقتصر الهدف من طاقة الإشارة في الأنظمة اللاسلكية على الحفاظ على طاقة البطارية وتحقيق

المتطلبات التنظيمية. بينما يقتصر في الأنظمة السلوكية على إبطال التشويش الداخلي الحاصل بين الأسلاك المتجاورة، وأيضاً لإبطال التأثيرات اللاخطية.

لهذه الأسباب مجتمعة، فمن المستحسن أن يتم اختيار تحدد الإشارة بحيث تعمل على تقليل E_s من أجل قيم معينة لكل من d و M . هناك نتيجة بسيطة وهي أنه يمكن الحصول على E_s بقيمة أصغر من الشكل الثنائي، عند استخدام الشكل السداسي لنقاط الإشارة وذلك عندما M كبيرة جداً وقيمة ثابتة للمسافة الصغرى. للأسف إن البحث عن مجموعة إشارة مثالية لتقليل E_s من أجل قيم M العملية، هي مشكلة سيئة ولكن عملية التقليل لها بعض الخصائص الهامة.

لن نصرف المزيد من الوقت على هذا إلا أننا سنستعرض بعض التمارين الخاصة بذلك وسنفترض فقط مجموعة إشارة QAM القياسية $M' \times M'$.

2.5.6 تعديل وكشف تعديل الحزمة الأساسية في QAM

يتم تحديد معدل الحزمة الأساسية في QAM من خلال الشكل الموجي العقدي $p(t)$ من نوع L_2 والفاصل الزمني للإشارة T . يقوم التابع الزمني المتقطع u_k لنقاط الإشارة العقدية، بالتعديل السعوي للنبضة الأساسية $p(t)$ بإزاحات زمنية تساوي إلى $\{p(t - kT)\}$ ، لتحقيق إشارة مرسله عقدية كما يلي:

$$(26.6) \quad u(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k p(t - kT)$$

كما في حالة PAM، يمكننا أن نختار $p(t)$ بحيث تكون $\text{sinc}(t/T)$ ، ولكن وللأسباب نفسها كما في السابق، فيجب أن نتضاءل $p(t)$ مع ازدياد $|t|$ بشكل أسرع من التابع sinc . وهذا يعني أن $\hat{p}(f)$ يجب أن يكون تابعاً مستمراً ينتقل إلى الصفر بشكل متسارع ولكن ليس أنياً، وذلك عندما تزداد قيمة t التي تتجاوز ما بعد $1/2T$. كما في PAM فنجد أن $W_b = 1/2T$ تعبر عن عرض النطاق الاسمي للحزمة الأساسية في معدل QAM بينما B_b فهي عرض النطاق الفعلي.

نفترض حالياً بأن عملية التحويل إلى حزمة التميرير ومن ثم إلى قناة الإرسال والتحويل المعاكس إلى الحزمة الأساسية، عملية مثالية، بحيث يكون ناتج خرج معدل الحزمة الأساسية $u(t)$ عند دخل كاشف تعديل الحزمة الأساسية. يتحقق كاشف تعديل الحزمة الأساسية من خلال الفاصل الزمني T (كما في المعدل) والشكل الموجي $q(t)$ من نوع L_2 . يقوم كاشف التعديل بترشيح (فلتر) $u(t)$ بواسطة $q(t)$ ومن ثم أخذ عينات الخرج المتباعدة زمنياً بقيمة T . تبين العلاقة التالية خرج المرشح:

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) q(t - \tau) d\tau$$

نلاحظ بأن العينات المستقبلية هي $r(T), r(2T), \dots$ وهكذا. وهذا مطابق لما رأيناه في حالة كاشف تعديل PAM باستثناء استبدال الإشارات الحقيقية بإشارات عقدية. يمكن تمثيل الخرج $r(t)$ كما في بيانا سابقاً وفق ما يلي:

$$r(t) = \sum_k u_k g(t - kT)$$

حيث $g(t)$ تمثل الطي بين $p(t)$ و $q(t)$. كما رأينا سابقاً فإن $u_k = r(kT)$ إذا كان $g(t)$ نايكويست مثالي، بمعنى عندما $g(0) = 1$ و $g(kT) = 0$ من أجل جميع الأعداد k غير الصفرية.

يبقى برهان نظرية نايكويست (6.3.1) صحيحاً سواء كان $g(t)$ صحيحاً أم لا. للأسباب التي تم شرحها مسبقاً، عادة ما يكون $\hat{g}(f)$ حقيقياً ومتماثلاً (كما في توابع cosine) وهذا يعني أن $g(t)$ هو أيضاً حقيقي ومتماثل.

أخيراً وكما ناقشنا في حالة PAM، يتم عادة اختيار $\hat{g}(f)$ بحيث يحقق الشرط $|\hat{p}(f)| = \sqrt{\hat{g}(f)}$. إن اختيار $\hat{p}(f)$ على هذا النحو لا يحدد طور $\hat{p}(f)$ ، وبالتالي فإن $\hat{p}(f)$ قد يكون حقيقياً أو عقدياً. على كل حال يتم اختيار $\hat{p}(f)$ وفقاً للتابع $|\hat{g}(f)|^2$ الذي يحقق شرط معيار نايكويست، حيث يتم تشكيل مجموعة من التوابع المتعامدة معيارياً نتيجة الإزاحة الزمنية $\{p(t - kT)\}$ بهذا الاختيار أيضاً عرض النطاق للحزمة الأساسية لكل من $u(t)$ و $p(t)$ و $g(t)$ سيكون متساوياً. يحوي كل منها عرض نطاق اسمي للحزمة الأساسية بمقدار $1/2T$

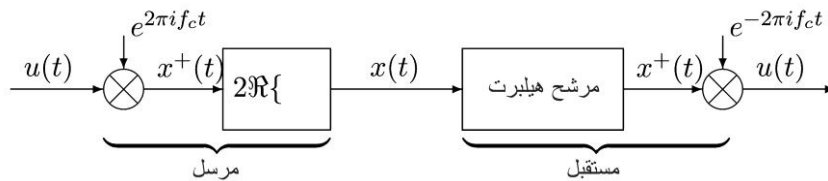
وعرض نطاق فعلي للحزمة الأساسية يتجاوز $1/2T$ إلى حد معين. كما في PAM يجب تجزئة (اقتطاع) $p(t)$ و $q(t)$ زمنياً لتحقيق تأخير محدد. لذا لن تكون المرشحات الناتجة محددة المجال، ويُنظر إلى ذلك على أنه خطأ تنفيذي لا داعي لذكره. بالخاصة إن تعديل الحزمة الأساسية في QAM افتراضياً هو نفسه كما في تعديل PAM. بالطبع إن مجموعة الإشارة في QAM عقدية ويمكن أن تكون النبضة المعدلة $p(t)$ ، عقدية ولكن نتائج نايكويست حول تجنب التداخل بين الرموز تبقى بدون تغيير.

3.5.6 QAM: تحويل الحزمة الأساسية إلى حزمة تمرير وبالعكس

نناقش فيما يلي تعديل الشكل الموجي $u(t)$ للحزمة الأساسية في QAM العقدية، على الشكل الموجي لحزمة التمرير $x(t)$. يمكن الرجوع إلى العلاقات البديلة للإشارة $x(t)$ في كل من (6.23) و (6.24) و (6.25) وكذلك التمثيل الترددي في الشكل (6.4). كما في PAM فإن $u(t)$ تحوي عرض نطاق اسمي للحزمة الأساسية بمقدار $W_b = 1/2T$ ، بينما عرض النطاق الفعلي B_b يتجاوز W_b إلى حدود معينة. الشكل الموجي المقابل $x(t)$ لحزمة التمرير يحوي عرض نطاق اسمي بمقدار $W = 2W_b = 1/T$ وعرض نطاق فعلي $B = 2B_b$. سنفترض دائماً أن $B/2 < f_c$. نسترجع أن كل من $x(t)$ و $u(t)$ هما حالة مثالية وتقريبية من الأشكال الموجية الواقعية للحزمة الأساسية والمرسلة. لذا فإن هذه الأشكال الموجية الواقعية يجب إن تحوي على تأخر محدد وبالتالي عرض نطاق غير محدد (لانهاي)، ولكن يُفترض أيضاً أن مدة التأخير كبيرة بما فيها الكافية، بحيث يمكن تجاهل الخطأ التقريبي.⁹⁵ ينتج عن افتراض $B/2 < f_c$ تحديد $u(t) \exp(2\pi i f_c t)$ بالترددات الموجبة و $u(t) \exp(-2\pi i f_c t)$ بالترددات السالبة. لذا فإن تحويل فورييه $\hat{u}(f - f_c)$ لا يتداخل مع $\hat{u}(f + f_c)$.

كما في PAM إن عملية التعديل من الحزمة الأساسية إلى حزمة التمرير تمر عبر مرحلتين. أولاً ينتقل $u(t)$ ترددياً صعوداً بمقدار f_c لينتج الشكل الموجي لحزمة التمرير الحقيقية $x^+(t) = u(t)e^{2\pi i f_c t}$ ومن ثم يتحول $x^+(t)$ إلى الشكل الموجي لحزمة التمرير $x(t) = [x^+(t)]^* + x^+(t)$.

نفترض من الآن بأنه يتم إرسال $x(t)$ إلى المستقبل بدون ضجيج وبدون تأخير. من حيث المبدأ فمن الممكن تعديل $x(t)$ المستقبلية بطريقة معكوسة للمرحلتين السابقتين بحيث تتحول إلى الحزمة الأساسية. بمعنى أن $x(t)$ تتحول أولاً إلى الشكل الموجي العقدية لحزمة التمرير الموجبة $x^+(t)$ ، ومن ثم يجب إزاحة $x^+(t)$ ترددياً إلى الأدنى بمقدار f_c . يمكن استخلاص $x^+(t)$ رياضياً بشكل مبسط من خلال استخدام المرشح العقدي $h(t)$ كما يلي: $\hat{h}(f) = 0$ عندما $f < 0$ و $\hat{h}(f) = 1$ عندما $f > 0$. يسمى هذا المرشح بمرشح هيلبرت. يجب أن نلاحظ بأن $h(t)$ ليس تابعاً من نوع L_2 ، ولكن من الممكن تحويله إلى نوع L_2 جعل $\hat{h}(f)$ مساوياً إلى الصفر باستثناء حالة حزمة التمرير الموجبة $[-\frac{B}{2} + f_c, \frac{B}{2} + f_c]$ والمساوية إلى الواحد. نستطيع بعد ذلك استخلاص $u(t)$ من $x^+(t)$ بسهولة بواسطة الإزاحة ترددياً. يبين الشكل (6.6) المراحل العملية للتحويل من $u(t)$ إلى $x(t)$ ومن ثم العكس.



الشكل 6.6: تحويل الحزمة الأساسية إلى حزمة التمرير وبالعكس.

⁹⁵ يبين التمرين 11.6 بأنه عند تعطيل هذا الافتراض فإنه لا يمكن استرجاع $u(t)$ بشكل تام من $x(t)$ ، حتى بدون وجود الضجيج. يُفترض بأن المركبات الترددية المهمة والخاصة بالقسم المقطوع من $u(t)$ ، خارج $B/2$ ، هي خطأ مهم في كشف التعديل.

4.5.4 تنفيذ QAM

من وجهة نظر عملية التنفيذ فإن الشكل الموجي للحزمة الأساسية $u(t)$ عادة ما يتم تنفيذه ضمن شكلين موجيين حقيقيين، $\Re\{u(t)\}$ و $\Im\{u(t)\}$ يتم تعديلها إلى حزمة التمرير باستخدام عملية الضرب بالحامل ذي الطور المماثل والحامل ذي الطور غير المماثل:

$$x(t) = 2\Re\{u(t)\} \cos(2\pi f_c t) - 2\Im\{u(t)\} \sin(2\pi f_c t)$$

هناك عدة طرائق أخرى لإجراء عمليات التنفيذ المحتملة، مثال ذلك من خلال معطيات السعة والطور في $u(t)$. هنا نجد أن معادلة التردد الموجية $x^+(t) = u(t) e^{2\pi f_c t}$ هي عملية ضرب لأشكال موجية عقدية التي تتطلب أربع عمليات ضرب حقيقية بدلاً من عمليتي ضرب كما رأينا أعلاه للحصول على $x(t)$ مباشرة. نجد هنا أن الانتقال من $u(t)$ إلى $x^+(t)$ ومن ثم إلى $x(t)$ يمثل حالة ذكية ولكنها ليست سهلة التنفيذ. يتم تحقيق الشكلين الموجيين للحزمة الأساسية $\Re\{u(t)\}$ و $\Im\{u(t)\}$ إذا كانت النبضة المعدلة $p(t)$ أيضاً حقيقية.

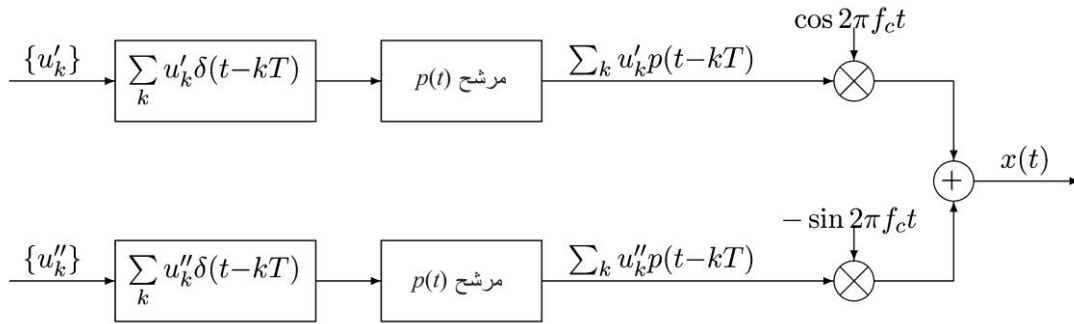
$$\Re\{u(t)\} = \sum_k \Re\{u_k\} p\left(\frac{t}{T} - k\right)$$

$$\Im\{u(t)\} = \sum_k \Im\{u_k\} p\left(\frac{t}{T} - k\right)$$

عند اعتبار $u'_k = \Re\{u_k\}$ و $u''_k = \Im\{u_k\}$ فإن الشكل الموجي لحزمة التمرير المرسله يصبح كما يلي:

$$(27.6) \quad x(t) = 2 \cos(2\pi f_c t) \left(\sum_k u'_k p(t - kT) \right) - 2 \sin(2\pi f_c t) \left(\sum_k u''_k p(t - kT) \right)$$

إذا كانت مجموعة إشارة QAM تمثل مجموعة QAM القياسية، عندئذ فإن $\sum_k u'_k p(t - kT)$ و $\sum_k u''_k p(t - kT)$ تمثلان أنظمة الحزمة الأساسية المرابطة على التوازي. يتم تحويلها إلى حزمة التمرير باستخدام التعديل ذي الحزمة المضاعفة بواسطة الحوامل المربعة $\cos 2\pi f_c t$ و $\sin 2\pi f_c t$. وبعد ذلك يتم جمعها، كما هو مبين في الشكل (6.7). يطلق على هذه الطريقة بالتعديل ذي الحزمة المضاعفة والحامل المربع⁹⁶ (DSB-QC).



الشكل 7.6: تعديل DSB - QC

لقد رأينا أنه يمكن استرداد $u(t)$ من $x(t)$ باستخدام مرشح هيلبرت يليه الإزاحة ترددياً هبوطاً. تكمن الطريقة الأسهل تنفيذاً في عملية ضرب $x(t)$ بكل من $\cos 2\pi f_c t$ و $-\sin 2\pi f_c t$ باستخدام الخواص المثلثية $2\cos^2(\alpha) = 1 + \cos(2\alpha)$ و $2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \sin(2\alpha)$ و $2\sin^2(\alpha) = 1 - \cos(2\alpha)$ ، حيث يمكننا كتابة ما يلي:

$$(28.6) \quad x(t) \cos(2\pi f_c t) = \Re\{u(t)\} + \Re\{u(t)\} \cos(4\pi f_c t) + \Im\{u(t)\} \sin(4\pi f_c t)$$

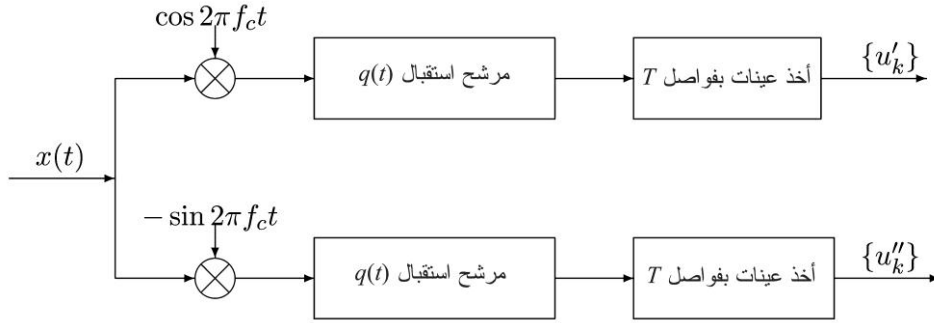
$$(29.6) \quad -x(t) \sin(2\pi f_c t) = \Im\{u(t)\} - \Re\{u(t)\} \sin(4\pi f_c t) + \Im\{u(t)\} \cos(4\pi f_c t)$$

⁹⁶ مصدر هذه المصطلحات هو نظام التعديل التماثلي، حيث يتم تعديل شكلين موجيين حقيقيين على التوالي باستخدام كل من الحامل cosine والحامل sine. عادة تُرسل مركبة حامل إضافية والتي يمكن من خلالها استرداد الطور والسعة، وكما سنرى لاحقاً بأن الحامل الإضافي هنا غير ضروري.

تفسيراً لذلك نلاحظ بأنه عند إجراء عملية الضرب⁹⁷: $\cos(2\pi f_c t) = 1/2 \exp(2\pi f_c t) + 1/2 \exp(-2\pi f_c t)$ فكلاهما يقوم بإزاحة $x(t)$ ترددياً صعوداً وهبوطاً بقيمة f_c وهكذا فإن قسم التردد الموجب في $x(t)$ يحقق زيادة في فترة الحزمة الأساسية والفترة الواقعة حول $2f_c$ بينما قسم التردد السالب يحقق زيادة بمقدار $-2f_c$. إن ترشيح فترات التردد المضاعفة تعطي $\Re\{u(t)\}$. إن تفسير عملية الضرب بالجيب \sin مشابهة تماماً لما ذكرناه آنفاً.

وللشرح بطريقة أخرى، فيمكننا الرجوع إلى أن $x(t)$ هو تابع حقيقي ويتألف من حزمة حول التردد f_c وأخرى حول التردد f_c . نلاحظ أيضاً في كل من (6.28) و(6.29) بأنهما تحويان جزءاً حقيقياً وجزءاً تخيلياً في $x(t) e^{-2\pi f_c t}$ والتي تزيح قسم التردد الموجب في $x(t)$ هبوطاً باتجاه الحزمة الأساسية وتزيح قسم التردد السالب هبوطاً باتجاه الحزمة حول $-2f_c$. يتم في منهج هيلبرت ترشيح الحزمة الجانبية الدنيا قبل إزاحة التردد، بينما هنا يحدث الترشيح بعد إزاحة التردد؛ بوضوح أكثر فإن كلا النهجين متكافئ.

لقد أفترض من خلال ما سبق بأن f_c أكبر من عرض النطاق للحزمة الأساسية في $u(t)$. إذا كان ذلك غير صحيح، فعند ذلك وكما هو مبين في التمرين (6.11) فإنه لا يمكن استرداد $u(t)$ من $x(t)$ بأية طريقة كانت. لنفترض الآن بأن مرشح (فلتر) تعديل الحزمة الأساسية تابع حقيقي ويتم استخدام مجموعة إشارة QAM القياسية. وأن $\Re\{u(t)\} = \sum u'_k p(t - kT)$ و $\Im\{u(t)\} = \sum u''_k p(t - kT)$ هما تعديل PAM للحزمة الأساسية على التوازي. نفترض أيضاً بأن مرشح المستقبل $q(t)$ قد تم اختياره بحيث $\hat{g}(f) = \hat{p}(f) \hat{q}(f)$ يلبي نظرية نايكويست وأن جميع المرشحات تحوي عرض نطاق واحد $f_c < B_b$. عندئذ ومن (6.28) إذا تم ترشيح $x(t) \cos(2\pi f_c t)$ باستخدام $q(t)$ ، فمن الملاحظ بأن المرشح $q(t)$ سيحذف المركبات الواقعة حول $2f_c$. بينما بقية المركبات $\Re\{u(t)\}$ فيتم فيها أخذ العينات لاسترداد تتابع الإشارة الحقيقي u'_1, u''_2, \dots وهذا بالإضافة إلى التحليل المقابل للجيب $x(t) \sin(2\pi f_c t)$ كما هو مبين في مستقبل DSB-QC في الشكل (6.8). نلاحظ أن استخدام المرشح $q(t)$ يلغي الحاجة إلى استخدام مرشح هيلبرت.



الشكل 8.4: كشف تعديل DSB - QC

إن وصف عملية كشف التعديل المذكورة آنفاً يتجاهل وجود الضجيج. كما تم شرحه في الفقرة (2.3.6) إذا كان اختيار $p(t)$ بحيث $\{p(t - kT); k \in \mathbb{Z}\}$ تمثل مجموعة متعامدة معيارياً (أي أن $|\hat{p}(f)|^2$ تحقق معيار نايكويست) عندئذ فإن مرشح المستقبل يجب أن يحقق $q(t) = p(-t)$. سنرى لاحقاً بأنه وعند وجود ضجيج غوص الأبيض، فإن ما طرحناه آنفاً يعبر عن الشكل المثالي.

6.6 فضاء الإشارة ودرجات الاستقلالية

باستخدام PAM، فإن الإشارات الحقيقية يمكن أن تتولد عند فواصل زمنية متباعدة بقيمة T وتُرسل من خلال عرض نطاق الحزمة الأساسية بمقدار أقل بقليل من $W_b = 1/2T$. وهكذا على مدى الفاصل التقريبي الطويل T_0 وعرض النطاق القريب بالقيمة من W_b ، فمن الممكن إرسال $2T W_b$ باستخدام PAM.

عند استخدام QAM يمكن للإشارات العقدية أن تتولد عند فواصل زمنية متباعدة بقيمة T وتُرسل بواسطة عرض نطاق حزمة التمرير بمقدار أكثر بقليل من $W = 1/T$. وهكذا وعلى مدى الفاصل الزمني الطويل، وعرض النطاق القريب بالقيمة من W ، يمكن إرسال WT_0 من

⁹⁷ ينتج عن الإزاحة الترددية صعوداً بعض الارتباك، حيث إن المعادلة التالية $x(t) e^{-2\pi f_c t} = x(t) \cos(2\pi f_c t) - ix(t) \sin(2\pi f_c t)$ تمثل فقط الإزاحة الترددية هبوطاً. ما يحدث أن $x(t) \cos(2\pi f_c t)$ عبارة عن الجزء الحقيقي من $x(t) e^{-2\pi f_c t}$ ولذلك نحتاج إلى حدود تردد موجبة للتوازن مع حدود التردد السالبة.

الإشارات العقدية، وبالتالي $2W_0T_0$ من الإشارات الحقيقية باستخدام QAM.

إن ما جاء أعلاه يصف PAM عند الحزمة الأساسية و QAM عند حزمة التمرير. للحصول على مقارنة أفضل بين النظامين، نعتبر أنه قد تم تجزئة عرض النطاق الطويل والكلية للحزمة الأساسية (W_0) إلى حزم تمرير عددها m ، وعرض النطاق في كل منها يساوي إلى W_0/m . باستخدام QAM كل حزمة، نستطيع بصورة تقريبية إرسال $2W_0T_0$ إشارات حقيقية ضمن الفاصل الزمني الطويل T_0 . نستطيع مع استخدام PAM وعلى مدى الحزمة W_0 الكلية ومرة أخرى، إرسال $2W_0T_0$ إشارات حقيقية خلال T_0 . من حيث المبدأ فإننا نرى أن QAM والحزمة الأساسية PAM وفي حالة عرض نطاق كلي متساو، هما متكافئان من حيث عدد درجات الاستقلالية التي من الممكن استخدامها لإرسال الإشارات الحقيقية. كما ذكرنا سابقاً فإن QAM يوفر مرونة أكثر من PAM حيث يمكن استخدامه من أجل أي حزم ترددية مختارة. إننا نتذكر عندما بحثنا في الإشارات الجيبية المقطعة (المجزأة) بفواصل زمني T وإشارات sinc الجيبية بفواصل زمني T ، كنا قد وجدنا أن الأشكال الموجية الحقيقية التي تشغل فواصل زمني $(-T_0/2, T_0/2)$ وفواصل ترددية $(-W_0, W_0)$ ، تحوي نحو $2W_0T_0$ من درجات الاستقلالية. بمعنى آخر فإن هذه التقنيات البسيطة تُستخدم وبشكل أولي كل درجات الاستقلالية المتوفرة في حزم معينة. إن استخدام نظرية نايكويست هنا أضاف إلى فهمنا لأشكال الموجة المحددة زمنياً وترددياً "على نحو خاص". أي، أنه يمكننا البدء بعائلة من التوابع محدودة الحزمة ضمن عامل تناقص ما ومن ثم البحث عن عوامل التناقص الصغيرة. ستزوّد مناقشة الضجيج في الفصلين القادمين، فهماً أفضل لدرجات الاستقلالية وفقاً لحدود الزمن والتردد الأساسية.

1.6.6 المسافة والتعامد

أظهرت الفقرات السابقة كيفية تعديل الشكل الموجي العقدي للحزمة الأساسية $u(t)$ في QAM الشكل الموجي الحقيقي لحزمة التردد $x(t)$ وكيفية استرداد $u(t)$ من $x(t)$ عند المستقبل. كما تمت مناقشة تجميع الإشارات التي تعمل على تقليل الطاقة من أجل مسافة صغرى معينة. أخيراً فإن استخدام الشكل الموجي المعدل $p(t)$ مع الإزاحات المتعامدة معيارياً، أدى إلى ربط فرق الطاقة بين اثنين من الأشكال الموجية للحزمة الأساسية، مثلاً: $u(t) = \sum u_k p(t - kT)$ و $v(t) = \sum u_k p(t - kT)$ وفرق الطاقة في نقاط الإشارة من خلال

$$\|u - v\|^2 = \sum_k |u_k - v_k|^2$$

سنركز الآن على فرق الطاقة هذا في حزمة التمرير. إن الطاقة $\|x\|^2$ في الشكل الموجي لحزمة التمرير $x(t)$ تساوي إلى ضعف ما يقابله في الشكل الموجي للحزمة الأساسية $u(t)$. لنفترض بعد ذلك بأن $x(t)$ و $y(t)$ عبارة عن شكلين موجيين لحزمة التمرير الناجمين عن الشكلين الموجيين للحزمة الأساسية $u(t)$ و $v(t)$ على التوالي.

$$x(t) - y(t) = 2 \Re \{u(t)e^{2\pi i f_c t}\} - 2 \Re \{v(t)e^{2\pi i f_c t}\} = 2 \Re \{[u(t) - v(t)]e^{2\pi i f_c t}\}$$

لذا فإن $x(t) - y(t)$ عبارة عن شكل موجي لحزمة التمرير المقابل للقيمة $u(t) - v(t)$ إذاً،

$$\|x(t) - y(t)\|^2 = 2 \|u(t) - v(t)\|^2$$

يمكن القول إنه في حالة QAM، و PAM، تتم المحافظة على المسافات بين الأشكال الموجية والتي تنتقل من الحزمة الأساسية إلى حزمة التمرير. وهكذا يتم الحفاظ على المسافات التي تنتقل من الإشارات إلى الأشكال الموجية للحزمة الأساسية إلى الأشكال الموجية لحزمة التمرير وبالعكس. سنرى لاحقاً بأنه يتم تحديد احتمال الخطأ الذي يسببه الضجيج وبشكل أساسي، من خلال المسافات بين الأشكال الموجية لحزمة تمرير المنبع. يتعلق احتمال الخطأ هذا بكل من اختيار تجميع الإشارة والترميز المتقطع الذي يسبق تحويل المعطيات إلى إشارات. تعتبر المسافة عبر التعديل وإلى حزمة التمرير وبالعكس، جانباً حاسماً من وجهة نظر فراغ (حيز) الإشارة في الاتصالات الرقمية، حيث تعطي صورة مركزة عملية على أن الأشكال الموجية عند الحزمة الأساسية وحزمة التمرير، عبارة عن عناصر ذات صلة بالفراغات الناتجة داخلي L_2 . للأسف هناك مشكلة رياضية من الممكن التطرق إليها.

تشكل مجموعة الأشكال الموجية لحزمة التمرير، فراغ داخلي عقدي، بينما تشكل مجموعة الأشكال الموجية لحزمة التمرير، فراغاً داخلياً

حقيقياً. إن عملية التحويل $x(t) = \Re\{u(t)e^{2\pi ifct}\}$ ليست خطية، بمعنى، على سبيل المثال $iu(t)$ لا تتحول إلى $ix(t)$ في حالة $u(t)$ لا تساوي إلى الصفر. في الواقع إن فكرة التحويل الخطي لا تحوي معنى كبيراً، حيث إن التحويل ينتقل من \mathcal{L}_2 العقدي إلى \mathcal{L}_2 الحقيقي والصفة مختلفة في كلا الفراغين.

مثال 1.1.6 كمثال هام، نفترض أن نبضة التعديل QAM عبارة عن شكل موجي حقيقي $p(t)$ مع إزاحات متعامدة وعتارياً بتباعد T . وأن مجموعة الأشكال الموجية العقدية للحزمة الأساسية التي تغطيها المجموعة المتعامدة عتارياً $\{p(t - kT); k \in \mathbb{Z}\}$ تحوي الشكل $\sum_k u_k p(t - kT)$ حيث إن كل k من uk هو عنصر عقدي. كما في (6.27) تتحول هذه المجموعة عند حزمة التمرير إلى:

$$\sum_k u_k p(t - kT) \rightarrow \sum_k 2\Re\{u_k\} p(t - kT) \cos(2\pi fct) - 2 \sum_k \Im\{u_k\} p(t - kT) \sin(2\pi fct)$$

يتحول كل تابع من $p(t - kT)$ من الحزمة الأساسية، إلى الشكل الموجي لحزمة التمرير وتصبح $2p(t - kT) \cos(2\pi fct)$. إن مجموعة التتابع $\{p(t - kT) \cos(2\pi fct); k \in \mathbb{Z}\}$ ليست كافية لتغطي فراغ (حيز) الشكل الموجي المعدل، ولكن من الضروري إضافة مجموعة أخرى $\{p(t - kT) \sin(2\pi fct); k \in \mathbb{Z}\}$ ، كما هو مبين في التمرير (15.6)، فإن المجموعة المشتركة للشكلين الموجيين هي مجموعة متعامدة عتارياً وكل منهما ذو طاقة مقدارها 2.

هناك طريقة أخرى لدراسة هذا المثال وهي الملاحظة بأن تعديل تابع الحزمة الأساسية $u(t)$ إلى تابع موجب لحزمة التمرير، $x^+(t) = u(t) e^{2\pi fct}$ هو أسهل في فهم أن مجموعة التعامد العتارية $\{p(t - kT); k \in \mathbb{Z}\}$ قد تم تعديلها إلى مجموعة التعامد العتارية $\{p(t - kT) e^{(2\pi fct)}; k \in \mathbb{Z}\}$ ، والتي يمكن أن يُنظر إليها على أنها تغطي فراغ الأشكال الموجية العقدية لحزمة تمرير المنبع ذات التردد الموجب. ثم أن هناك حاجة إلى مجموعة إضافية من الأشكال الموجية المتعامدة عتارياً $\{p(t - kT) e^{-2\pi fct}; k \in \mathbb{Z}\}$ وذلك لتغطية الأشكال الموجية الحقيقية لحزمة تمرير المنبع. عندئذ سنرى أن سلسلة sine و cosine هي ببساطة طريقة أخرى للتعبير عن ذلك. تعتبر جميع المعاملات في سلسلة صياغة كل من cosine، sine بأنها حقيقية، بينما في الصيغ الأسية لكل حد، هناك معامل حقيقي وآخر عقدي لكل حد.

سيكون من الأسهل فهم تأثير الضجيج عند صياغة sine، cosine. شاهدنا في المثال أعلاه، أنه ينتج عن كل تابع متعامد عتارياً تابعان حقيقيان متعامدان عتارياً عند حزمة التمرير. يُنظر إلى ذلك من خلال نقاش درجات الاستقلالية والذي يبين أن هذا الأمر لا مفر منه بغض النظر عن نوع مجموعة التتابع المتعامدة عتارياً والمستخدم عند الحزمة الأساسية. بالنسبة إلى عرض نطاق اسمي (W) لحزمة التمرير، فهناك درجات استقلالية عددها $2W$ في كل ثانية، في الشكل العقدي لحزمة المنبع الأساسية، وهذا يعني أن هناك درجتين من الاستقلالية لكل شكل موجي للحزمة الأساسية والتعامد عتارياً. نجد أيضاً في حالة حزمة التمرير، درجتين حقيقتين من الاستقلالية في كل ثانية، ولكن مع امتداد متعامد عتاري حقيقي، فهناك درجة حقيقية واحدة فقط لكل شكل موجي متعامد عتارياً. وبالتالي يجب أن يكون هناك شكلان موجيان حقيقيان متعامدان عتارياً لحزمتي تمرير وذلك لكل شكل موجي عقدي متعامد عتارياً للحزمة الأساسية.

لقد تم أعلاه تعميم استخدام sine و cosine بطريقة لطيفة في حالة مجموعة تحوي لأعلى التعيين على توابع متعامدة عتارياً للحزمة الأساسية. ينتج عن كل تابع عقدي في مجموعة الحزمة الأساسية تابعان حقيقيان في مجموعة حزمة التمرير المتعامدة. هذا ما يعبر عنه على وجه التحديد في النظرية التالية والتي سيتم برهانها في التمرير 6.16.

نظرية 1.6.6: إذا افترضنا أن $\{\theta_k(t); k \in \mathbb{Z}\}$ مجموعة متعامدة عتارياً محددة بمجال تردد $[-B/2, B/2]$. ونفترض أيضاً f_c أكبر من $B/2$ وفي حالة $k \in \mathbb{Z}$ نفترض:

$$\psi_{k,1}(t) = \Re\{2\theta_k(t)e^{2\pi ifct}\}$$

$$\psi_{k,2}(t) = \Im\{-2\theta_k(t)e^{2\pi ifct}\}$$

إن المجموعة $\{\psi_{k,j}; k \in \mathbb{Z}, j \in \{1,2\}\}$ عبارة عن مجموعة توابع متعامدة. علاوة على ذلك إذا كان $u(t) = \sum_k u_k \theta_k(t)$ فإن التابع المقابل لحزمة التمرير $x(t) = 2\Re\{u(t) e^{2\pi ifct}\}$ يعطى بالعلاقة التالية:

$$x(t) = \sum_k \Re \{u_k\} \psi_{k,1}(t) + \Im \{u_k\} \psi_{k,2}(t)$$

إن ذلك يوفر لنا طريقة عامة لتحويل أي مجموعة متعامدة معيارياً عند الحزمة الأساسية إلى مجموعة متعامدة معيارياً ذات الصلة عند حزمة التمرير بوساطة تابعين حقيقيين عند حزمة التمرير المقابلة لكل تابع عند الحزمة الأساسية. إن هذه النتيجة لا تقتصر على نوع معين من التعديل، وبهذا تسمح لنا بتقديم عرض مفصل حول فراغ الإشارة عند الحزمة الأساسية وحزمة التمرير.

7.6 استرداد الحامل والطور في أنظمة QAM

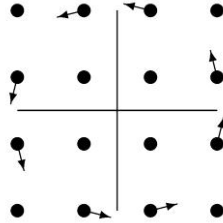
لنتصور في مستقبل QAM أن تحويل حزمة التمرير إلى الحزمة الأساسية، عبارة عن عملية ضرب التردد الموجب في حزمة التمرير بالتابع الجيبي العقدي $\exp(-2\pi i f_c t)$. إذا كان المستقبل لديه خطأ طوري $\phi(t)$ تقديراً في طور الحامل المرسل، عندئذ بدلاً من ذلك يتم ضرب الشكل الموجي الوارد بالتابع $e^{-2\pi i f_c t + i\phi(t)}$. نفترض في هذا التحليل بأن الزمن المرجعي لدى المستقبل معروف تماماً، بحيث يتم أخذ عينات الخرج المرشحة في التوقيت الصحيح. لذا فإن الافتراض هو أن المذبذب في المستقبل يتطابق تماماً مع المذبذب في المرسل. من الملاحظ عادة أن المطال في تردد الحامل أكبر متعرض النطاق للحزمة الأساسية، ولذا يعتبر الخطأ الصغير في الزمن هاماً بالنسبة للطور ولكن ليس بالنسبة لأخذ العينات. سيؤثر خطأ الطور على الإشارة العقدية الصحيحة للحزمة الأساسية $u(t)$ من خلال $\phi(t)$ ؛ بمعنى أن الإشارة المستقبلية للحزمة الأساسية $r(t)$ ستكون:

$$r(t) = e^{i\phi(t)} u(t)$$

إذا كان $\phi(t)$ يتغير ويبطء بالنسبة إلى استجابة مرشح (فلتر) المستقل $q(t)$ ، عندها فإن عينات خرج المرشح $\{r(kT)\}$ ستكون:

$$r(kT) \approx e^{i\phi(kT)} u_k$$

كما هو مبين في الشكل (6.9) يوصف خطأ الطور $\phi(t)$ أنه يأتي بشكل مترابط. هذا الطور المترابط يجعل عملية استرداد الحامل في أنظمة QAM سهلة.



الشكل 9.6: دوران نقاط التجمع من خلال خطأ الطور

كما نرى من الشكل، إذا كان خطأ الطور (الصفحة) صغيراً بما فيه الكفاية، ومجموعة النقاط مفصولة عن بعضها بعضاً جيداً، عندها فمن الممكن تصحيح خطأ الطور من خلال الانتقال إلى أقرب نقطة في الإشارة وضبط طور الحامل وفقاً لذلك. هناك نوعان من العوامل المعقدة هنا. الأول هو أننا لم نتخذ الضجيج بالحسبان حتى الآن. عندما تكون الإشارة المستقبلية $y(t)$ عبارة عن $x(t) + n(t)$ ، فإن خرج جامع العينات بتباعد T لا يعبر عن الإشارات الأصلية $\{u_k\}$ ، وإنما هو نسخة ملوثة بالضجيج. المشكلة الثانية تكمن في حالة ظهور خطأ كبير في الطور، والذي لا يمكن تصحيحه. مثال ذلك في الشكل (6.9)، إذا كان $\phi(t) = \pi/2$ ، عندها حتى وبدون الضجيج، فستكون العينات المستقبلية دائماً بالمحاذاة مع الإشارات من التجمع (لكن بالطبع ليست الإشارات المرسله).

1.7.6 تتبع الطور بوجود الضجيج

تعتبر مشكلة اتخاذ القرار أو كشف الإشارات $\{u_k\}$ من العينات المستقبلية $\{r(kT)\}$ بوجود الضجيج، هي الموضوع الرئيس في الفصل الثامن. مع ذلك فإننا نضيف هنا مسألة مركبة من كشف الإشارات ومن ثم تتبع وبالتالي التخلص من خطأ الطور. لحسن الحظ تنفصل مشكلة اتخاذ القرار وإلى حد كبير عن تتبع خطأ الطور والتخلص منه. تعتبر المذبذبات المستخدمة لتوليد الحامل في كل من المعدل والكاشف، مستقرة نسبياً وتتغير الأطوار نسبياً مع بعضها بعضاً ببطء شديد، وهكذا سيكون خطأ الطور مع أي نوع من التتبع المعقول، صغيراً جداً، وبالتالي يمكن الكشف عن إشارات المعطيات من العينات المستقبلية تقريباً كما لو كان خطأ الطور صفراً. سيبقى الفرق بين العينات المستقبلية وإشارة المعطيات التي تم كشفها، غير صفري، ويرجع ذلك أساساً إلى الضجيج وجزئياً إلى خطأ الطور. وهكذا فإن النهج العام في اتخاذ القرار على إشارات المعطيات كما لو أن خطأ الطور صفراً، ومن ثم إجراء تغييرات بطيئة في الطور بناء على معدل أخذ العينات لعدد من المرات، يسمى هذا النهج استرداد الحامل بالقرار الموجه. من الملاحظ أنه إذا تتبعنا الطور كما لو أن أخطاء الطور قد ظهرت، فنحن نتتبع الحامل في كل من التردد والطور.

نفترض وفي طريقة القرار الموجه، أن العينة المستقبلية $r(kT)$ تُستخدم لاتخاذ قرار d_k على نقطة الإشارة المرسلية u_k . أيضاً نفترض وبدرجة احتمال عالية أن $d_k = u_k$. عند ذلك فإن الخطأ الظاهري للطور في العينة k th، يساوي إلى ناتج الفرق بين طور $r(kT)$ وطور d_k . إن استخدام أي طريقة لتغذية الخطأ الظاهري للطور عكسياً إلى المولد الجيبي للتابع $\exp(-2\pi i f_c t + i\phi(t))$ ، بحيث تخفف ولو ببطء الخطأ الظاهري للطور، ستؤدي إلى الوصول إلى نظام جيد لاسترداد الحامل.

في إحدى الطرائق المتداولة، يتم اعتبار التغذية العكسية الجزء التخليبي من $d_k^* r(kT)$. إذا كانت تمثل زاوية الطور من d_k إلى $r(kT)$ ، عندئذ:

$$r(kT)d_k^* = |r(kT)| |d_k| e^{i\phi_k}$$

بمعنى عندما تكون ϕ_k صغيرة فإن الجزء التخليبي هو $|r(kT)| |d_k| \sin \phi_k \approx |r(kT)| |d_k| \phi_k$. يمكن أن تكون طريقة استرداد الحامل بالقرار الموجه، والمعتمدة على مثل هذه التغذية العكسية، قوية جداً حتى في ظل وجود تشويه كبير وأخطاء طور أولية. في حالة الحلقة المقفلة للطور من الدرجة الثانية لاسترداد الحامل، يتبين بأنه يمكن استرداد تردد الحامل f_c أيضاً.

2.7.6 أخطاء الطور الكبيرة

إن المشكلة مع طريقة استرداد الحامل بالقرار الموجه، وكذلك مع العديد من الطرائق الأخرى، هي أن الطور المسترد يمكن أن يأخذ أي قيمة. وتبدو للنمط المستقبل (النمط المؤلف من تتابع من العينات المستقبلية) بأنها "مقبولة". كما يظهر في الشكل 6.9 فإن مجموعة الإشارة QAM - $(M \times M)$ تحوي أربعة أجزاء متماثلة وأخطاء طور قيمتها 90° أو 180° أو 270° لا يمكن كشفها. تُحل هذه المشكلة بواسطة استخدام طرائق الترميز التفاضلي التي ترسل جزء الطور (الترابيقي) من معلومات الإشارة على أنه تغير في الطور من الإشارة السابقة بدلاً من اعتباره الطور المطلق. وثمة نهج آخر يهدف إلى إعادة تزامن النظام من خلال الإرسال المتكرر لبعض النماذج المعروفة من الإشارات. وكثيراً ما يُستخدم هذا النهج الأخير في الأنظمة اللاسلكية حيث نجد أن الخبو (التضاؤل الجزئي) يسبب أحياناً في تلاشي تزامن الطور.

8.6 ملخص التعديل وكشف التعديل

استخدم هذا الفصل فراغ الإشارة التي تم التطرق إليها في الفصلين الرابع والخامس، لدراسة تحويل تتابعات الدخل الثنائية عند المعدل إلى الأشكال الموجية لإرسالها عبر القناة. يلخص الشكل 6.1 هذه العملية، تحويل البتات إلى إشارات، ثم الإشارات إلى أشكال موجية للحزمة الأساسية، ومن ثم إلى أشكال موجية لحزمة التمرير. يقوم كاشف التعديل بعملية عكسية، بالانتقال من أشكال موجية لحزمة التمرير إلى أشكال موجية للحزمة الأساسية ثم إلى إشارات ومن ثم إلى بتات. وهذا يقسم عملية التعديل إلى ثلاث طبقات (مراحل) والتي يمكن دراستها أكثر أو أقل بشكل مستقل.

تم عبر هذا الفصل التطرق بشكل مفصل إلى PAM و QAM، حيث إن كلا النظامين يستخدم على نطاق واسع، على اعتبارهما من الطرائق المفضلة التي يمكن تطبيقها على نحو واسع.

تهدف عملية التحويل من الأرقام الثنائية إلى الإشارات إلى توزيع التتابع الثنائي الوارد إلى شرائح عددها b من البتات. ثم يتم تحويل مجموعة من $M = 2^b$ الحاوية على شرائح عددها n إلى تجمع من نقاط الإشارة عددها M في \mathbb{R}^m أو C^m وذلك بالنسبة لقيمة معينة من m ، حيث إن مركبات نقاط الإشارة وبعدها مساو إلى m ، سوف يتم استخدامها كمعاملات في توسيع (امتداد) متعامد لتوليد أشكال موجية، إن الهدف هو اختيار تجمع إشارة بمعدل صغير من الطاقة ولكن مع مسافة كبرى بين كل زوج من النقاط. تعد PAM مثلاً على ذلك حيث إن فراغ الإشارة هو \mathbb{R}^1 و QAM أيضاً مثلاً آخر فراغ الإشارة فيها C^1 . إن التحويل القياسي هو نفسه لكلا النوعين. لا يعتبر ذلك حالة مثالية من حيث تقليل معدل الطاقة من أجل تباعد نقطي بالقيمة الصغرى، ولكن كلاهما يستخدم عالمياً لبساطتهما وقربهما من المثالية.

تختار عملية تحويل الإشارات إلى أشكال موجية للحزمة الأساسية في PAM، شكل موجي ثابت، $p(t)$ ومن ثم تقوم بتعديل تتابع الإشارات u_1, u_2, \dots إلى شكل موجي للحزمة الأساسية: $\sum_j u_j p(t - jT)$. إن أحد الأهداف في اختيار $p(t)$ هو أن يكون قادراً على استرداد التتابع u_1, u_2, \dots من الشكل الموجي المستقبل. وهذا يتطلب من مرشح (فلتر) الخرج $q(t)$ ، والذي تم أخذ العينات فيه عند كل T من الثواني، أن يسترد u_1, u_2, \dots . لقد حددت معيارية نايكويست الخصائص التي تتطلب من ناتج الضرب $\hat{g}(f) = \hat{p}(f) \hat{q}(f)$ ، أن يحقق تجنب مشكلة تداخل الرموز. الهدف من اختيار $\hat{g}(f)$ هو المفاضلة بين قربه من $T \text{ rect}(fT)$ والمدة الزمنية للتتابع $g(t)$ ، وفقاً لمتطلبات معيارية نايكويست. تستخدم توابع جيب التمام (cosines) بشكل واسع كحل تسوية بين هذه الأهداف المزدوجة. يحقق اختيار $\hat{p}(f)$ عادة المتطلب $\hat{g}(f) = |\hat{p}(f)|^2$ ، وفي هذه الحالة فإن $\{p(t - kT); k \in \mathbb{Z}\}$ عبارة عن مجموعة توابع متعامدة معيارياً.

ناقش معظم ما تبقى من الفصل التعديل من الحزمة الأساسية إلى حزمة التميرير، وقد استند هذا الموضوع بشكل أساسي إلى توظيف خصائص تحويلات فورييه، ولا يحتاج ذلك إلى التلخيص.

6.E تمارين

1.6 (PAM) ليكن لدينا M-PAM القياسي ونفترض أن الإشارات تستخدم باحتمالات متساوية. بين أن متوسط الطاقة لكل إشارة $E_s = \overline{U_k^2}$ يساوي متوسط الطاقة $\overline{U^2} = d^2 M^2 / 12$ لتوزيع مستمر موحد خلال الفترة $[-d/2, d/2]$ ، ناقص متوسط الطاقة $\overline{(U - U_k)^2} = d^2 / 12$ لتوزيع مستمر موحد خلال الفترة $[-d/2, d/2]$.

$$E_s = \frac{d^2(M^2 - 1)}{12}$$

وهذا يوحد المعادلة (6.4). أثبت صحة العلاقة عندما $M = 4$ و $M = 8$.

2.6 (PAM) يقوم منبع متقطع لا يحوي ذاكرة، بإصدار رموز ثنائية باحتمالات متساوية عند معدل 1000 رمز في كل ثانية. يتم تجميع الرموز من فترة ثانية واحدة إلى أزواج وإرسالها عبر قناة محددة المجال باستخدام مجموعة إشارة 4-PM القياسية. يستخدم التعديل فاصل إشارة قدره 0.002 والنبضة $p(t) = \text{sinc}(t/T)$.

- (a) لنفترض أن تتابع العينة u_1, \dots, u_{500} للإشارات المرسله يشمل 115 ظهور عند $3d/2$ و 130 عند $d/2$ و 120 عند $-d/2$ و 135 عند $-3d/2$. أوجد الطاقة في الموجة المرسله: $u(t) = \sum_{k=1}^{500} u_k \text{sinc}(\frac{t}{T} - k)$ كنابع لقيمة d .
- (b) ما هو عرض المجال للموجة $u(t)$ في الطلب (a)؟
- (c) أوجد $E [\int U^2(t) dt]$ حيث $U(t)$ موجة عشوائية $\sum_{k=1}^{500} U_k \text{sinc}(\frac{t}{T} - k)$.
- (d) لنفترض أن المنبع الثنائي ليس بدون ذاكرة، ولكن بدلاً عن ذلك يتم إنشاؤه باستخدام سلسلة ماركوف حيث:

$$\Pr(X_i = 1 | X_{i-1} = 1) = \Pr(X_{i=0} | X_{i-1} = 0) = 0.9$$

- نفترض بأن سلسلة ماركوف تبدأ بحالة ثابتة اعتباراً من $\Pr(X_1=1) = 1/2$ مستخدماً الانتقال $(10 \rightarrow 11)$, $(01 \rightarrow a_2)$, $(00 \rightarrow a_1)$
- (a) $(11 \rightarrow a_4)$ ، أوجد $[U_k^2]$ من أجل $1 \leq k \leq 500$
- (e) أوجد $E [U^2(t) dt]$ في حالة المنبع في (d).
- (f) اشرح في حالة سلسلة ماركوف كيف نستطيع تغيير الانتقال لتقليل الطاقة المتوقعة دون تغيير الفاصل بين نقاط الإشارة.

3.6 (a) نفترض أن الإشارة المستقبلية في نظام 4-PAM هي $V_k = U_k + Z_k$ حيث U_k هو الإشارة المرسله 4-PAM عند الزمن k . نعتبر أن Z_k ليس تابعاً لتابع الإشارة U_k كما أن كثافة غاوس هي: $f_Z(z) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \exp\{-\frac{z^2}{2}\}$ نفترض أن المستقبل اختار \tilde{U}_k الإشارة القريبة جداً من V_k . (اتضح من الفصل الثامن بأن هذه القاعدة تقلل من قيمة P_e ما أمكن وذلك في حالة الإشارات متساوية الاحتمال). أوجد الاحتمال P_e (بالنسبة لتكاملات غاوس) والتي فيها $\tilde{U}_k \neq U_k$.

- (b) احسب المشتق الجزئي بالنسبة إلى نقطة الإشارة الثالثة a_3 (أي نقطة الإشارة الداخلية الموجبة) عند النقطة التي يكون فيها a_3 مساوياً إلى القيمة $d/2$ في 4-PAM القياسية وتحافظ بقية نقاط الإشارة على قيمها في 4-PAM.
- (c) احسب المشتق الجزئي لطاقة الإشارة E_s بالنسبة إلى a_3 .
- (d) ناقش من خلال ذلك أن احتمال الخطأ الأصغري لتجمع 4 نقاط إشارة متساوية الاحتمال، ليست 4-PAM، وإنما هي بدلاً عن ذلك تجمع تكون فيه المسافة بين النقاط الداخلية أصغر من المسافة الممتدة من النقطة الداخلية إلى النقطة الخارجية في كلا الطرفين. (يشير ذلك الدهشة لدى المؤلف)

4.6 (Nyquist) نفترض أنه تم استقبال إشارة الحزمة القاعدية المعدلة PAM التالية: $u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k p(t - kT)$ حيث إن قيمة

كل من $u(t)$ و $p(t)$ معلومة. نرغب بإيجاد الإشارات $\{u_k\}$ من $u(t)$. نفترض بأنه يجب استخدام العمليات الخطية فقط، أي أننا نريد إيجاد بعض الأشكال الموجية $d_k(t)$ لكل عدد صحيح k ، مثال: $\int_{-\infty}^{\infty} u(t) d_k dt = u_k$

- (a) ما هي الخصائص التي يجب أن تتحقق من قبل $d_k(t)$ مما يعني أن المعادلة السابقة ستكون محققة بغض النظر عن القيم التي تأخذها عن طريق إشارات أخرى، $\dots, u_{k+2}, u_{k+1}, u_{k-1}, u_{k-2}$ ؟ ينبغي على الخصائص الناتجة أن تتقيد بنواتج الضرب الداخلية

$(p(t - kT), d_j(t))$. ينبغي عدم الاهتمام بالتقارب، تبادل النهايات، الخ...

(b) افترض وجود تابع $d_0(t)$ يلي هذه القيود عندما $k = 0$. بين أنه من الممكن إيجاد تابع $d_k(t)$ يحقق هذه القيود بدلالة $d_0(t)$ من أجل كل k .

(c) ماهي العلاقة بين $d_0(t)$ و $d_k(t)$ الذي يتجنب تداخل الرموز كما بين النهج الذي اتبع في الفقرة (6.3) (أي أنه من أجل تابع مثل $q(t)$ يحقق العلاقة $p(t) * q(t)$ فإن ذلك يعني نايكويست مثالي).

بيننا سابقاً أن نهج المرشح/أخذ العينات في الفقرة (6.3) ليس أقل عمومية من نهج العملية الخطية العشوائية المطروح هنا. يجدر الملاحظة بأنه عند غياب الضجيج وفي حالة وجود تجمع إشارة معلوم، فمن الممكن استرجاع الإشارات من الموجة باستخدام عمليات لخطية حتى بوجود تداخل للرموز.

5.6 (Nyquist) بين أن $g(t) = v(t) \text{sinc}(t/T)$ وذلك إذا افترضنا أن $v(t)$ إشارة \mathcal{L}_2 موجية مستمرة حيث $v(0) = 1$.

(a) بين أن $g(t)$ هو نايكويست مثالي بوجود الفاصل الزمني T .

(b) أوجد $\hat{g}(f)$ كتابع لـ $\hat{v}(f)$.

(c) بين أن $\hat{g}(f)$ يحقق معيار نايكويست.

(d) إذا كانت $v(t)$ حزمة قاعدية محددة بالقيمة B_b ، ماهي القيمة التي تحدد الحزمة الأساسية $g(t)$ ؟

ملاحظة: يساعد الشكل النموذجي لمعيار نايكويست في اختيار الامواج بحيث نتجنب تداخل الرموز عند هبوط rolloff التردد. تبين المقارنة أعلاه كيفية تجنب تداخل الرموز بوجود تخامد ترددي وزمني موصوف في الإشارة.

6.6 (Nyquist) ليكن لدينا نظام حزمة أساسية PAM، حيث عُرف المعدل من خلال ف موجة $p(t)$ وفاصل إشارة T ، كما حددت القناة

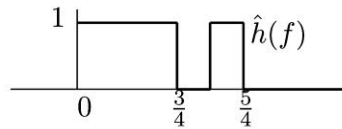
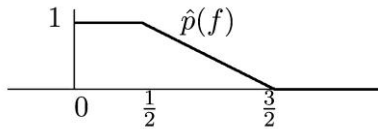
بوساطة مرشح $h(t)$ والمستقبل من خلال المرشح $q(t)$ الذي تؤخذ عيناته عند فواصل زمنية T . تعطى الإشارة المستقبلية بعد مرشح

$$g(t) = p(t) * h(t) * q(t) \text{ حيث } r(t) = \sum_k u_k g(y - kT)$$

(a) ماهي الخاصية التي يجب أن تمتع بها $g(t)$ والتي تحقق $r(kt) = uk$ من أجل كافة قيم k ولجميع خيارات الدخل $\{uk\}$ ؟ ماهو معيار نايكويست من أجل $\hat{g}(f)$ ؟

(b) افترض الآن أن $T = 1/2$ ، وأن التتابع $p(t)$ و $h(t)$ و $q(t)$ وجميع تحويلات فورييه الخاصة بها حقيقية حصراً. افترض أيضاً أن كلا التابعين $\hat{p}(f)$ ، $\hat{h}(f)$ مُعطى بالعلاقات التالية:

$$\hat{p}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq 0.5: \\ 1.5 - t, & 0.5 < |f| \leq 1.5 \\ 0, & |f| > 1.5 \end{cases} \quad \hat{h}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq 0.75; \\ 0, & 0.75 < |f| \leq 1 \\ 1, & 1 < |f| \leq 1.25 \\ 0, & |f| > 1.25 \end{cases}$$



هل من الممكن اختيار تحويل مرشح استقبال $\hat{q}(f)$ حتى لا يكون هناك تداخل بالرموز؟ إذا كان الأمر كذلك، أعط مثلاً وبين المناطق التي لا يكون الحل فيها فريداً.

(c) أعد حل الفقرة (b) آخذاً بالحسبان التعديلات التالية: $\hat{h}(f) = 1$ من أجل $|f| \leq 0.75$ و $\hat{h}(f) = 0$ من أجل $|f| > 0.75$.

(d) اشرح الشروط على $\hat{h}(f)$ و $\hat{p}(f)$ التي تكمننا من تجنب التداخل البيئي في الرموز من خلال الاختيار الصحيح لـ $\hat{q}(f)$ (يمكنك أن تفترض، كما تم آنفاً، أن $p(t)$ و $\hat{p}(f)$ ، $\hat{h}(f)$ ، $h(t)$ جميعها حقيقية).

7.6 (Nyquist) كما نعلم فإن التابع $\text{rect}(t/T)$ له ميزة خاصة، فبالإضافة إلى الإزاحة الزمنية والترددية بقيمة kT و j/T على التوالي، فإنه

يشكل مجموعة من التتابع المتعامدة. التابع $\text{sinc}(t/T)$ له هذه الخاصية نفسها. تخص هذه المسألة تتابع الحالة العامة الأخرى للتتابع

$\text{rect}(t/T)$ ، والتي كما يترتب أن نبين في الفقرات من (a) إلى (d)، لها هذه الخاصية الهامة نفسها. اختر قيمة T مساوية إلى الواحد لأغراض التبسيط.

تأخذ هذه التتابع القيم 0 و 1 ويسمح لها أن تكون غير صفرية فقط ضمن المجال $(-1, 1)$ بدلاً عن $(-1/2, 1/2)$ كما هو عليه الحال في $\text{Rect}(t)$. بوضوح أكبر، إن التتابع قيد الدرس تحقق القيود التالية:

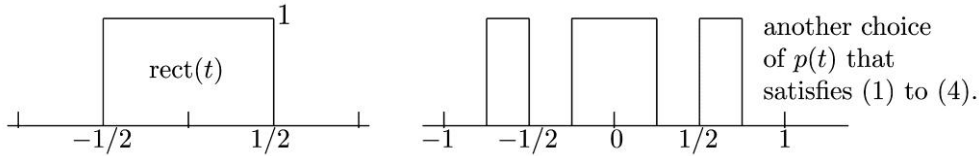
$$(30.6) \quad p(t) = p^2(t) \quad \text{for all } t \quad (0/1 \text{ property})$$

$$(31.6) \quad p(t) = 0 \quad \text{for } |t| > 1$$

$$(32.6) \quad p(t) = p(-t) \quad \text{for all } t \quad (\text{symmetry})$$

$$(33.6) \quad p(t) = 1 - p(t - 1) \quad \text{for } 0 \leq 1 < 1/2$$

ملاحظة: بسبب الخاصية (32.6)، فإن الشرط في (33.6) محقق أيضاً ضمن المجال $1/2 < t \leq 1$. يجدر الملاحظة أيضاً أنه عند النقاط $t = \mp 1/2$ ، فإن التابع $p(t)$ لا يؤثر على أي من الخصائص التعامدية، لذا فإن الخيار متاح في تجاهل هذه النقاط عند إجراء المناقشة.



(a) أوضح أن $p(t)$ متعامد مع $p(t-1)$. تلميح: احسب $p(t)p(t-1)$ لكل $t \in [0, 1]$ فضلاً عن $t = 1/2$.

(b) أوضح أن $p(t)$ متعامد مع $p(t-k)$ لجميع الأعداد الصحيحة k غير الصفرية.

(c) أوضح أن $p(t)$ متعامد مع $p(t-k) \exp(2\pi imt)$ لجميع الأعداد الصحيحة m و k غير الصفرية.

(d) أوضح أن $p(t)$ متعامد مع $p(t) \exp(2\pi imt)$ لجميع الأعداد الصحيحة m غير الصفرية. تلميح: احسب $p(t)e^{-2\pi imt} + p(t-1)e^{-2\pi im(t-1)}$.

(e) نفترض أن $h(t) = \hat{p}(t)$ حيث $\hat{p}(f)$ يعبر عن تحويل فورييه للتابع $p(t)$. إذا كان $p(t)$ يحقق الخصائص من (1) إلى (4)، هل يستنتج من ذلك أن $h(t)$ يحقق خاصية التعامد مع $h(t-k) \exp(2\pi imt)$ لجميع الأعداد الصحيحة m و k غير الصفرية؟ ملاحظة: لا يتطلب هذا التمرين تقريباً إجراء أية حسابات.

8.6 (Nyquist) (a) لدينا الحالة الخاصة التالية $\alpha = 1$ و $T = 1$ ، أثبت صحة العلاقة (18.6) النسبة للتابع $\hat{g}_1(f)$ أخذاً بالحسبان قيمة $g_1(t)$ في (17.6). تلميح: كخطة حل وسطية، أثبت أن:

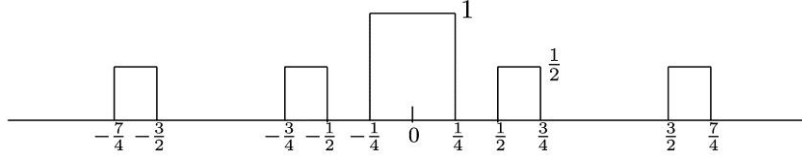
$$g_1(t) = \text{sinc}(2t) + \frac{1}{2} \text{sinc}(2t + 1) + \frac{1}{2} \text{sinc}(2t - 1)$$

ارسم المخطط البياني للتابع $g_1(t)$ موضعاً بشكل خاص قيمته عند $mT/2$ لكل $m \geq 0$.

(b) بيّن من أجل الحالة العامة $T = 1$ ، $0 < \alpha < 1$ ، أن $\hat{g}_\alpha(f)$ هو تابع طي $\text{rect} f$ مع نصف دور $\beta \cos(\pi \alpha f)$ وحدد القيمة المطلوبة في β .

(c) أثبت (18.6) للحالة $T = 1$ ، $0 < \alpha < 1$ ، ومن ثم أثبت نفس العلاقة لأي قيمة $T > 0$.

9.6 (Approximate Nyquist) يبيّن هذا التمرين أن عملية التقريب إلى معيار نايكويست يجب أن تعالج بعناية كبيرة. اوجد $\hat{g}_k(f)$ من أجل $k \geq 0$ كما هو موضح في المخطط أدناه من أجل $k = 2$. هناك نبضات صغيرة عددها k على طرفي النبضة الرئيسية، سعة كل منها $1/k$.



(a) بيّن أن $\hat{g}_k(f)$ يحقق معيار نايكويست عندما $T = 1$ ولكل $k \geq 1$.

(b) أوضح أن $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{g}_k(f)$ هي ببساطة النبضة المركزية أعلاه، أي أن هذا التحديد على التابع من النوع L_2 يلي معيار نايكويست من أجل $T = 1/2$. بطريقة أخرى إن التابع $\hat{g}_k(f)$ ، وعندما تكون قيمة k كبيرة، يلي معيار نايكويست من أجل $T = 1$ باستخدام عرض نطاق تقريبي يساوي $1/4$ عوضاً عن عرض النطاق اللازم والمساوي إلى $1/2$. تكمن المشكلة في أن فكرة التقريب في التابع من نوع L_2 ليست ملائمة دائماً وغالباً ما يكون من غير الملائم استخدامها في مواضيع أخذ العينات.

10.6 (Nyquist) (a) نفترض أن $\hat{p}(f) = \hat{q}^*(f)$ و $\hat{g}(f) = \hat{p}(f)\hat{q}(f)$. أثبت أنه إذا كان $p(t)$ حقيقياً، فيجب أن يكون عندئذ $\hat{g}(f) = \hat{g}(-f)$ لكل قيم f .

(b) استخدم الافتراضات نفسها لإيجاد مثال يكون فيه $p(t)$ غير حقيقي إلا أن $\hat{g}(f) \neq \hat{g}(-f)$ وأن $\hat{g}(f)$ يلي معيار نايكويست. تلميح: أوضح بأن $\hat{g}(f) = 1$ من أجل $0 \leq f \leq 1$ و $\hat{g}(f) = 0$ في بقية الحالات فإنه يلي متطلبات معيارية نايكويست عندما $T = 1$. ومن ثم أوجد التابع $p(t)$.

11.6 (Passband) (a) ليكن $u_k(t) = \exp(2\pi i f_k t)$ عندما $k = 1, 2$ وأن $x_k(t) = 2\Re\{u_k(t) \exp(2\pi i f_c t)\}$. افترض $f_1 > -f_c$ ، أوجد $f_1 \geq f_2$ بحيث يكون $x_1(t) = x_2(t)$.

(b) اشرح أن ما قمت به لبيان أنه وبدون افتراض أن عرض المجال الترددي في $u(t)$ أصغر من f_c ، فمن المستحيل دوماً استرداد $u(t)$ من $x(t)$ حتى في حالة عدم وجود ضجيج.

(c) افترض أن $y(t)$ تابع حقيقي L_2 . بيّن أن النتيجة في الفقرة (a) تبقى صحيحة إذا كان: $u_k(t) = y(t) \exp(2\pi i f_k t)$.

(d) بيّن أنه إذا كان $u(t)$ هو حقيقي حصراً، فإنه من الممكن استرجاع $u(t)$ في كل مكان تقريباً من: $x(t) = 2\Re\{u(t) \exp(2\pi i f_c t)\}$.

(e) أوضح بأنه إذا تجاوز عرض المجال الترددي في $u(t)$ القيمة f_c ، فلن يعمل الشكلان (6.6) و (8.6) بشكل صحيح، حتى ولو كان $u(t)$ حقيقياً.

12.6 (QAM) (a) افترض أن $\theta_1(t)$ و $\theta_2(t)$ هي موجات عقدية متعامدة معيارياً. افترض $\phi_j(t) = \theta_j(t)e^{2\pi i f_c t}$ في حالة $j = 1, 2$. بيّن أن كل من $\theta_1(t)$ و $\theta_2(t)$ متعامدان معيارياً من أجل أي قيمة للتردد f_c .

(b) افترض أن $\theta_2(t) = \theta_1(t - T)$. بين أنه إذا كان f_c عدد صحيح من مضاعفات $1/T$ ، فإن: $\phi_2(t) = \phi_1(t - T)$.

13.6 (QAM) (a) نفترض أن $B/2 < f_c$. إذا كان $u(t)$ تابع حقيقي و $v(t)$ تابع تخيلي، وكلاهما محدد بالحزمة القاعدية $B/2$. بيّن أن توابع حزم التميرير المقابلة $\Re\{u(t)e^{2\pi i f_c t}\}$ و $\Re\{v(t)e^{2\pi i f_c t}\}$ متعامدة.

(b) أعط مثلاً على التوابع في الفقرة (أ)، تبين فيه بأنهما غير متعامدين في حالة $B/2 < f_c$.

14.6 (a) اشتق كل من (28.6) و (29.6) مستخدماً العلاقات المثلثية المعروفة.

(b) لاحظ أن الطرف الأيسر في (28.6) و (29.6) عبارة عن جزء حقيقي وجزء تخيلي على التوالي بالنسبة للتابع $x(t)e^{-2\pi i f_c t}$. أعد اشتقاق (28.6) و (29.6) باستخدام العلاقات الأسية التخيلية. (لاحظ سهولة هذه الطريقة بالمقارنة مع الطريقة في الفقرة (a)).

15.6 (امتداد حزمة التميرير) افترض أن $\{p(t - kT); k \in \mathbb{Z}\}$ عبارة عن مجموعة من التوابع المتعامدة، وافترض أيضاً أن $\hat{p}(f) = 0$ for $|f| \geq f_c$.

(a) بيّن أن $\{\sqrt{2}p(t - kT) \cos(2\pi f_c t); k \in \mathbb{Z}\}$ عبارة عن مجموعة متعامدة.

(b) بيّن أن $\{\sqrt{2}p(t - kT) \sin(2\pi f_c t); k \in \mathbb{Z}\}$ عبارة عن مجموعة متعامدة معيارياً وكل تابع فيها متعامد معيارياً مع مجموعة توابع التجيب cosine في الفقرة (a).

16.6 (امتداد حزمة التمرير) أثبت صحة النظرية (1.6.6). تلميح: بين أولاً أن مجموعة التوابع $\{\hat{\psi}_{k,1}(f)\}$ و $\{\hat{\psi}_{k,2}(f)\}$ هي متعامدة مع الطاقة 2 من خلال مقارنة التكامل عبر ترددات سلبية مع تكامل عبر ترددات موجبة. بين صراحة لماذا يجب أن يكون $B/2 < f_c$.

17.6 (تعديل الغلاف وتعديل الطور Phase and envelope modulation) يبين هذا التمرين بأننا ننظر إلى أي شكل موجي حقيقي لحزمة التمرير على أنه تركيب من التعديل السعوي والطور. نفترض أن $x(t)$ شكل موجي حقيقي \mathcal{L}_2 لحزمة التمرير ذات عرض المجال B حول تردد حامل f_c $B/2 > f_c$. نفترض أن الجزء الموجب الترددي للتابع $x(t)$ ونفترض $u(t) = x^+(t) \exp\{-2\pi i f_c t\}$.

(a) عبّر عن $x(t)$ بدلالة $\Re\{u(t)\}$, $\Im\{u(t)\}$, $\cos[2\pi f_c t]$ and $\sin[2\pi f_c t]$.
 (b) عبّر عن $\phi(t)$ ضمناً من خلال $e^{i\phi(t)} = \frac{u(t)}{|u(t)|}$. بيّن أن $x(t)$ يمكن أن يأخذ الصيغة $x(t) = 2|u(t)| \cos[2f_c t + \phi(t)]$.
 ارسم مخططاً توضح فيه أن $|u^+(t)|$ هو موجة حزمة قاعدية تحيط من الأعلى التابع $x(t)$ والذي يلمس $x(t)$ مرة في كل دور تقريباً. استخدم التعبير بالرسم أو الكتابة لتوضيح أن $\phi(t)$ هو تعديل طور على الحامل.
 (c) بيّن أن غلاف موجة تمرير حزمة $x(t)$ ، يعادل ضعفي سعة جزء التردد الموجب، أي $|x^+(t)|$. حاول أن تُعبّر في تردد الحامل من f_c إلى أي تردد آخر وليكن f'_c دون تغيير الإشارة $x(t)$ (أو $|x^+(t)|$)، وبالتالي، فإن $u'(t) = x^+(t) \exp\{-2\pi i f'_c t\}$. بيّن أن $|x^+(t)| = |u(t)| = |u'(t)|$. لاحظ أننا من خلال ذلك قد بينا أن الغلاف لا يعتمد على الحامل المفترض، ولكنه يحوي تفسيراً للفقرة (ب).

(d) بيّن علاقة الطور $\phi'(t)$ للحامل f'_c مع ما يماثلها للحامل f_c .

(e) لنفرض أن $p(t) = |x(t)|^2$ هو الطاقة في $x(t)$. بيّن أنه إذا جرى ترشيح $p(t)$ بمرشح تمرير منخفض إلى الحزمة B ، فإن الناتج سيكون $2|u(t)|^2$. فسّر عملية الترشيح هذه على أنها متوسط، خلال فترة زمنية قصيرة، لـ $|x(t)|^2$ وذلك لتفسير سبب كون مربع الغلاف مساوياً لضعف الطاقة المتوسطة خلال فترة زمنية قصيرة (وبالتالي لماذا يكون الغلاف مساوياً الجذر التربيعي للعدد 2 مضروباً بمتوسط الجذر التربيعي للسعة).

18.6 (التعديل الطوري - السعوي مع حذف الحامل Carrier less amplitude-phase modulation (CAP) رأينا كيفية تعديل موجة حزمة قاعدية QAM من خلال الإزاحة الترددية صعوداً إلى حزمة التمرير، ومن ثم كشف التعديل عن طريق الإزاحة الترددية هبوطاً إلى الحزمة الأساسية، وبلي ذلك عملياً الترشيح وأخذ العينات. يكشف هذا التمرين مفهوماً مثيراً للاهتمام يتلخص في إلغاء عمليات الحزمة الأساسية من خلال التعديل وكشف التعديل مباشرة عند حزمة التمرير. يُستخدم هذا النهج في واحدة من معايير أمريكا الشمالية لحلقة المشترك الرقمي غير المتناظرة (ADSL).

(a) نفترض أن $\{u_k\}$ يمثل سلسلة معطيات عقدية و $u(t) = \sum_k u_k p(t - kT)$ يعبر عن الخرج المعدل المقابل. نفترض أيضاً أن $\hat{p}(f)$ يساوي الجذر التربيعي للقيمة T عبر $f \in [3/(2T), 5/(2T)]$ ومساوياً للصفر لبقية الحالات. يتم ترشيح $u(t)$ عند المستقبل، باستخدام $p(t)$ ومن تؤخذ عينات الخرج $y(t)$ عند لحظات زمنية kT وبتباعد T . بيّن أن $u_k = y(k)$ من أجل جميع الحالات التي فيها $k \in \mathbb{Z}$. لا تقلق حول حقيقة أن الشكل الموجي المرسل، هو تابع عقدي.

(b) نفترض الآن أن $\hat{p}(f) = \sqrt{T} \text{rect}(T(f - f_c))$ لأي قيمة عشوائية من f_c بدلاً من $f_c = 2/T$ (كما في الفقرة (a)). ما هي قيم f_c والتي يبقى فيها النهج مستمراً في العمل؟

(c) لنفترض بأن $\Re\{u(t)\}$ قد تم إرساله عبر قناة الاتصال. ونفترض أيضاً أن الشكل الموجي المستقبل تم ترشيحه باستخدام مرشح هيلبرت وذلك قبل الانتقال عبر إجرائية التعديل أعلاه. هل لا يزال هذا النهج قابلاً للتطبيق؟

7. العمليات العشوائية والضجيج

1.7 مقدمة

ناقش الفصل السادس التعديل وفك التعديل، لكنه استبدل أي مناقشة مُفصَّلة عن الضجيج بافتراض أن هناك ضرورة لوجود حد أدنى من التباعد بين كل زوج من نقاط الإشارة. يطور هذا الفصل المبادئ الأساسية اللازمة لفهم الضجيج، ويبيّن الفصل التالي كيفية استخدام هذه المبادئ لكشف الإشارات بوجود الضجيج.

الضجيج عادة هو المحدد الأساسي للاتصال عبر القنوات الفيزيائية. هذا يمكن رؤيته بشكل حدسي بقبول ولو للحظة أن أشكال الأمواج المختلفة المرسلّة يجب أن يكون لها حدّ أدنى من طاقة إضافية للتغلب على الضجيج. ينعكس هذا الاختلاف على المسافة المطلوبة بين نقاط الإشارة، والتي بالإضافة إلى القيود المفروضة على استطاعة الإرسال، تحدّد من عدد بتات الإشارة التي يمكن إرسالها. يكون عندئذ معدل الإرسال بالبت في الثانية محدوداً بجداء عدد البتات خلال زمن الإشارة بعدد الإشارات في الثانية الواحدة، أي عدد درجات الحرية في الثانية الواحدة التي يمكن أن تشغلها الإشارات. وجهة النظر هذه بديهية وصحيحة لدرجة كبيرة، ولكن يجب أن تُفهم على مستوى أعمق والذي سوف نحصل عليه من نموذج احتمالي للضجيج.

يعتمد هذا الفصل والفصل التالي على افتراض أن إشارة خرج القناة لها الشكل $y(t) = x(t) + z(t)$ حيث $x(t)$ إشارة دخل القناة و $z(t)$ إشارة الضجيج. تعتمد إشارة دخل القناة $x(t)$ من منبع للأرقام الثنائية، لذلك يمكن النظر إليها على أنها اختيار معين من الفرقة الممكنة لمداخلات القناة. بشكل مماثل $z(t)$ هي اختيار معين من الفرقة الممكنة لموجة الضجيج.

يعني الافتراض $y(t) = x(t) + z(t)$ أن تخميد القناة معروف وتتمّ إزالته بتقييس كلّ من الإشارة المستقبلية والضجيج. كما يعني أن الدخل لا يرشح أو يشوه من قبل القناة. وأخيراً فإنه يعني أن التأخير وفرق طور الحامل بين الدخل والخرج معروف وتتمّ إزالته في قسم الاستقبال. يجب نمذجة الضجيج احتمالياً وذلك لأن الضجيج لا يكون معلوماً مسبقاً، لكن يمكن التنبؤ به بطرائق إحصائية. وكذلك بسبب أن الرموز وكاشف الترميز تمّ تصميمهما للعمل بنجاح ضمن مجموعة متنوعة من القنوات المختلفة، والتي تخضع جميعها لأشكال موجة الضجيج المختلفة، وتتمّ نمذجة الضجيج عادة بقيمة متوسطة صفريه حيث يمكن إزالتها بسهولة.

ستأخذ نمذجة الإشارات $x(t)$ و $z(t)$ واحتمالياً عناية كبيرة. إذا تمّ تحديد كل من $x(t)$ و $z(t)$ قيم متقطعة زمنياً فقط، مثل $\{t = kT; k \in \mathbb{Z}\}$ ، بعد ذلك يمكن نمذجتها كقيم عينات من سلاسل متحولات عشوائية. هذه السلاسل من المتحولات العشوائية يمكن أن يُعبر عنها بالشكل $X(t) = \{X(kT); k \in \mathbb{Z}\}$ و $Z(t) = \{Z(kT); k \in \mathbb{Z}\}$. الحالة المهمة هنا، على أية حال، حين يتمّ تعريف $x(t)$ و $z(t)$ على مدى استمرارية قيم t ، وبالتالي لا بدّ من استمرارية المتحولات العشوائية. يُعرف مثل هذا النموذج الاحتمالي بوصفه عملية عشوائية أو عملية احتمالية. تتصرف هذه النماذج إلى حدّ ما بشكل مماثل للسلاسل العشوائية، لكنها تتصرف بشكل مختلف في عدد لا يحصى من طرائق صغيرة لكنها مهمة.

2.7 العمليات العشوائية

العملية العشوائية $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$ عبارة عن مجموعة من المتحولات العشوائية⁹⁸، واحدة لكل $t \in \mathbb{R}$. يمثل البارامتر t عادة الزمن، وأي لحظة معينة من الزمن غالباً ما يشار إليها باسم الفترة. لذلك هناك متحول عشوائي واحد خلال كل فترة. يقتصر أحياناً مدى تغير t على مجال محدود $[a, b]$ ، ويشار للعملية عندئذ بـ $\{Z(t); t \in [a, b]\}$.

يجب أن يكون هناك فضاء عينة أساسي Ω يتمّ خلاله تعريف المتحولات العشوائية. وذلك لكل فترة $t \in \mathbb{R}$ (or $t \in [a, b]$)، المتحول العشوائي $Z(t)$ هو تابع $\{Z(t, \omega); \omega \in \Omega\}$ يُمثّل نقاط العينة $\omega \in \Omega$ بأعداد حقيقية.

⁹⁸ نظراً لأن المتحول العشوائي يتحول من Ω إلى \mathbb{R} ، فإن قيم العينات للمتحول العشوائي تكون حقيقية وأيضاً توابع العينات للعملية العشوائية حقيقية. غالباً ما يكون من المهم تحديد المتحولات العشوائية العقدية التي تتحول من Ω إلى \mathbb{C} . ويمكن بعد ذلك تحديد العملية العشوائية العقدية التي تحول كل $t \in \mathbb{R}$ إلى متحول عشوائي عقدي. هذه المتحولات العشوائية العقدية ستكون مهمة عند دراسة أمواج الضجيج في المجال الأساسي.

تحدد نقطة العينة المعطاة $\omega \in \Omega$ داخل فضاء العينة الأساسي قيم عينات $Z(t)$ خلال كل فترة t . إن مجموع قيم كل هذه العينات من أجل نقطة عينة معطاة ω ، أي، $\{Z(t, \omega); t \in \mathbb{R}\}$ يسمى تابع العينة $\{z(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ للعملية العشوائية. لذلك يمكن النظر لـ $Z(t, \omega)$ كتاباً لـ ω من أجل t ثابتة، وفي هذه الحالة تمثل المتحول العشوائي $Z(t)$ ، أو يمكن النظر إليها كتابع لـ t من أجل ω ثابتة، وفي هذه الحالة تمثل تابع العينة $\{z(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\} = \{Z(t, \omega); t \in \mathbb{R}\}$ مقابل لقيمة معينة لـ ω . وبالنظر إليها كتابع لكل من ω و t ، فإن $\{Z(t, \omega); t \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega\}$ تمثل العملية العشوائية نفسها؛ وعادة تحذف ω ، ونشير إلى العملية بالشكل $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$.

بفرض أن العملية العشوائية $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$ تمثل ضجيج القناة و $\{z(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ عبارة عن تابع عينة من هذه العملية. في البداية يبدو ذلك متعارضاً مع وجهة النظر التقليدية الابتدائية أن العملية العشوائية أو مجموعة من نماذج المتحولات العشوائية بوضع تجريبي معروف مسبقاً (قبل أداء التجربة) وتابع العينة يمثل النتيجة بعد التجربة. والمشكلة هنا في أن التجربة يمكن أن تستمر من $t = -\infty$ to $t = \infty$ ، لذلك يمكن أن يكون لا "قبل" من أجل التجربة و "بعد" من أجل النتيجة.

ثمة طريقتان للخروج من هذا التناقض. أولاً، مفهوم "قبل وبعده" في عرض أولي هو غير جوهري. الشيء الوحيد المهم هو إمكانية ظهور عدة توابع عينات ولكن فقط واحد منها يحدث فعلياً فقط. وجهة النظر هذه هي المناسبة في تصميم هاتف خلوي للتصنيع. كل هاتف إفرادي يباع يتم اختبار خواصه بالنسبة لموجة الضجيج الخاصة به، ولكن يجب تصنيعه ليعمل خلال عدد من مثل هذه الأمواج. ثانياً، إن مسألة النظر إلى أن تابع للزمن يمتد من $-\infty$ to $+\infty$ أو يمتد من زمن سالب كبير إلى زمن موجب كبير هي فقط مسألة رياضية. نحن غالباً ما نمثل أشكال الأمواج بشكل مستمر من $-\infty$ to $+\infty$ ، لكن هذا يشير ببساطة إلى حالة فيها زمن البدء وزمن الانتهاء يعيدان بقدر كاف.

نحتاج لتحديد عملية عشوائية ما $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$ إلى بعض القواعد التي يمكننا من خلالها، من حيث المبدأ حساب توابع التوزيع المشتركة. أي إنه يجب أن يكون ممكناً من أجل جميع الأعداد الصحيحة الموجبة n ، ولكل خيارات الفترات الزمنية t_1, t_2, \dots, t_n (من حيث المبدأ)، حساب تابع التوزيع المشترك.

$$(1.7) \quad F_{Z(t_1), \dots, Z(t_n)}(z_1, \dots, z_n) = \Pr \{Z(t_1) \leq z_1, \dots, Z(t_n) \leq z_n\}$$

من أجل جميع خيارات الأعداد الحقيقية z_1, \dots, z_n وبشكل مكافئ، إذا كانت الكثافات معطاة، يجب أن يكون ممكناً (من حيث المبدأ) إيجاد الكثافة المشتركة،

$$(2.7) \quad f_{Z(t_1), \dots, Z(t_n)}(z_1, \dots, z_n) = \frac{\partial^n F_{Z(t_1), \dots, Z(t_n)}(z_1, \dots, z_n)}{\partial z_1 \dots \partial z_n}$$

من أجل جميع القيم الحقيقية z_1, \dots, z_n . بما أن n يمكن أن تكون كبيرة بشكل اعتباطي في المعادلات (1.7) و (2.7)، قد يبدو من الصعب على قاعدة بسيطة لتحديد كل هذه الكميات، ولكن يتم إعطاء عدد من القواعد البسيطة في الأمثلة التالية التي تحدد كل هذه الكميات.

1.2.7 أمثلة عن العمليات العشوائية

سنحاول أن يكون المثال العام التالي مفيداً وعماماً جداً. رأينا سابقاً أننا نستطيع تحديد شكل الموجة من خلال سلسلة من المعاملات المتعامدة الموسعة. يتم في المثال التالي تحديد العملية العشوائية بشكل مماثل من خلال سلسلة من المتحولات العشوائية تستخدم كمعاملات متعامدة موسعة.

المثال 1.2.7: لتكن Z_1, Z_2, \dots عبارة عن سلسلة من المتحولات العشوائية المعرفة على فضاء عينات ما Ω ولتكن $\{\phi_1(t)\}, \{\phi_2(t)\}, \dots$ تمثل سلسلة من التوابع الحقيقية المتعامدة (أو المتعامدة المستنظمة). من أجل كل $t \in \mathbb{R}$ ، دع المتحول العشوائي $Z(t)$ معرف بالعلاقة $Z(t) = \sum_k Z_k \phi_k(t)$. وتكون العملية العشوائية المقابلة عندئذ $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$. من أجل كل t ، فإن $Z(t)$ ببساطة عبارة عن مجموع لمتحولات عشوائية، لذلك من حيث المبدأ نستطيع إيجاد تابع التوزيع له. بشكل مماثل، من أجل n صف، t_1, \dots, t_n من الفترات، فإن $Z(t_1), \dots, Z(t_n)$

عبارة عن n صف من متحولات عشوائية يمكننا، من حيث المبدأ، إيجاد التوزيع المشترك لها. وبما أن $Z(t)$ عبارة عن مجموع غير منتهٍ من المتحولات العشوائية $\sum_{k=1}^{\infty} Z_k \phi_k(t)$ ، فإن ثمة تعقيدات رياضية في إيجاد، أو حتى تحديد تابع التوزيع. لحسن الحظ، كما سنرى، لا تنشأ مثل هذه التعقيدات في العمليات الأكثر أهمية هنا.

ومن الواضح أن العمليات العشوائية يمكن تعريفها كما في المثال أعلاه، لكنها أقل وضوحاً من حيث توفر آلية لبناء نماذج معقولة من عمليات الضجيج المادية الفعلية. من أجل حالة العمليات الغوسية، والتي سوف يتم تحديدها باختصار، وسوف يعرض هذا النوع من النماذج بشكل مفصل بما يكفي لتوفير مجموعة مرنة من النماذج للضجيج. الأمثلة القليلة التالية تخصص المثال أعلاه بطرائق مختلفة.

المثال 2.2.7: لنعتبر نظام تعديل نبضي مطالي PAM، لكن إشارات الدخل عبارة عن متحولات عشوائية مستقلة وموزعة بشكل متماثل (iid) U_1, U_2, \dots تأخذ القيم $+1$ باحتمال يساوي $1/2$ لكل منها. افترض أن نبضة التعديل هي $\text{sinc}(\frac{t}{T})$ فتكون العملية العشوائية في المجال الأساسي هي:

$$U(t) = \sum_k U_k \text{sinc}\left(\frac{t - kT}{T}\right)$$

عند كل فترة أخذ عينات kT ، المتحول العشوائي $U(kT)$ ببساطة عبارة عن متحول عشوائي ثنائي U_k . أما خلال الفترات بين لحظات أخذ العينات، فإن $U(t)$ يمثل مجموعاً لا متناهياً من المتحولات العشوائية الثنائية وله تباين، كما سنرى لاحقاً، يساوي الواحد. لكن تابع توزيعه سيء جداً وليس له أهمية كبيرة.

المثال 3.2.7: نقول إن المتحول العشوائي الغوسي ذو قيمة متوسطة تساوي الصفر إذا كان له كثافة احتمال

$$(3.7) \quad f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right]$$

حيث σ^2 هي التباين لـ Z . نحصل على النموذج العام لعملية ظهور الضجيج $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$ بوضع

$$(4.7) \quad Z(t) = \sum_k Z_k \text{sinc}\left(\frac{t - kT}{T}\right)$$

حيث $\dots, Z_{-1}, Z_0, Z_1, \dots$ عبارة عن سلسلة من المتحولات العشوائية الغوسية المستقلة بقيمة متوسطة صفرية وتباينها σ^2 وموزعة بشكل متماثل. عند كل فترة أخذ عينات kT ، يكون المتحول العشوائي $Z(kT)$ متحولاً عشوائياً غوسياً Z_k بقيمة متوسطة صفرية. خلال الفترات بين لحظات أخذ العينات، يكون $Z(t)$ عبارة عن مجموع لا متناهٍ من المتحولات العشوائية الغوسية المستقلة وذات قيمة متوسطة صفرية، والذي يتبين أنه العملية العشوائية الغوسية نفسها بقيمة متوسطة صفرية وتباين σ^2 . يعتبر القسم التالي مجموعة متحولات عشوائية غوسية والعلاقة بينها بالتفصيل. توابع أخذ العينات لهذه العملية العشوائية ببساطة عبارة عن توابع sinc ومقتصرة على المجال القاعدي $[-1/(2T), 1/(2T)]$. هذا المثال، فضلاً عن المثال السابق يبرز المسألة الرياضية التالية، أن الطاقة المتوقعة لـ $\{(t); t \in \mathbb{R}\}$ يمكن أن تصبح لانهائية. وكما سنرى لاحقاً، فإنه يمكن جعل هذه الطاقة محدودة. إما بوساطة اقتطاع $Z(t)$ لفترة ما منتهية أكبر بكثير من أي زمن مفيد، أو بشكل مماثل اقتطاع السلسلة $\{Z_k; k \in \mathbb{Z}\}$.

ثمة جانب آخر مثير للقلق من هذا المثال وهو أن هذه العملية لا يمكن توليدها بوساطة سلسلة من المتحولات العشوائية عن طريق إدخال جهاز توليد يقوم بمضاعفة هذه المتحولات وذلك بإجراء تباعد لتوابع sinc بمقدار T وإضافتها. المشكلة هي نفس المشكلة مع توابع sinc في الفصل السابق التي تمتد باستمرار ولذلك فإن العملية لا يمكن توليدها بتأخير محدود. هذا غير مقلق هنا، لأننا لا نحاول توليد متحولات عشوائية، ولكن فقط لبيان أنه يمكن تعريف عمليات مثيرة للاهتمام. النهج هنا سيكون لتحديد وتحليل مجموعة واسعة من العمليات العشوائية، وبعد ذلك لمعرفة أي منها مناسب لنمذجة عمليات الضجيج.

المثال 4.2.7: لدينا $\{Z(t); t \in [-1, 1]\}$ معرفة بالعلاقة $Z(t) = tZ$ من أجل كل قيم $t \in [-1, 1]$ حيث Z متحول عشوائي غوسي بقيمة متوسطة تساوي الصفر وتباينه يساوي الواحد. يبين هذا المثال أن العملية العشوائية يمكن أن تكون بدون قيمة؛ يتحدد تابع العينة

لهذه العملية بشكل تام بقيمة العينة $z(t)$ عند $t = 1$. توابع العينة ببساطة هي خطوط مستقيمة تمرّ من مبدأ الإحداثيات بانحراف عشوائي. هذا يوضح أن توابع العينة ليست بالضرورة عشوائية.

2.2.7 المتوسط والتباين المشترك للعملية العشوائية

غالباً الشيء الأول الذي يهمننا عن العملية العشوائية قيمتها المتوسطة خلال كل فترة t والتباين أو التغير المشترك بين أي فترتين t, τ . القيمة المتوسطة $E[Z(t)] = \bar{Z}(t)$ هي ببساطة قيمة حقيقية للتابع L ويمكن إيجادها مباشرةً من تابع التوزيع $F_{Z(t)}(z)$ أو الكثافة $f_{Z(t)}(z)$. يمكن أن نبيّن أن $\bar{Z}(t)$ تساوي الصفر من أجل كل قيم t في الأمثلة 2.2.7، 3.2.7، و4.2.3. من أجل المثال 1.2.7 لا يمكن تحديد القيمة المتوسطة بدون تحديد أكثر للسلسلة والتوابع المتعامدة.

إن التباين أو التغير⁹⁹ هو قيمة حقيقية لتابع للفترات t و τ . ويرمز له بـ $K_Z(t, \tau)$ ويحدد بالعلاقة:

$$(5.7) \quad K_Z(t, \tau) = E[(Z(t) - \bar{Z}(t))[Z(\tau) - \bar{Z}(\tau)]]$$

حيث يمكن حسابها (من حيث المبدأ) من تابع التوزيع المشترك $F_{Z(t), Z(\tau)}(z_1, z_2)$ أو من تابع كثافة $f_{Z(t), Z(\tau)}(z_1, z_2)$ الاحتمال. لجعل تابع التغير يبدو أبسط قليلاً، نحن عادةً نفرق كل متحول عشوائي $Z(t)$ لقيمته المتوسطة $\bar{Z}(t)$ ، وتأرجحه، $\tilde{Z}(t) = Z(t) - \bar{Z}(t)$. ويكون تابع التباين عندئذ

$$(6.7) \quad K_Z(t, \tau) = E[\tilde{Z}(t)\tilde{Z}(\tau)]$$

تستخدم العمليات العشوائية الأكثر أهمية بالنسبة لنا لنمذجة أشكال أمواج الضجيج وعادة ما تكون ذات قيمة متوسطة صفرية، وفي هذه الحالة $Z(t) = \tilde{Z}(t)$. في حالات أخرى، غالباً ما يساعد الحدس في فصل العملية إلى قيمتها المتوسطة (التي هي ببساطة مجرد تابع عادي) ولتأرجحه، الذي هو بالتعريف ذو قيمة متوسطة صفرية. يمكن كتابة تابع التغير للعملية العشوائية العامة في المثال 1.2.7. آنفاً كما يلي:

$$(7.7) \quad K_Z(t, \tau) = E\left[\sum_k \tilde{Z}_k \phi_k(t) \sum_m \tilde{Z}_m \phi_m(\tau)\right]$$

إذا فرضنا أن المتحولات العشوائية Z_1, Z_2, \dots عبارة عن متحولات مستقلة موزعة بشكل متماثل وذات تباين σ^2 ، عندئذ يكون $E[\tilde{Z}_k \tilde{Z}_m] = 0$ من أجل $k \neq m$ و $E[\tilde{Z}_k \tilde{Z}_m] = \sigma^2$ من أجل $k = m$. لذلك بتجاهل مسألة التقارب، يمكن تبسيط (7.7) لتصبح:

$$(8.7) \quad K_Z(t, \tau) = \sigma^2 \sum_k \phi_k(t) \phi_k(\tau)$$

لتوسيع أخذ العينات حيث، $\phi_k(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T} - k\right)$ ، يمكن أن نرى (انظر (48.7)) أن المجموع في العلاقة (8.7) هو ببساطة $\text{sinc}\left(\frac{t-\tau}{T}\right)$. لذلك فمن أجل الأمثلة 2.2.7 و3.2.7 يعطى التباين المشترك بالعلاقة

$$K_Z(t, \tau) = \sigma^2 \text{sinc}\left(\frac{t-\tau}{T}\right)$$

حيث $\sigma^2 = 1$ لحالة PAM الإثنائي في المثال 2.2.7. لاحظ أن هذا التباين يعتمد فقط على $t - \tau$ وليس على العلاقة بين t و τ ونقاط أخذ العينات kT . سندرس عمليات أخذ العينات هذه بتفصيل أكثر لاحقاً.

⁹⁹ يُسمى عادة التغير المشترك الذاتي *auto covariance* لتمييزه عن التغير بين عمليتين؛ ولهذا فلن نحتاج للإشارة لاحقاً إلى هذا النوع من التغير.

3.2.7 قنوات الضجيج الجمعي

تعرف قنوات الاتصال الأكثر أهمية لنا بقنوات الضجيج الجمعي. يتم نمذجة كل من دخل القناة والضجيج كمتحولات عشوائية، $\{X(t); t \in \mathbb{R}\}$ و $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$ ، وكلاهما خلال نفس فضاء العينة الأساسي Ω . خرج القناة هو عبارة عن متحول عشوائي آخر $\{Y(t); t \in \mathbb{R}\}$ و $Y(t) = X(t) + Z(t)$ وهذا يعني أنه من أجل كل فترة t فإن المتحول العشوائي $Y(t)$ يساوي $X(t) + Z(t)$. لاحظ أنه دوماً يمكن تعريف ضجيج القناة بأنه الفرق بين خرج القناة ودخلها $Y(t) - X(t)$. تعبير الضجيج الجمعي بالأصل يتضمن أيضاً افتراض أن العمليات $\{X(t); t \in \mathbb{R}\}$ و $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$ مستقلة إحصائياً.¹⁰⁰

وكما تمت المناقشة سابقاً، فإن نموذج الضجيج الإضافي $Y(t) = X(t) + Z(t)$ يفترض ضمناً أن تخميد القناة، وتأخير الانتشار، وتردد الحامل والطور معروفة وتم تعويضها. ويفترض أيضاً أن موجة الدخل لا تتأثر بأي اضطرابات أخرى من الضجيج $Z(t)$. تتم نمذجة الضجيج الجمعي غالباً كعملية غوسية، كما سيناقش في الفقرة التالية. وحتى عندما لا تتم نمذجته على شكل غوسي، فإنه غالباً ما يُنمذج كتعديل للعملية الغوسية. تمت دراسة العديد من القواعد الغامضة في مجال الهندسة والإحصاء عن الضجيج دون أي ذكر للعمليات العشوائية، ولكن هذه القواعد غالباً ما تكون صالحة للعمليات الغوسية فقط.

3.7 المتحولات العشوائية الغوسية، الأشعة، والعمليات

تُعرف هذه الفقرة أولاً للمتحولات العشوائية الغوسية، ثم الأشعة الغوسية المشتركة، وأخيراً العمليات العشوائية الغوسية. ومن ثم يتم إدراج تابع التباين المشترك والكثافة المشتركة للأشعة العشوائية الغوسية. وأخيراً تُدرج عدة شروط مكافئة للمتحولات العشوائية لتكون غوسية مشتركة.

المتحول العشوائي W عبارة عن متحول عشوائي مُستنظم أو باختصار متحول عشوائي عادي¹⁰¹ وله كثافة احتمال

$$f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{w^2}{2}\right]$$

هذه الكثافة متناظرة بالنسبة لمبدأ الإحداثيات ولذلك القيمة المتوسطة لـ W تساوي الصفر. التباين يساوي الواحد، والذي على الأرجح مألوف من الاحتمال الابتدائي ويتم توضيحه في التمرين 1.7. المتحول العشوائي Z هو متحول عشوائي غوسي إذا تم تقييسه وإزاحة نسخة منه للمتحول العشوائي، أي إذا كان $Z = \sigma W + \bar{Z}$ من أجل المتحول العشوائي W . يمكن اعتبار \bar{Z} هو متوسط Z و σ^2 هو التباين¹⁰². تكون كثافة الاحتمال لـ Z (من أجل $\sigma^2 > 0$) هي

$$(9.7) \quad f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(z - \bar{Z})^2}{2\sigma^2}\right]$$

يرمز للمتحول العشوائي الغوسي Z الذي قيمته المتوسطة \bar{Z} وتباينه σ^2 بـ $Z \sim \mathcal{N}(\bar{Z}, \sigma^2)$. إن المتحولات العشوائية الغوسية المستخدمة لتمثيل الضجيج هي غالباً ذات قيمة متوسطة مساوية للصفر. مثل هذه المتحولات العشوائية تكون ذات كثافة $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ ويشار لها بـ $f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right]$. تعتبر المتحولات العشوائية الغوسية ذات القيمة المتوسطة المساوية للصفر مهمة لنمذجة الضجيج والظواهر العشوائية الأخرى للأسباب التالية :

- أنها تمثل تقريباً جيداً لعدد كبير من المتحولات العشوائية المستقلة ذات القيمة المتوسطة المساوية للصفر (تذكر نظرية النهاية المركزية).
- تمتلك عدداً من الخواص الحدية، كما سيناقش لاحقاً، وهي تتحسس لعدد من المتحولات العشوائية الأكثر عشوائية من أجل تباين معين.

¹⁰⁰ ويشكل، أكثر تحديداً، هذا يعني أنه من أجل كل $k > 0$ ، فإن كل الفترات t_1, \dots, t_k و τ_1, \dots, τ_k ، المتحولات العشوائية $X(t_1), \dots, X(t_k)$ مستقلة إحصائياً عن $Z(\tau_1), \dots, Z(\tau_k)$.
¹⁰¹ يستخدم بعضهم تعبير المتحول العشوائي العادي كمرادف للمتحول العشوائي الغوسي.

¹⁰² من المناسب الإشارة لـ Z بوصفه غوسياً حتى في حالة الإشارات المحددة حيث $\sigma = 0$ ، لكن العلاقة (9.7) لا تعود صالحة عندها.

- سهلة التلاعب بها من الناحية التحليلية، بوساطة بعض الخواص البسيطة.
- تُستخدم كنماذج مشتركة لضجيج القناة، وفي الحقيقة غالباً ما تفترض المراجع أن الضجيج تمت نمذجته كمتحول عشوائي غوسي بقيمة متوسطة مساوية للصفر دون الإشارة لذلك صراحةً.

تعريف 1.3.7. تُعتبر مجموعة n من المتحولات العشوائية الغوسية المشتركة Z_1, \dots, Z_n ذات قيمة متوسطة صفرية إذا كان هناك مجموعة من المتحولات العشوائية العادية المستقلة والموزعة بشكل متماثل W_1, \dots, W_ℓ بحيث إن كل $Z_k, 1 \leq k \leq n$ يمكن تمثيلها بالشكل

$$(10.7) \quad Z_k = \sum_{m=1}^{\ell} a_{km} W_m; \quad 1 \leq k \leq n$$

حيث $\{a_{km}; 1 \leq k \leq n, 1 \leq m < \ell\}$ هي صيف من الأعداد الحقيقية. وتكون Z'_1, \dots, Z'_n غوسية مشتركة إذا كانت $Z'_k = Z_k + \bar{Z}'_n$ حيث إن المجموعة Z_1, \dots, Z_n غوسية مشتركة بقيمة متوسطة صفرية و $\bar{Z}'_1, \dots, \bar{Z}'_n$ مجموعة من الأعداد الحقيقية.

من المناسب التعبير عن مجموعة ذات n متحول عشوائي Z_1, \dots, Z_n بوصفها شعاعاً عشوائياً¹⁰³ $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)^T$. على فرض أن A عبارة عن مصفوفة حقيقية $\ell \times n$ وأن عناصرها من الشكل $\{a_{km}; 1 \leq k \leq n, 1 \leq m < \ell\}$ ، فإنه يمكن تمثيل المعادلة (10.7) بشكل مختصر كما يلي

$$(11.7) \quad \mathbf{Z} = A \mathbf{W}$$

وبالمثل يمكن تمثيل الشعاع العشوائي الغوسي المشترك \mathbf{Z}' أنف الذكر بالشكل $\mathbf{Z}' = A \mathbf{Z} + \bar{\mathbf{Z}}'$ حيث $\bar{\mathbf{Z}}'$ عبارة عن n شعاعاً من الأعداد الحقيقية.

فيما تبقي من هذا الفصل، سنفرض أن جميع المتحولات العشوائية، والأشعة العشوائية، والعمليات العشوائية ذات قيمة متوسطة مساوية للصفر ما لم يُشر صراحةً لغير ذلك. وينظر بشكل مختلف، فقط للاهتزازات التي يتم تحليلها بإضافة وسائل في النهاية.¹⁰⁴ يبين التمرين 2.7 أن أي مجموع $\sum a_{km} W_m$ من المتحولات العشوائية العادية المستقلة والموزعة بشكل متماثل W_1, \dots, W_n عبارة عن متحول عشوائي غوسي، لذلك فإن كل Z_k في العلاقة (10.7) هو غوسي. يعني الغوسي المشترك أكثر بكثير من ذلك على كل حال. يجب أن تكون المتحولات العشوائية Z_1, \dots, Z_n أيضاً ذات صلة بالتركيبات الخطية لنفس المجموعة من المتحولات العادية المستقلة والموزعة بشكل متماثل. وتوضح التمارين 3.7 و 4.7 بعض الأمثلة عن أزواج من المتحولات العشوائية التي هي بشكل إفرادي غوسية لكنها غير غوسية مشتركة. هذه الأمثلة مصنوعة قليلاً، لكنها تبين بوضوح أن الكثافة المشتركة للمتحولات العشوائية الغوسية المشتركة تكون أكثر تقييداً بكثير من الكثافات المشتركة المحتملة الناجمة عن تقييد التوزيعات الهامشية لتكون غوسية.

يبدو التعريف المذكور أعلاه للغوسي المشترك مفتعلاً قليلاً في البداية، لكنه في الحقيقة طبيعي جداً. تمثل المتحولات العشوائية الغوسية غالباً نماذج ممتازة لعمليات الضجيج الفيزيائية لأن الضجيج غالباً ما ينتج عن العديد من الآثار الصغيرة. إن نظرية النهاية المركزية هي وسيلة رياضية دقيقة للقول إن مجموع عدد كبير جداً من المتحولات العشوائية المستقلة وذات قيمة متوسطة صفرية تكون تقريباً غوسية بقيمة متوسطة مساوية للصفر. حتى عند وجود مجموعات مختلفة غير مستقلة إحصائياً عن بعضها، فهي عبارة عن تركيبات خطية من مجموعة مشتركة من المتحولات العشوائية الصغيرة المستقلة. لذلك افتراض أن المتحول غوسي مشترك يرتبط ارتباطاً وثيقاً بافتراض أن الضجيج عبارة عن مجموع عدد كبير من الاضطرابات العشوائية الصغيرة المستقلة أساساً. افتراض أن المتحولات الأساسية غوسية يؤدي ببساطة إلى جعل نموذج التحليل نظيفاً وقابلاً للحل.

خاصية مهمة لأي متحول عشوائي غوسي مشترك \mathbf{Z} ذي n بعداً، هي كما يلي: من أجل أي مصفوفة B حقيقة $m \times n$ ، فإن المتحول العشوائي $\mathbf{Y} = B\mathbf{Z}$ أيضاً غوسي مشترك. لبيان ذلك نفترض $\mathbf{Z} = A\mathbf{W}$ ، حيث متحول عشوائي عادي. يكون عندها

$$(12.7) \quad \mathbf{Y} = B\mathbf{Z} = B(A\mathbf{W}) = (BA)\mathbf{W}$$

¹⁰³ هذا النوع من الأشعة العشوائية لأجل n معطاة خلال فضاء عينة يحقق بديهيات فضاء الأشعة، لكن هنا يستخدم رمز الشعاع فقط للتبسيط.

¹⁰⁴ عند دراسة التقدير والاحتمالات الشرطية، هذا يعني أنها أصبحت جزءاً متكاملًا مع العديد من البراهين، لكن هذه البراهين ليست مركزية هنا.

بما أن BA مصفوفة حقيقية، تكون Y غوصية مشتركة. يحصل التطبيق المفيد لهذه الخاصية عندما تكون A قطرية، لذلك فإن Z يكون لها مركبات اعتباطية غوصية مستقلة. هذا يعني أن $Y = BZ$ غوصية مشتركة كلما احتوى Z على مركبات غوصية مستقلة. تطبيق مهم آخر هو عندما تكون B مصفوفة $1 \times n$ و Y متحول عشوائي. لذلك فإن كل تركيب خطي $\sum_{k=1}^n b_k Z_k$ من المتحول العشوائي الغوصي $Z = (Z_1, \dots, Z_n)^T$ يكون غوصياً. وسوف نرى لاحقاً في هذه الفقرة إذا وفقط إذا كانت الخاصية؛ أي، إذا كان كل تركيب خطي من المتحول العشوائي Z غوصياً، فإن Z هو غوصي مشترك. لدينا الآن آلية لتحديد القيمة المتوسطة الصفرية للعمليات العشوائية الغوصية.

تعريف 2.3.7. تكون $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$ عملية غوصية بقيمة متوسطة صفرية، إذا كان لكل الأعداد الموجبة n ولكل المجموعات المنتهية ذات الفترات t_1, \dots, t_n ، مجموعة المتحولات العشوائية $Z(t_1), \dots, Z(t_n)$ عبارة عن مجموعة متحولات عشوائية غوصية مشتركة (بقيمة متوسطة صفرية).

إذا كان التباين المشترك $K_Z(t, \tau) = E[Z(t)Z(\tau)]$ معروفاً من أجل كل زوج من الفترات t, τ ، عند ذلك فإنه من أجل أي مجموعة منتهية من الفترات t_1, \dots, t_n ، فإن $E[(t_k)Z(t_m)]$ تكون معلومة لكل زوج (t_k, t_m) في هذه المجموعة. سوف تبين الفقرتان الفرعيتان التاليتان أن الكثافة الاحتمالية المشتركة لأي مجموعة كهذه (بقيمة متوسطة صفرية) عبارة عن متحولات عشوائية غوصية مشتركة تعتمد على التباين المشترك في القسم السابق، تكون المشترك لها. العملية العشوائية ذات القيمة المتوسطة غير المساوية للصفر تتحدد بشكل مماثل بتابع التباين المشترك وقيمتها المتوسطة.

1.3.7 مصفوفة التباين المشترك للشعاع العشوائي الغوصي المشترك

ليكن n صف من المتحولات العشوائية (بقيمة متوسطة صفرية) Z_1, \dots, Z_n ممثلة كشعاع عشوائي $Z = (Z_1, \dots, Z_n)^T$. وكما في الفقرة السابقة، يكون Z غوصياً مشتركاً إذا كان $Z = AW$ حيث $W = (W_1, W_2, \dots, W_n)^T$ عبارة عن شعاع لمتحولات عشوائية عادية مستقلة وموزعة بشكل متماثل A عبارة عن مصفوفة حقيقية $\ell \times n$. فإن كل متحول عشوائي Z_k وجميع التركيبات الخطية من Z_1, \dots, Z_n تكون غوصية.

التباين المشترك لمتحولين عشوائيين (بقيمة متوسطة صفرية) Z_1, Z_2 هو $E[Z_1, Z_2]$. من أجل كل متحول عشوائي $Z = (Z_1, \dots, Z_n)^T$ فإن التباين المشترك بين جميع أزواج المتحولات العشوائية من المناسب تمثيله بمصفوفة تباين مشترك ذات $n \times n$ عنصراً.

$$K_Z = E[ZZ^T]$$

يطور الملحق 1.A7 عدداً من خواص مصفوفات التباين المشترك (بما في ذلك حقيقة أنها مماثلة لصنف من المصفوفات المحددة غير السالبة) من أجل الشعاع $W = W_1, \dots, W_\ell$ من المتحولات العشوائية الغوصية المقيسة المنتظمة $E[W_j W_m] = 0$ من أجل $j \neq m$ وتساوي الواحد من أجل $j = m$. لذلك

$$K_W = E[W W^T] = I_\ell$$

حيث I_ℓ هو مصفوفة $\ell \times \ell$. من أجل الشعاع الغوصي المشترك ذي القيمة المتوسطة الصفرية $Z = AW$ ، تكون مصفوفة التباين المشترك هي:

$$(13.7) \quad K_Z = E[A W W^T A^T] = A E[W W^T] A^T = A A^T$$

كثافة الاحتمال $f_Z(z)$ للمتحول العشوائي $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)^T$ هي عبارة عن الكثافة الاحتمالية المشتركة للمركبات Z_1, \dots, Z_n . مثال هام على ذلك هو المتحول العشوائي المستقل والموزع بشكل متماثل W حيث المركبات $W_k, 1 \leq k \leq n$ ، مستقلة وموزعة بشكل متماثل وعادية، $W_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$. بأخذ جداء n كثافة من المتحولات العشوائية المستقلة، فإن الكثافة $W = (W_1, W_2, \dots, W_n)^T$ هي:

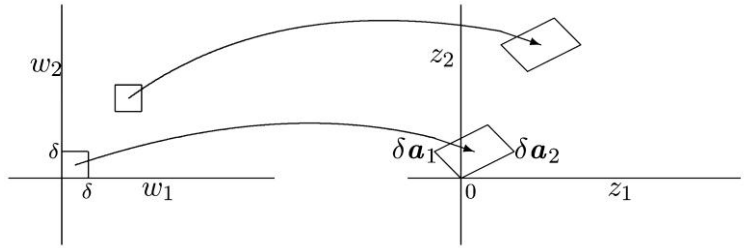
$$(14.7) \quad f_W(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(\frac{-\omega_1^2 - \omega_2^2 - \dots - \omega_n^2}{2}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(\frac{-\|\omega\|^2}{2}\right)$$

يبين هذا أن كثافة W عند قيمة عينة ω تعتمد فقط على مربع المسافة $\|\omega\|^2$ لقيمة العينة من نقطة تقاطع مبدأ الإحداثيات. لذلك

فإن $f_W(\omega)$ متناظرة حول مبدأ الإحداثيات والنقاط ذات الكثافة الاحتمالية المتساوية تتوضع على المجالات متحدة المركز حول مبدأ الإحداثيات.

2.3.7 الكثافة الاحتمالية للشعاع العشوائي الغوسي المشترك

لنعتبر التحويل $Z = AW$ حيث Z و W يحتوي كل منهما على n مركبة و A مصفوفة $n \times n$. إذا اعتبرنا a_1, a_2, \dots, a_n هو عدد الأعمدة n ل A ، عندئذ يعني هذا أن $Z = \sum_m a_{km} W_m$. أي، من أجل أي قيم عينة w_1, \dots, w_n من W ، تكون قيمة العينة المقابلة ل Z هي $z = \sum_m a_{km} w_m$. وبشكل مماثل إذا افترضنا أن b_1, \dots, b_n تمثل عدد الأسطر ل A ، عندئذ $Z_k = b_k W$. افترض أن B_δ عبارة عن مكعب، δ من جهة قيم العينة ل W معرفة بـ $B_\delta = \{w: 0 \leq w_k \leq \delta; 1 \leq k \leq n\}$ (انظر الشكل 1.7). المجموعة B'_δ من الأشعة $z = Aw$ من أجل $w \in B_\delta$ عبارة عن متوازي سطوح جوانبه الأشعة $\delta a_1, \dots, \delta a_n$. المحدد $\det(A)$ ، للمجموعة له خاصية هندسية رائعة بأن طويلته، $|\det(A)|$ تساوي حجم متوازي السطوح بجوانب $a_k; 1 \leq k \leq n$. لذلك مكعب الوحدة B_δ أعلاه ذو الحجم δ^n تتحول بواسطة A لمتوازي السطوح بحجم $|\det(A)|\delta^n$.



الشكل 1.7: مثال يوضح كيف تحول $Z = AW$ المكعبات إلى متوازيات سطوح. افترض أن $Z_1 = -W_1 + 2W_2$ وأن $Z_2 = W_1 + W_2$. يوضح الشكل مجموعة أزواج العينة z_1, z_2 المقابلة لـ $0 \leq w_1 \leq \delta$ و $0 \leq w_2 \leq \delta$. ويبيّن أيضاً أن التحول في نفس المكعب يقابل التحول في نفس متوازي السطوح.

افترض أن الأعمدة a_1, \dots, a_n مستقلة خطياً. هذا يعني أن الأعمدة يجب تشكيلها أساساً من \mathbb{R}^n ، وبالتالي فإن كل شعاع z عبارة عن بعض التركيبات الخطية من هذه الأعمدة، أي أن $z = Aw$ من أجل شعاع w . يجب أن تكون المصفوفة A عندئذ قابلة للعكس، أي أن هناك مصفوفة A^{-1} بحيث يكون $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ حيث I_n مصفوفة متجانسة ذات $n \times n$. تُقابل المصفوفة A أشعة الوحدة في \mathbb{R}^n إلى أشعة a_1, \dots, a_n وتعيد المصفوفة A^{-1} الأشعة a_1, \dots, a_n إلى أشعة الوحدة.

إذا كانت أعمدة المصفوفة A غير مستقلة خطياً، أي أن، A غير قابلة للعكس، عندئذ تحول A مكعب الوحدة في \mathbb{R}^n إلى فضاء جزئي ذي بعد أقل من n . في مصطلحات الشكل 1.7 سيتم تحويل مكعب الوحدة إلى قطعة خط مستقيم. إن المنطقة في فضاء ثنائي الأبعاد مؤلف من قطعة مستقيمة تساوي للصففر، وبشكل أكثر عمومية يكون الحجم في الفضاء n في المجموعة ذات الأبعاد الأقل من النقاط يساوي للصففر. وبدلالة المحدد فإن $\det(A) = 0$ لأي مصفوفة غير قابلة للعكس A .

بافتراض مرة أخرى أن A قابلة للعكس، دع z تمثل قيمة عينة من Z ، ولتكن $w = A^{-1}z$ تمثل قيمة العينة المقابلة لها من W . افترض أن المكعب التدريجي $w + B_\delta$ ذو زاوية عند w . من أجل δ صغيرة جداً، فإن احتمال $P_\delta(w)$ أن تقع W في هذا المكعب هو $f_W(w)\delta^n$ إضافة لحدود تنتهي للصففر بشكل أسرع من δ^n عندما $\delta \rightarrow 0$. هذا المكعب في محيط w يتحول إلى متوازي سطوح ذي حجم $|\det(A)|\delta^n$ في محيط z ، ولا تتحول أي قيمة عينة أخرى من W إلى متوازي السطوح هذا. لذلك $P_\delta(w)$ تساوي أيضاً لـ $|\det(A)|f_Z(z)\delta^n$ إضافة لحدود ضئيلة مهملة. بأخذ النهاية $\delta \rightarrow 0$ نحصل على:

$$(15.7) \quad f_Z(z)|\det(A)| = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{P_\delta(w)}{\delta^n} = f_W(w)$$

بما أن $w = A^{-1}z$ نصل على الصيغة الواضحة

$$(16.7) \quad f_Z(z) = \frac{f_W(A^{-1}z)}{|\det(A)|}$$

وتصلح هذه المعادلة لأي شعاع عشوائي W ذي كثافة، لكن نحن نهتم بالشعاع W للمتحولات العشوائية الغوسية المستقلة والموزعة بشكل متماثل $\mathcal{N}(0,1)$. بتعويض (14.7) في (16.7) نجد أن

$$(17.7) \quad f_Z(z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\det(A)|} \exp\left(-\frac{\|A^{-1}z\|^2}{2}\right)$$

$$(18.7) \quad = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\det(A)|} \exp\left[-\frac{1}{2}z^T(A^{-1})^T A^{-1}z\right]$$

يمكن تبسيط هذه العلاقات إلى حد ما بالتذكر من المعادلة (13.7) أن مصفوفة التباين المشترك لـ Z معطاة بالعلاقة $K_Z = AA^T$. ومن ثمَّ $K_Z^{-1} = (A^{-1})^T A^{-1}$.

بتعويض هذا في (18.7) وملاحظة أن $\det(K_Z) = |\det(A)|^2$ نحصل على

$$(19.7) \quad f_Z(z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det(K_Z)}} \exp\left[-\frac{1}{2}z^T K_Z^{-1}z\right]$$

لاحظ أن كثافة الاحتمال تعتمد فقط على مصفوفة التباين المشترك لـ Z وليس مباشرةً على المصفوفة A . تعتمد كثافة الاحتمال المبينة آنفاً على كون A غير مفردة. إذا كانت A مفردة، عندئذ يكون على الأقل أحد صفوفها عبارة عن مجموعة خطية من صفوف أخرى، ومن ثمَّ، فمن أجل قيمة لـ m ، حيث $1 \leq m \leq n$ ، فإن Z_m هي مجموعة خطية من Z_k الأخرى. ويبقى الشعاع العشوائي Z غوسياً على نحو مشترك، لكن كثافة الاحتمال المشتركة غير موجودة (ما لم يرغب أحد في اعتبار كثافة Z_m نبضة واحدة عند نقطة محددة بقيم العينة للمتحولات الأخرى). من الممكن كتابة تابع التوزيع لهذه الحالة، باستخدام توابع الخطوة للمتحولات العشوائية غير المستقلة، لكن الأمر لا يستحق اختلاط الرموز. ثمة طريقة أكثر مباشرة تتمثل في مواجهة المشكلة وإيجاد الكثافة لأكبر مجموعة من المتحولات العشوائية المستقلة خطياً، وتوصيف المجموعات الأخرى كتركيبات خطية مؤكدة. من الضروري أن نفهم أن ثمة فرقاً كبيراً بين كون المتحولات العشوائية غير مستقلة إحصائياً وغير مستقلة خطياً. فإذا كانت غير مستقلة خطياً، فإن واحداً أو أكثر من هذه المتحولات يكون تابعاً مؤكداً من المتحولات الأخرى، بينما تدلّ التبعية الإحصائية على علاقة احتمالية.

هذه النتائج ملخصة في النظرية التالية:

نظرية 1.3.7 (كثافة المتحولات العشوائية الغوسية المشتركة). لتكن Z تمثل متحولاً عشوائياً غوسياً مشتركاً (بقيمة متوسطة صفرية) ذا مصفوفة تباين مشتركة غير فردية K_Z . عند ذلك تُعطى كثافة الاحتمال بالعلاقة (19.7). وإذا كانت K_Z فردية، فإن $f_Z(z)$ غير موجودة لكن الكثافة في (19.7) يمكن تطبيقها على أي مجموعة من المتحولات العشوائية المستقلة خطياً من Z_1, \dots, Z_n .

في عملية غوسية غير صفرية $Z(t)$ يُحدّد تابع التباين المشترك $K_Z(t, \tau)$ العملية $\mathbf{E}[Z(t_k)Z(t_m)]$ لفترات اعتباطية t_k و t_m وبالتالي يُحدّد مصفوفة التباين المشترك لأي مجموعة منتهية من الفترات t_1, \dots, t_n . من النظرية أعلاه، فهو يحدّد أيضاً توزيع الاحتمال المشترك لتلك المجموعة من الفترات، ومن ثمَّ يحدّد تابع التباين جميع التوزيعات الاحتمالية المشتركة لكل المجموعات المنتهية من الفترات، وبالتالي يحدّد العملية وفق¹⁰⁵ الفقرة 2.7. باختصار لدينا النظرية الهامة التالية.

نظرية 2.3.7 (العملية الغوسية). توصف العملية الغوسية ذات القيمة المتوسطة الصفرية بتابعها التبايني المشترك $K_Z(t, \tau)$.

¹⁰⁵ كما سنتم المناقشة لاحقاً، مع التركيز على سلوك العملية العشوائية في كل المجموعات المنتهية من الفترات الزمنية يكون لها بعض من نفس المشاكل التي تتحدد بالتابع pointwise أكثر من المصطلح المكافئ L_2 . وهذا يمكن تجاهله في الوقت الحاضر.

3.3.7 حالة خاصة لشعاع عشوائي غوسي ثنائي الأبعاد وبقيمة متوسطة صفرية

سنكتب الآن كثافة الاحتمال الواردة في (19.7) بالتفصيل لحالة ثنائية الأبعاد. دع $E[Z_1^2] = \sigma_1^2$ و $E[Z_2^2] = \sigma_2^2$ و $E[Z_1 Z_2] = k_{12}$.

وبالتالي

$$K_Z = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & k_{12} \\ k_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

لتكن ρ تمثل التباين المشترك المستنظم $\rho = k_{12}/(\sigma_1 \sigma_2)$. فيكون: $\det(K_Z) = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - k_{12}^2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)$. لاحظ أن ρ يجب أن تحقق الشروط $|\rho| \leq 1$ و $|\rho| = 1$ ليكون K_Z غير فردية.

$$K_Z^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - k_{12}^2} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -k_{12} \\ k_{12} & \sigma_1^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \rho^2} \begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & -\rho/(\sigma_1 \sigma_2) \\ -\rho/(\sigma_1 \sigma_2) & 1/\sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - k_{12}^2}} \exp\left(\frac{-z_1^2 \sigma_2^2 + 2z_2 z_1 k_{12} - z_2^2 \sigma_1^2}{2(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - k_{12}^2)}\right)$$

$$(20.7) \quad = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}} \exp\left(\frac{-(z_1/\sigma_1)^2 + 2\rho(z_1/\sigma_1)(z_2/\sigma_2) - (z_2/\sigma_2)^2}{2(1 - \rho^2)}\right)$$

المنحنيات ذات الكثافة الاحتمالية المتساوية في المستوي تتطابق مع النقاط التي تكون فيها الإزاحة الزاوية للتابع الأسّي في (20.7) ثابتة. هذه الإزاحة تربيعية ولذلك فإن النقاط ذات الكثافة الاحتمالية المتساوية تشكّل قطعاً ناقصاً مركزه مبدأ الإحداثيات. القطوع الناقصة المقابلة لقيم مختلفة من كثافة الاحتمال متحدة المركز، والقطوع الناقصة الأكبر توافق الكثافات الأقل.

إذا كان التباين المشترك المستنظم ρ يساوي الصفر، فإن محاور القطع الناقص هي المحور الأفقي والعمودي للمستوي، إذا كان $\sigma_1 = \sigma_2$ ، فإن القطع الناقص يتحول لدائرة، ومن ناحية أخرى يمتد القطع الناقص في اتجاه الانحراف المعياري الأكبر. إذا كان $\rho > 0$ ، فإن الكثافة في الربعين الأول والثالث تزداد على حساب الربعين الثاني والرابع، وبالتالي تمتد القطوع الناقصة في الربعين الأول والثالث. ويحدث العكس، بالطبع من أجل $\rho < 0$.

النقطة الرئيسة التي يمكن استخلاصها من هذا المثال، على كل حال أن العبارة المفصلة لحالة ثنائي الأبعاد في (20.7) تكون غير مرتبة. عدم الترتيب يحصل بشكل أسوأ بكثير في الأبعاد الأعلى. استخدام رمز الشعاع ضروري غالباً. ينبغي للمرء التفكير مباشرة في معادلات الأشعة و استخدام برامج الحاسب القياسية لإجراء العمليات الحسابية.

4.3.7 حيث $Z = A W$ متعامدة

المصفوفة الحقيقية A ذات $n \times n$ عنصراً والتي فيها $AA^T = I_n$ يطلق عليها المصفوفة المتعامدة أو المصفوفة المتعامدة المنتظمة (المستظمة أكثر ملاءمة، لكن المتعامدة أكثر انتشاراً). من أجل $Z = A W$ ، حيث W طبيعية مستقلة وموزعة بشكل متماثل و A متعامدة، $K_Z = AA^T = I_n$. وكذلك $K_Z^{-1} = I_n$ وكذلك نصبح المعادلة (19.7) كما يلي:

$$(21.7) \quad f_Z(z) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2} z^T z\right]}{(2\pi)^{n/2}} = \prod_{k=1}^n \frac{\exp[-z_k^2/2]}{\sqrt{2\pi}}$$

هذا يعني أن A تحول W إلى شعاع عشوائي Z له نفس كثافة الاحتمال، وبالتالي تبقى مركبات Z طبيعية مستقلة وموزعة بشكل متماثل. لفهم هذا بشكل أفضل، لاحظ أن $AA^T = I_n$ يعني أن A^T مقلوب للمصفوفة A وبالتالي أن $A^T A = I_n$. لنضع a_m تمثل العمود رقم m للمصفوفة A ، فإن المعادلة $AA^T = I_n$ تعني أن $a_m^T a_j = \delta_{mj}$ من أجل كل m و j ، حيث $1 \leq m, j \leq n$ ، أي أن أعمدة المصفوفة A تكون متعامدة. وهكذا من أجل المثال ثنائي الأبعاد، تتحول أشعة الوحدة. e_1, e_2 إلى أشعة متعامدة a_1, a_2 ، لهذا السبب يقوم التحويل ببساطة بتدوير النقاط في المستوي. على الرغم من أنه من الصعب تصور مثل هذا التحويل في الفضاء ذي الأبعاد الأعلى، فإنه لا يزال يُسمّى الدوران، وله خاصية أن $\|Aw\|^2 = w^T A^T A w = w^T w = \|w\|^2$ ، والتي هي تماماً $w^T w = \|w\|^2$ وبالتالي كل نقطة w تتحول إلى نقطة Aw على نفس المسافة من المبدأ بحذ ذاته.

ليس فقط أعمدة المصفوفة المتعامدة تكون متعامدة مستنظمة، لكن الصفوف، ولنقل $\{b_k; 1 \leq k \leq n\}$ هي أيضاً متعامدة مستنظمة (كما تمكن رؤيتها مباشرةً من $AA^T = I_n$). بما أن $Z_k = b_k W$ ، هذا يعني أنه، من أجل أي مجموعة من الأشعة المتعامدة المستنظمة b_1, \dots, b_n ، تكون المتحولات العشوائية $Z_k = b_k W$ طبيعية مستقلة وموزعة بشكل متماثل. من أجل $1 \leq k \leq n$.

5.3.7 كثافة احتمال الأشعة الغوصية وفق تعابير المحاور الأساسية

تصف هذه الفقرة الجزئية ما هو الأكثر ملاءمةً غالباً لتمثيل الكثافة الاحتمالية ذات n بعداً (بقيمة متوسطة صفرية) لمتحول عشوائي غوصي Z ذي مصفوفة تباين مشترك غير فردية K_Z . كما هو مبين في الملحق 1.A7، المصفوفة K_Z ذات n من الأشعة الذاتية الحقيقية المتعامدة المستنظمة، q_1, \dots, q_n ، مع قيم مقابلة حقيقية ذاتية غير سالبة (لكن ليس بالضرورة مميزة¹⁰⁶)، $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. أيضاً من أجل أي شعاع z يتبين أن $z^T K_Z^{-1} z$ يمكن أن نعبّر عنه بالشكل $\sum_k \lambda_k^{-1} |\langle z, q_k \rangle|^2$. وبالتعويض في (19.7)، ينتج لدينا:

$$(22.7) \quad f_Z(z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det(K_Z)}} \exp \left[- \sum_k \frac{|\langle z, q_k \rangle|^2}{2\lambda_k} \right]$$

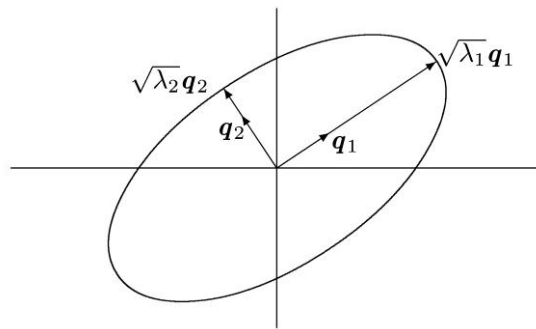
لاحظ أن $\langle z, q_k \rangle$ هي إسقاط z على الاتجاه رقم k من n من الاتجاهات المتعامدة المستنظمة. يمكن التعبير عن محدد المصفوفة الحقيقية ذات $n \times n$ عنصراً بدلالة القيم n الذاتية (انظر الملحق 1.A7) حيث $\det(K_Z) \prod_{k=1}^n \lambda_k$. وبالتالي تصبح (22.7)

$$(23.7) \quad f_Z(z) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_k}} \exp \left[- \frac{|\langle z, q_k \rangle|^2}{2\lambda_k} \right]$$

هذا عبارة عن حاصل الجداء لـ n كثافة غوصية. يمكن تفسيره بالقول إن المتحولات العشوائية الغوصية $\{Z, q_k; 1 \leq k \leq n\}$ مستقلة إحصائياً مع فروقات $\{\lambda_k; 1 \leq k \leq n\}$. بتعبير آخر، إذا مثلنا المتحول العشوائي Z باستخدام q_1, \dots, q_n كأساس، عندئذ تصبح مركبات Z في نظام الإحداثيات هذا متحولات عشوائية مستقلة. وتسمى الأشعة الذاتية المستنظمة عندئذ المحاور الأساسية لـ Z . يمكن أن ينظر إلى هذه النتيجة بدلالة مُغلّف كثافة الاحتمال المتساوية من أجل Z (انظر الشكل 2.7). حيث يحقق كل مُغلّف العلاقة:

$$c = \sum_k \frac{|\langle z, q_k \rangle|^2}{2\lambda_k}$$

حيث c تتناسب مع لوغاريتم الكثافة الاحتمالية لهذا المُغلّف. هذه معادلة قطع ناقص مركزه مبدأ الإحداثيات، حيث تمثل q_k المحور رقم k للقطع الناقص وتمثل $\sqrt{2c\lambda_k}$ طول ذلك المحور.



الشكل 2.7: مُغلّفات الكثافة الاحتمالية المتساوية. النقاط z على المحور q_1 هي النقاط التي تكون فيها $\langle z, q_1 \rangle = 0$ والنقاط

على المحور q_2 توافق $\langle z, q_2 \rangle = 0$. النقاط على القطع الناقص المبين تحقق العلاقة $z^T K_Z^{-1} z = 1$.

توحي معادلات الكثافة الاحتمالية (19.7) و (23.7) أنه من أجل كل مصفوفة تباين مشترك K ، هناك متحول عشوائي غوصي مشترك

¹⁰⁶ إذا كانت القيمة الذاتية λ ذات قيم متعددة من m ، هذا يعني أن ثمة فضاءً جزئياً ذا m بعداً للأشعة q توافق $Kzq = \lambda q$ ؛ في هذه الحالة أي مجموعة متعامدة معبره من m هذه الأشعة يمكن اختيارها بوصفها الأشعة m الذاتية الموافقة لتلك القيمة الذاتية.

له نفس التباين المشترك، وبالتالي له كثافة الاحتمال نفسها. هذا في الواقع صحيح، لكن للتحقق من ذلك علينا إثبات أن لكل مصفوفة تباين مشترك K هناك مصفوفة A (وبالتالي متحول عشوائي $Z = AW$) حيث إن $K = AA^T$. هناك العديد من هذه المصفوفات من أجل K معطاة، لكن واحدة واضحة ملائمة معطاة في (88.7). كتابع للأشعة الذاتية والقيم الذاتية لـ K ، هي $A = \sum_k \sqrt{\lambda_k} \mathbf{q}_k \mathbf{q}_k^T$. وبالتالي من أجل كل مصفوفة تباين مشترك غير فردية، K ، يوجد متحول عشوائي غوصي مشترك له كثافة توافق (19.7) و (23.9).

6.3.7 تحويل فورييه للكثافات المشتركة

كما تمت الإشارة له في التمرين (2.7) يفيد تحويل فورييه للكثافات الاحتمالية في إيجاد الكثافة الاحتمالية لمجموع متحولات عشوائية مستقلة. وبشكل أعم، من أجل متحول عشوائي Z ، ذي n بعد، يمكننا إيجاد تحويل فورييه ذو n بعد لـ $f_Z(\mathbf{z})$ كما يلي:

$$(24.7) \quad \hat{f}_Z(\mathbf{s}) = \int \dots \int f_Z(\mathbf{z}) \exp(-2\pi i \mathbf{s}^T \mathbf{z}) d\mathbf{z}_1, \dots, d\mathbf{z}_n = \mathbb{E}[\exp(-2\pi i \mathbf{s}^T Z)]$$

إذا كان Z غوصياً مشتركاً، فهذا من السهل حسابه. من أجل أي قيمة معطاة \mathbf{s} ، $\mathbf{s} \neq 0$ ، دع $X = \mathbf{s}^T Z = \sum_k \mathbf{s}_k Z_k$. وبالتالي يكون X غوصياً وذا تباين $\mathbb{E}[\mathbf{s}^T Z Z^T \mathbf{s}] = \mathbf{s}^T K_Z \mathbf{s}$. من التمرين 2.7.

$$(25.7) \quad \hat{f}_X(\theta) = \mathbb{E}[\exp(-2\pi i \theta X)] = \exp\left[-\frac{(2\pi\theta)^2 \mathbf{s}^T K_Z \mathbf{s}}{2}\right]$$

بمقارنة (25.7) مع (24.7) من أجل $\theta = 1$ ، نجد أن:

$$(26.7) \quad \hat{f}_Z(\mathbf{s}) = \exp\left[-\frac{(2\pi)^2 \mathbf{s}^T K_Z \mathbf{s}}{2}\right]$$

يوضح الاستنتاج أعلاه أيضاً أن $\hat{f}_Z(\mathbf{s})$ يتم تحديدها بواسطة تحويل فورييه لكل تركيب خطي من عناصر Z بكلام آخر، إذا كان Z متحول عشوائي اعتباطي تباينه المشترك، وله خاصية أن كل المركبات الخطية من Z هي غوصية، ثم يعطى تحويل فورييه لكثافته بالعلاقة (26.7). وهكذا بافتراض أن تحويل فورييه للكثافة يحدد الكثافة بشكل فريد، فإنه يجب أن يكون Z غوصياً مشتركاً إذا كانت كل التركيبات الخطية من Z غوصية.

عدد من الشروط المكافئة سيتم اشتقاقها الآن والتي يكون الشعاع العشوائي Z (ذو القيمة المتوسطة الصفرية) عندها غوصي مشترك. بالخلاصة، كل من الشروط التالية هي شروط ضرورية وكافية ليكون الشعاع العشوائي Z ذو التباين المشترك غير الفردي K_Z غوصياً مشتركاً.

• $Z = AW$ حيث مركبات W طبيعية مستقلة وموزعة بشكل متماثل و $K_Z = AA^T$

• Z له كثافة احتمال مشتركة معطاة بالعلاقة (19.7)

• Z له كثافة احتمال مشتركة معطاة بالعلاقة (23.7)

• جميع التركيبات الخطية لـ Z هي متحولات عشوائية غوصية.

من أجل الحالة التي يكون فيها K_Z فردياً، فإن الشروط أعلاه ضرورية وكافية من أجل أي مجموعة جزئية ومستقلة خطياً من مركبات Z . درست هذه الفقرة فقط المتحولات العشوائية ذات القيمة المتوسطة الصفرية، والأشعة، والعمليات. تُطبَّق النتائج هنا مباشرة على الاضطرابات الكيفية للمتحولات العشوائية، والأشعة والعمليات. وبشكل خاص فإن كثافة لاحتمال للمتحول العشوائي الغوصي المشترك

Z ذي مصفوفة تباين مشترك غير فردية K_Z وقيمة متوسطة للشعاع \bar{Z} هي:

$$(27.7) \quad f_Z(\mathbf{z}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det(K_Z)}} \exp\left[-\frac{1}{2} (\mathbf{z} - \bar{Z})^T K_Z^{-1} (\mathbf{z} - \bar{Z})\right]$$

4.7 الوظائف الخطية والمرشحات للعمليات العشوائية

يوضح هذا القسم مفهوماً هاماً للوظائف الخطية في العمليات العشوائية الاعتبائية $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$ وبعد ذلك يُخصص للعمليات العشوائية الغوسية حيث يمكن استخدام نتائج القسم السابق. افترض أن توابع العينة $Z(t, \omega)$ من $Z(t)$ ذات شكل موجة حقيقي L_2 . يمكن أن ننظر لتوابع العينة هذه على أنها أشعة من \mathbb{R} خلال الفضاء L_2 ذي الأشكال الحقيقية للموجة. من أجل أي قيمة حقيقية L_2 معطاة لشكل الموجة $g(t)$ ، هناك جداء داخلي

$$\langle Z(t, \omega), g(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} Z(t, \omega)g(t)dt$$

من متراجحة شوارتز، تكون طويلة هذا الجداء الداخلي في الفضاء ذي التوابع الحقيقية L_2 عند الحد الأعلى بواسطة $\|Z(t, \omega)\| \|g(t)\|$ وبالتالي تمثل القيمة الحقيقية المحدودة لكل ω . وبعد ذلك نُحول نقاط العينة ω إلى أعداد حقيقية وبالتالي هي عبارة عن متحول عشوائي،¹⁰⁷ نرسم له $V = \int_{-\infty}^{\infty} Z(t)g(t)dt$. يسمّى هذا المتحول العشوائي V التابع الخطي للعملية $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$.

كمثال على أهمية التوابع الخطية، نذكر أن كاشف كل من تعديل مطال النبضة والتعديل المطالي المتعامد يتضمن مرشح $q(t)$ يتبعه أخذ عينات. يكون خرج المرشح عند زمن kT من أجل دخل $u(t)$ هو $\int u(t)q(kT-t)dt$. إذا احتوى دخل المرشح أيضاً على ضجيج جمعي $Z(t)$ فإن الخرج عند الزمن kT سوف يحتوي أيضاً على تابع خطي $\int Z(t)q(kT-t)dt$.

بالمثل، من أجل أي عملية $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$ (افترض مرة أخرى L_2 توابع عينة) وأي L_2 حقيقية تابعة لـ $h(t)$ ، اعتبر نتيجة مرور $Z(t)$ خلال المرشح ذي الاستجابة النبضية $h(t)$. من أجل أي L_2 ذو تابع عينة $Z(t, \omega)$ ، يكون خرج المرشح عند أي فترة زمنية محددة τ عبارة عن حاصل الجداء الداخلي

$$\langle Z(t, \omega), h(\tau - t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} Z(t, \omega)h(\tau - t)dt$$

من أجل كل قيمة حقيقية τ ، هذا يحول نقاط العينة ω إلى أعداد حقيقية وهكذا (بغض النظر عن القضايا القياسية النظرية)

$$V(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(t)h(\tau - t)dt \quad (28.7)$$

عبارة عن متحول عشوائي لكل τ . هذا يعني أن $\{V(\tau); \tau \in \mathbb{R}\}$ عملية عشوائية. هذا يسمّى العملية المرشحة الناتجة عن إمرار $Z(t)$ عبر المرشح $h(t)$. لا يمكن قول كثير عن هذه المشكلة العامة دون تطوير قدر كبير من الرياضيات، واقتصرنا بدلاً من ذلك على العمليات الغوسية وغيرها من أمثلة بسيطة جداً.

من أجل العملية الغوسية، كنا نأمل أن يكون التابع الخطي متحولاً عشوائياً غوسياً. توضح الأمثلة التالية أن هناك حاجة لبعض القيود حتى على صنف العمليات الغوسية.

المثال 1.4.7. دع $Z(t) = tX$ من أجل كل قيم $t \in \mathbb{R}$ حيث $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. يكون لتوابع العينة من هذه العملية الغوسية طاقة لانهاية باحتمال يساوي الواحد. ويكون خرج المرشح أيضاً طاقة لانهاية باستثناء الخيارات الخاصة جداً من $h(t)$.

المثال 2.4.7. من أجل كل $t \in [0,1]$ ، دع $W(t)$ تمثل متحول عشوائي غوسي، $W(t) \sim \mathcal{N}(0,1)$. افترض أيضاً أن $E[W(t)W(\tau)] = 0$ من أجل كل $t \neq \tau \in [0,1]$. توابع العينة لهذه العملية متقطعة في كل مكان¹⁰⁸. ليس لدينا آلية لتحديد ما إذا كانت توابع العينة قابلة للتكامل، ناهيك عن ما إذا كانت الوظائف الخطية أعلاه موجودة؛ وسنعود مرة أخرى لاحقاً لمواصلة مناقشة هذا المثال. بالطبع لتجنب القضايا الرياضية في المثال 2.4.7 آنفاً، جنباً إلى جنب مع مجموعة من القضايا الرياضية الأخرى، ونحن نبدأ مع عمليات غوسية محددة من حيث التوسعات المتعامدة المستنتظمة.

¹⁰⁷ ينبغي استخدام نظرية قياس مدى فضاء العينة Ω لتفسير هذه التحولات بعناية، لكن هذا غير ضروري لأنواع بسيطة من الحالات هنا وسوف تأخذنا أبعد مما ينبغي خارجها.
¹⁰⁸ الحالة الأسوأ، توابع العينة غير قابلة للقياس. هذه العملية لا نستطيع حتى تسميتها عملية عشوائية. في قياس الصياغة النظرية، لكنها تقدم مثلاً مثيراً للاهتمام في بعض الأحيان لقياس الصياغة النظرية.

1.4.7 العمليات الغوسية المعرفة على توسعات المتعامدة المنتظمة

دع $\{\phi_k(t); k \geq 1\}$ مجموعة قابلة للعد من التوابع المتعامدة المنتظمة الحقيقية ودع $\{Z_k; k \geq 1\}$ تمثل سلسلة من المتحولات العشوائية الغوسية المستقلة، $\{\mathcal{N}(0, \sigma_k^2)\}$. اعتبر أن العملية الغوسية معرفة بالعلاقة:

$$(29.7) \quad Z(t) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k \phi_k(t)$$

يمكن مبدئياً تعريف كل العمليات الغوسية المهمة ذات القيمة المتوسطة الصفرية بهذه الطريقة، على الرغم من أننا لن نبرهن ذلك. من الواضح أنه يمكننا إضافة القيمة المتوسطة إذا طلب ذلك، لكن العمليات ذات القيمة المتوسطة الصفرية تم افتراضها فيما يلي. افترض أولاً الحالة البسيطة التي فيها σ_k^2 لا تساوي الصفر فقط من أجل عدد محدود من قيم k ، ولنقل $1 \leq k \leq n$. في هذه الحالة $Z(t)$ من أجل كل $t \in \mathbb{R}$ ، هو مجموع محدود.

$$(30.7) \quad Z(t) = \sum_{k=1}^n Z_k \phi_k(t)$$

من المتحولات العشوائية الغوسية ولذلك هو غوسي. من الواضح أيضاً أن $Z(t_1), Z(t_2), \dots, Z(t_\ell)$ غوسية مشتركة من أجل كل ℓ, t_1, \dots, t_ℓ ، لذلك $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$ هي في الحقيقة عملية عشوائية غوسية. الطاقة في أي تابع عينة، $Z(t) = \sum_{k=1}^n Z_k \phi_k(t)$ هي $\sum_{k=1}^n Z_k^2$. هذه محدودة (حيث إن قيم العينات حقيقية وبالتالي محدودة). لذلك كل تابع عينة هو \mathcal{L}_2 . عندئذ يمكن حساب تابع التغير بسهولة.

$$(31.7) \quad K_Z(t, \tau) = \sum_{k,m} E[Z_k Z_m] \phi_k(t) \phi_m(\tau) = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 \phi_k(t) \phi_k(\tau)$$

بعد ذلك اعتبر الوظيفة الخطية $\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt$ حيث $g(t)$ هو التابع الحقيقي \mathcal{L}_2 ،

$$(32.7) \quad \int_{-\infty}^{\infty} Z(t) g(t) dt = \sum_{k=1}^n Z_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi_k(t) g(t) dt$$

وبما أن V مجموع موزون من المتحولات العشوائية الغوسية المستقلة وبقية متوسطة صفرية Z فإن V غوسية أيضاً وبتباين

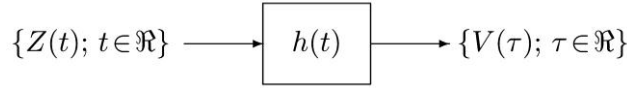
$$(33.7) \quad \sigma_V^2 = E[V^2] = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 |\langle \phi_k, \mathbf{g} \rangle|^2$$

اعتبر الحالة التي فيها n غير محدودة لكن $\sum_k \sigma_k^2 < \infty$. تبقى توابع العينة \mathcal{L}_2 (على الأقل باحتمال يساوي الواحد). تبقى المعادلات (29.7)، (30.7)، (31.7)، (32.7) و (33.7) صالحة، ويبقى Z متحول عشوائي غوسي. نحن لا نملك أي آلية لإثبات ذلك. التمرين 7.7 يفسر وبشكل كبير لماذا هذه النتائج صحيحة.

أخيراً، اعتبر مجموعة محدودة \mathcal{L}_2 أشكال الموجة $\{g_m(t); 1 \leq m \leq \ell\}$. دع $V_m = \int_{-\infty}^{\infty} Z(t) g_m(t) dt$. وحسب المناقشة أعلاه يكون V_m غوسي من أجل كل m . إضافة لذلك و حيث إن كل تركيب من هذه المتحولات هو تابع خطي أيضاً، هو أيضاً غوسي، لذلك $\{V_1, \dots, V_\ell\}$ تكون غوسية مشتركة.

2.4.7 الترشيح الخطي للعمليات الغوسية

نستطيع استخدام نفس المناقشة كما في القسم السابق للنظر في خرج المرشح الخطي الذي دخله عبارة عن عملية غوسية $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$ بشكل خاص، افترض أن $Z(t) = \sum_k Z_k \phi_k(t)$ حيث Z_1, Z_2, \dots هي سلسلة مستقلة $\{Z_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_k^2)\}$ توافق $\sum_k \sigma_k^2 < \infty$ وحيث $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots$ سلسلة من التوابع المتعامدة المنتظمة.



الشكل 3.7: العملية العشوائية المرشحة

افترض أن الاستجابة النبضية للمرشح $h(t)$ عبارة عن موجة حقيقية L_2 ، ولذلك من أجل أي تابع عينة محدد عند الدخل $(\tau, \omega) = \sum_k Z_k(\omega) \phi_k(t)$ يعطى خرج المرشح عند أي فترة زمنية τ بالعلاقة

$$(34.7) \quad V(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(t, \omega) h(\tau - t) dt = \sum_k Z_k(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \phi_k(t) h(\tau - t) dt$$

كل تكامل في الطرف الأيمن من (34.7) هو L_2 تابع لـ τ وطاقته عند الحد الأعلى بواسطة $\|h\|^2$ (انظر التمرين 5.7). وينتج من هذا (انظر التمرين 7.7) أن $\int_{-\infty}^{\infty} Z(t, \omega) h(\tau - t) dt$ عبارة عن شكل الموجة L_2 باحتمال يساوي الواحد. من أجل أي فترة زمنية معينة τ ، تحول المعادلة (34.7) نقاط العينة ω إلى قيم حقيقية وبالتالي $V(\tau, \omega)$ تمثل قيمة عينة من المتحول العشوائي $V(\tau)$.

$$(35.7) \quad V(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(t) h(\tau - t) dt = \sum_k Z_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi_k(t) h(\tau - t) dt$$

وهذا عبارة عن متحول عشوائي غوسي من أجل كل فترة زمنية τ . من أجل أي مجموعة من الفترات τ_1, \dots, τ_ℓ ، نرى أن $V(\tau_1), \dots, V(\tau_\ell)$ غوسية مشتركة. وبالتالي $\{V(\tau); \tau \in \mathbb{R}\}$ هي عملية عشوائية غوسية. نلخص الفقرتين الفرعيتين الأخيرتين في النظرية التالية.

نظرية 1.4.7 ليكن $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$ عملية غوسية، $Z(t) = \sum_k Z_k \phi_k(t)$ ، حيث $\{Z_k; k \geq 1\}$ سلسلة من المتحولات العشوائية الغوسية المستقلة $\mathcal{N}(0, \sigma_k^2)$ حيث $\sum \sigma_k^2 < \infty$ و $\{\phi_k(t); k \geq 1\}$ وهي مجموعة متعامدة مستنظمة. وبالتالي

- من أجل أي مجموعة من L_2 لشكل الموجة $g_1(t), \dots, g_\ell(t)$ ، تكون التوابع الخطية $\{Z_m; 1 \leq m \leq \ell\}$ المعطاة بالعلاقة $Z_m = \int_{-\infty}^{\infty} Z(t) g_m(t) dt$ غوسية مشتركة وذات قيمة متوسطة صفرية.
- من أجل أي مرشح ذو L_2 حقيقية واستجابة نبضية، $Z(t)$ ، يكون خرج المرشح $\{V(\tau); \tau \in \mathbb{R}\}$ المعطى بالعلاقة (35.7) عبارة عن عملية غوسية قيمتها المتوسطة صفر.

هذه نتائج مهمة. الأولى، فيما يتعلق بالمجموعات ذات التوابع الخطية، فهي مهمة عندما تمثل دخل القناة وفق التوسعات المتعامدة المستنظمة، فإن الضجيج غالباً يمكن توسيعه بنفس التوسعات المتعامدة المستنظمة. والثانية تتعلق بالترشيح الخطي، حيث تبين أنه عندما تمر الإشارة والضجيج عبر مرشح خطي، يكون ضجيج خرج المرشح بساطة عبارة عن عملية غوسية أخرى بقيمة متوسطة صفرية. تلخص هذه النظرية غالباً بالقول إن العمليات الخطية تحافظ على الغوسية.

3.4.7 التباين المشترك للتوابع الخطية والمرشحات

افترض أن $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$ عملية عشوائية وأن $g_1(t), \dots, g_\ell(t)$ هي أشكال موجة حقيقية L_2 . ولقد رأينا أنه إذا كان $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$ غوسياً، فإن التوابع الخطية V_1, \dots, V_ℓ المعطاة بالعلاقة $V_m = \int_{-\infty}^{\infty} Z(t) g_m(t) dt$ هي غوسية مشتركة من أجل $1 \leq m \leq \ell$. نريد الآن إيجاد التباين المشترك من أجل كل زوج V_j, V_m من هذه المتحولات العشوائية. النتيجة لا تعتمد على كون العملية $Z(t)$ غوسية. الحساب بسيط تماماً، أيضاً نحن أهملنا مسائل النهايات، تقاطعات ترتيب التوقع و التكامل،... الخ. الاستنتاج الأكثر دقة يكون بالرجوع لمناقشة نظرية الاعتيان، ولكن هذا إلى حد ما غير واضح. بافتراض أن العملية $Z(t)$ ذات قيمة متوسطة تساوي الصفر،

$$(36.7) \quad E[V_j V_m] = E \left[\int_{-\infty}^{\infty} Z(t) g_j(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} Z(\tau) g_m(\tau) d\tau \right]$$

$$(37.7) \quad = \int_{t=-\infty}^{\infty} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} g_j(t) E[Z(t)Z(\tau)] g_m(\tau) dt d\tau$$

$$(38.7) \quad = \int_{t=-\infty}^{\infty} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} g_j(t) K_Z g_m(\tau) dt d\tau$$

كل مصطلح تباين مشترك (بما في ذلك $E[V_m^2]$ من أجل كل m) يعتمد عندئذ فقط على تابع التباين المشترك للعملية ومجموعة أشكال الموجة $1 \leq m \leq \ell$. g_m .

الطي $V(r) = \int Z(t)h(\tau - t)dt$ هو تابع ك عند كل فترة زمنية τ ، لذلك التباين المشترك للخروج المرشح من $\{(t); t \in \mathbb{R}\}$ يتبع نفس الطريقة كما في النتائج أعلاه. الخرج $\{V(r)\}$ للمرشح ذو استجابة نبضية h لموجة حقيقية L_2 معطى بالعلاقة (35.7)، لذلك يمكن إيجاد التباين المشترك للخروج بالعلاقة:

$$(39.7) \quad \begin{aligned} K_V(r, s) &= E[V(r) V(s)] \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} Z(t)h(r-t)dt \int_{-\infty}^{\infty} Z(\tau)h(s-\tau)d\tau\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(r-t) K_Z(t, \tau) h(s-\tau) dt d\tau \end{aligned}$$

5.7 الاستقرار والمفاهيم ذات الصلة

يملك العديد من العمليات العشوائية الأكثر فائدة خاصة تتمثل في أن موضع بدء الزمن بالنسبة لها ليس ذا صلة، أي أنها "تتصرف" بنفس الطريقة في زمن ما كما في أي زمن آخر. تدعى هذه الخاصة *الاستقرار* وتسمى مثل هذه العملية، *العملية المستقرة*. وبما أن موضع بدء الزمن يجب أن يكون غير ذي صلة لحالة الثبات، فلا يمكن للعمليات العشوائية المعرفة على أي مجال آخر غير $(-\infty, \infty)$ أن تكون مستقرة. وبالتالي سنفترض أن العملية مُعرَّفة ضمن المجال $(-\infty, \infty)$.

الشرط الآخر لتكون العملية العشوائية $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$ مستقرة هو أن $Z(t)$ يجب أن تكون موزعة بشكل متماثل من أجل كل الفترات $t \in \mathbb{R}$. هذا يعني أن، من أجل أي فترات زمنية $t + \tau$ ، ومن أجل أي عدد حقيقي x ، $\Pr\{Z(t) \leq x\} = \Pr\{Z(t + \tau) \leq x\}$ ، هذا لا يعني أن $Z(t)$ و $Z(t + \tau)$ هي نفس المتحولات العشوائية، من أجل نتيجة العينة المعطاة ω من التجربة، $Z(t, \omega)$ تكون عادة مساوية لـ $Z(t + \tau, \omega)$. هذا يعني ببساطة أن $Z(t)$ و $Z(t + \tau)$ لهما نفس تابع التوزيع، أي أن،

$$(40.7) \quad F_{Z(t)}(x) = F_{Z(t+\tau)}(x) \quad \text{لأجل كل قيم } x$$

هذا يبقى غير كافٍ للاستقرار، على كل حال. التوزيعات المشتركة خلال أي مجموعة من الفترات يجب أن تبقى نفسها إذا تمت إزاحة كل هذه الفترات إلى فترات جديدة بوساطة إزاحة اعتباطية τ . هذا يتضمن الشرط السابق كحالة خاصة، لذلك لدينا التعريف:

تعريف 1.5.7. تكون العملية العشوائية $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$ مستقرة، إذا كان من أجل كل الأعداد الصحيحة الموجبة ℓ ، وكل مجموعات الفترات $t_1, \dots, t_\ell \in \mathbb{R}$ ، وكل الملاحظات z_1, \dots, z_ℓ ، ولكل الإزاحات $t \in \mathbb{R}$

$$(41.7) \quad F_{Z(t_1), \dots, Z(t_\ell)}(z_1, \dots, z_\ell) = F_{Z(t_1+t), \dots, Z(t_\ell+t)}(z_1, \dots, z_\ell)$$

من أجل الحالة النموذجية حيث الكثافات موجودة، يمكن إعادة كتابة هذه المعادلة بالشكل

$$(42.7) \quad f_{Z(t_1), \dots, Z(t_\ell)}(z_1, \dots, z_\ell) = f_{Z(t_1+t), \dots, Z(t_\ell+t)}(z_1, \dots, z_\ell)$$

من أجل كل قيم $z_1, \dots, z_\ell \in \mathbb{R}$.

من أجل عملية غوسية (بقيمة متوسطة صفرية)، يعتمد التوزيع المشترك للمتحويلات $Z(t_1), \dots, Z(t_\ell)$ على التباين المشترك لهذه المتحويلات. وبالتالي، سيكون هذا التوزيع هو نفسه كما في حالة $Z(t_1 + \tau), \dots, Z(t_\ell + \tau)$ إذا كان $K_Z(t_m, t_j) = K_Z(t_m + \tau, t_j + \tau)$ لأجل $1 \leq m, j \leq \ell$. هذا الشرط سوف يتحقق من أجل كل قيم τ ، وكل قيم θ ، ولكل t_1, \dots, t_ℓ (للتحقق من أن $\{Z(t)\}$ مستقرة) إذا كان $K_Z(t_1, t_2)$

وهكذا فقد بينّا أن العملية الغوسية ذات القيمة المتوسطة الصفرية تكون مستقرة إذا كان $K_Z(t_1, t_2) = K_Z(t_1 - t_2, 0)$ من أجل كل قيم t_1, t_2 . سيتحقق هذا الشرط الأخير إذا كان $K_Z(t_1, t_2) = K_Z(t_1 - t_2, 0)$ من أجل كل قيم t_1, t_2 .

$$(43.7) \quad K_Z(t_1, t_2) = K_Z(t_1 - t_2, 0) \quad \text{لأجل كل القيم } t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

وبالعكس، إذا لم تتحقق (43.7) من أجل بعض الخيارات لـ t_1, t_2 ، عندئذ يجب أن يكون التوزيع المشترك لـ $Z(t_1), Z(t_2)$ مختلفاً عن التوزيع المشترك لـ $Z(t_1 - t_2), Z(0)$ ، وتكون العملية غير مستقرة. النظرية التالية تلخص ذلك.

نظرية 1.5.7. تكون العملية الغوسية ذات القيمة المتوسطة الصفرية $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$ مستقرة إذا وإذا فقط تحققت العلاقة (43.7).

النتيجة الواضحة من هذا، أن العملية الغوسية ذات القيمة المتوسطة غير الصفرية تكون مستقرة إذاً فقط إذا كانت قيمتها ثابتة وتباينها يحقق (43.7).

1.5.7 العمليات العشوائية المستقرة بالمعنى الواسع (WSS)

هناك العديد من النتائج في نظرية الاحتمالات التي تعتمد فقط على تباينات المتحولات العشوائية المفيدة (وأيضاً القيمة المتوسطة غير صفرية). للعمليات العشوائية، تم تبسيط عدد من هذه النتائج الكلاسيكية من أجل العمليات الغوسية، وتعتمد هذه التبسيطات فقط على القيمة المتوسطة والتباين للعملية العشوائية بدلاً من الاستقرار التام هذا يؤدي إلى التعريف التالي:

تعريف 2.5.7. تكون العملية العشوائية $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$ مستقرة بالمعنى الواسع (WSS) إذا كان $E[Z(t)] = E[Z(0)]$ وكان $K_Z(t_1, t_2) = K_Z(t_1 - t_2, 0)$ من أجل كل $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

بما أن تابع التباين $K_Z(t + \tau, t)$ للعملية المستقرة بالمعنى الواسع WSS هو فقط تابع للمتحول τ ، سنكتب تابع التباين كتابع لمتحول واحد فقط، أي $\bar{K}_Z(\tau)$ بدلاً من $K_Z(t + \tau, t)$. بكلمات أخرى، يمثل المتحول الفردي الموجود ضمن صيغة العلاقة الفردية، الفرق بين الإزاحتين في صيغة العلاقة الثنائية. وبالتالي من أجل العملية المستقرة بالمعنى الواسع، $K_Z(t, \tau) = K_Z(t - \tau, 0) = \bar{K}_Z(t - \tau)$. جرت مناقشة العمليات العشوائية المعرفة كتوسعات لتتابع sinc المتباعدة بمقدار T عدة مرات. بشكل خاص دع

$$(44.7) \quad V(t) = \sum_k V_k \operatorname{sinc} \left(\frac{t - kT}{T} \right)$$

حيث $\{..., V_{-1}, V_0, V_1, ...\}$ هي سلسلة (بقيمة متوسطة صفرية) من المتحولات العشوائية الموزعة بشكل متماثل. كما هو موضح في العلاقة 8.7، التباين المشترك لهذه العملية هو

$$(45.7) \quad K_V(t, \tau) = \sigma_V^2 \sum_k \operatorname{sinc} \left(\frac{t - kT}{T} \right) \operatorname{sinc} \left(\frac{\tau - kT}{T} \right)$$

حيث σ_V^2 هي التباين لكل V_k . إن المجموع في (45.7)، كما هو مبين أدناه هو عبارة عن تابع فقط لـ $t - \tau$ ، مما يؤدي إلى النظرية:

نظرية 2.5.7 (توسعات sinc). إن العملية العشوائية في (44.7) مستقرة بالمعنى الواسع. إضافة لذلك، إذا كانت المتحولات العشوائية $\{V_k; k \in \mathbb{Z}\}$ غوسية وموزعة بشكل منتظم، تكون العملية هي مستقرة. ويعطى تابع التباين المتغاير بالعلاقة:

$$(46.7) \quad \bar{K}_V(t - \tau) = \sigma_V^2 \operatorname{sinc} \left(\frac{t - \tau}{T} \right)$$

البرهان: من نظرية الاعتيان، أي L_2 تابع $u(t)$ ، بمجال أساسي محدود إلى $1/(2T)$ ، يمكن توسيع مجالها وفق

$$(47.7) \quad u(t) = \sum_k u(kT) \operatorname{sinc} \left(\frac{t - kT}{T} \right)$$

من أجل أي قيمة معطاة، اعتبر $u(t)$ لتكون مساوية $\left(\frac{t-\tau}{T}\right)$. وبالتعويض في (4.7)،

$$(48.7) \quad \text{sinc}\left(\frac{t-\tau}{T}\right) = \sum_k \text{sinc}\left(\frac{kT-\tau}{T}\right) \text{sinc}\left(\frac{t-kT}{T}\right) = \sum_k \text{sinc}\left(\frac{\tau-kT}{T}\right) \text{sinc}\left(\frac{t-kT}{T}\right)$$

بتعويض هذه العلاقة في (4.7) يتبين أن العملية مستقرة بالمعنى الواسع مع حالة تباين مشترك. كما هو مبين في الفقرة الفرعية 1.4.7، تكون العملية $\{V(t); t \in \mathbb{R}\}$ غوسية إذا كانت المتحولات العشوائية $\{V_k\}$ غوسية. من النظرية 1.5.7 فإن هذه العملية الغوسية مستقرة كونها مستقرة بالمعنى الواسع.

لندرس حالة خاصة أخرى من توسع sinc يكون فيها كل V_k اثنائي، يأخذ القيم ± 1 باحتمالات متساوية. هذا يوافق شكل بسيط لموجة PAM المرسل. في هذه الحالة، $V(kT)$ يجب أن تكون ± 1 ، في حين من أجل قيم t بين نقاط العينة، $V(t)$ يمكن أن يأخذ مجالاً واسعاً من القيم. لذا نعتبر هذه العملية مستقرة بالمعنى الواسع، ولكن لا يمكن أن تكون ثابتة. بالمثل أي توزيع متقطع لكل V_k يُنتج عملية مستقرة بالمعنى الواسع لكن ليست ثابتة.

لا يوجد العديد من النماذج الهامة لعمليات ضجيج مستقرة بالمعنى الواسع ولكنها ليست ثابتة¹⁰⁹، بالرغم من المثال أعلاه والاستعمال واسع الانتشار لمصطلح الاستقرار بالمعنى الواسع. في الواقع يستخدم مفهوم الاستقرار بالمعنى الواسع لتوضيح بعض النتائج، التي تعتمد فقط على القيمة المتوسطة والتباين المشترك لذلك من المحتمل جعلها أسهل للفهم.

يوضح توسع sinc الغوسي استنتاج نظري ممتع. بافتراض أن $\sigma_v^2 > 0$ ، أي أن العملية ليست عملية عادية التي فيها $V(t) = 0$ باحتمال يساوي الواحد من أجل كل قيم t ، الطاقة المتوقعة في العملية (مأخوذة عبر كل الزمن) لانهائية. ليس من الصعب أن تقنع شخص ما أن توابع العينة لهذه العملية لها طاقة غير محدودة باحتمال يساوي الواحد. وهكذا من السهل التعامل مع نماذج الضجيج الثابتة، لكن توابع العينة لهذه العمليات لا تنسجم مع نظرية L_2 لشكل الموجة التي تمّ توضيحها. حتى أكثر أهمية من مسألة الطاقة اللانهائية، نماذج الضجيج الثابتة تجعل الافتراضات لا مبرر لها حول الماضي البعيد جدا والمستقبل. السؤال الهام الذي يجب أن يطرح هو إلى أي مدى تؤثر هذه الافتراضات على النتائج في الوقت الحاضر.

المشكلة هنا ليست مع خصائص توسع sinc الغوسية. بل مع العمليات المستقرة التي لها استطاعة ثابتة خلال كل الوقت، وبالتالي طاقتها لانهائية. حل عملي واحد لهذه المشكلة¹¹⁰ بسيط ومألوف. يتم اقتطاع عملية عشوائية ببساطة في أي طريقة ملائمة. وهكذا، عندما نقول إن الضجيج ثابت، فإننا نعني أنه ثابت خلال فترة زمنية أطول بكثير من الفترة المفيدة للاتصال. هذا غير دقيق جداً، ومفهوم الاستقرار الفعال يتم تطويره الآن لتشكيل هذا المفهوم للعملية المستقرة المقتطعة.

2.5.7 الاستقرار الفعال والعمليات العشوائية المستقرة بالمعنى الواسع WSS الفعالة

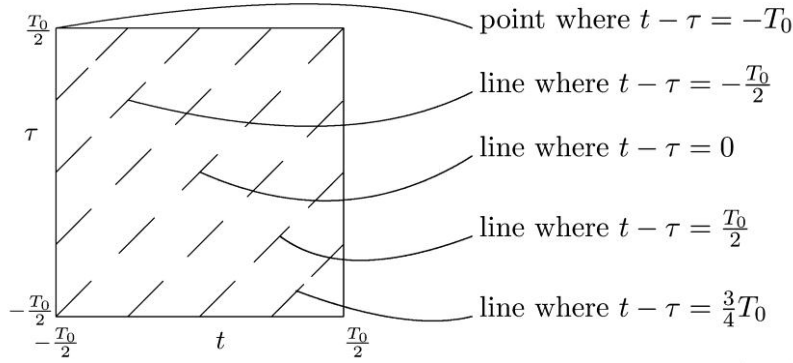
تعريف 3.5.7. تكون العملية العشوائية (ذات قيمة متوسطة صفرية) مستقرة بشكل فعال خلال المجال $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ إذا كان الاحتمال المشترك المحصص للفترة t_1, \dots, t_n هو نفسه للفترة $t_1+\tau, t_2+\tau, \dots, t_n+\tau$ كلما كانت t_1, \dots, t_n و $t_1+\tau, t_2+\tau, \dots, t_n+\tau$ كلها متضمنة في المجال $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$. وهي مستقرة بالمعنى الواسع بشكل فعال خلال $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ إذا كان $K_Z(t, \tau)$ تابع فقط لـ $t - \tau$ من أجل $t, \tau \in [-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$. تكون العملية العشوائية ذات القيمة المتوسطة غير الصفرية مستقرة بشكل فعال (مستقرة بشكل فعال بالمعنى الواسع) إذا كانت القيمة المتوسطة ثابتة ضمن المجال $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ واضطراباتها مستقرة بشكل فعال (مستقرة بالمعنى الواسع) ضمن $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$.

ثمة طريقة لبيان أن العملية العشوائية مستقرة بالمعنى الواسع تتمثل في المعنى المحدود لعملية مستقرة بشكل فعال من أجل كل المجالات $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$. من أجل عمليات من قبيل الوظائف الخطية والترشيح، فإن طبيعة هذا الحد عندما تصبح T_0 كبيرة بسيطة جداً وطبيعية، بينما

¹⁰⁹ ثمة استثناء هام هو التداخل من المستخدمين الآخرين، والذي، كما في توسعات sinc ذات العينات الإثنائية أنفياً، يمكن أن يكون مستقراً بالمعنى الواسع ولكن غير ثابت. حتى في هذه الحالة، إذا تمت نمذجة التداخل على أنه مجرد جزء من الضجيج (بدلاً من وصفه بصورة دقيقة كتداخل)، يتم عادة تجاهل عدم الاستقرار.

¹¹⁰ ثمة حل آخر شائع لهذه المشكلة. من أجل أي L_2 تابع $g(t)$ ، تتلاشى الطاقة الموجودة في $g(t)$ خارج المجال $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ عندما $T_0 \rightarrow \infty$ ، لذلك من البديهي أن يتلاشى تأثير هذه النواتج على التابع الخطي $\int g(t)Z(t)dt$ عندما $T_0 \rightarrow \infty$. هذا يزود ببديهية أساسية لطيفة لتجاهل المشكلة. لكنها فشلت، ببديهيًا ورياضياً، على حد سواء، في المجال الترددي.

من أجل نتائج المجال الترددي، فإن تأثير محدودية T_0 دقيق جداً.
 من أجل عملية مستقرة بالمعنى الواسع بشكل فعال ضمن المجال $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ ، يكون التباين المشترك ضمن $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ تابعاً لمعامل واحد،
 $K_Z(t, \tau) = \tilde{K}_Z(t - \tau)$ من أجل $t, \tau \in [-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$. لاحظ على كل حال ان $t - \tau$ يمكن أن تمتد من $-T_0$ (من أجل $t = -\frac{T_0}{2}, \tau = \frac{T_0}{2}$) إلى T_0 (من أجل $t = \frac{T_0}{2}, \tau = -\frac{T_0}{2}$).



الشكل 4.7: العلاقة بين تابع تباين مشترك بإزاحتين $K_Z(t, \tau)$ وتابع بإزاحة واحدة $\tilde{K}_Z(t - \tau)$ من أجل عملية فعالة مستقرة بالمعنى الواسع. يكون $K_Z(t, \tau)$ ثابت عند كل خط منقطع أعلاه. لاحظ أن، على سبيل المثال، الخط الذي له $t - \tau = \frac{3}{4}T_0$ يوافق فقط الزوج (t, τ) حيث $t \geq T_0/2$ و $\tau \leq -T_0/2$. لذلك $\tilde{K}_Z(\frac{3}{4}T_0)$ ليس بالضرورة أن يكون مساوياً لـ $K_Z(\frac{3}{4}T_0, 0)$. يمكن أن نتحقق بسهولة، بأن $\tilde{K}_Z(\alpha T_0) = K_Z(\alpha T_0, 0)$ من أجل كل قيم $\alpha \leq 1/2$.

بما أن العملية الغوسية تتحدد بتابع التباين المشترك والقيمة المتوسطة، فإنها تكون مستقرة بشكل فعال ضمن المجال $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ إذا كانت مستقرة بالمعنى الواسع وبشكل فعال.

لاحظ أن الفرق بين العملية العشوائية المستقرة والمستقرة بشكل فعال من أجل قيم كبيرة لـ T_0 هو بالأصل فرق في النموذج وليس في الحالات النمذجة. إذا كان لنموذجين سلوك مختلف بشكل كبير خلال فترات زمنية مهمة، أو بشكل أكثر تحديداً، إذا كان للضجيج في الماضي البعيد أو المستقبل تأثير كبير، فإنه يجب إعادة التفكير في مسألة النمذجة بأكملها.

3.5.7 التوابع الخطية للعمليات العشوائية المستقرة بالمعنى الواسع بشكل فعال

تأخذ مصفوفة التباين المشترك لمجموعة من التوابع الخطية وتابع التباين المشترك خرج المرشح الخطي أشكالاً أكثر بساطة من أجل العمليات المستقرة بالمعنى الواسع والمستقرة بالمعنى الواسع الفعالة من الأشكال المقابلة للعمليات العامة المدرجة في الفقرة الفرعية 3.4.7. لتكن $Z(t)$ عملية عشوائية مستقرة بالمعنى الواسع وبقيمة متوسطة صفرية ولها تابع تباين مشترك $\tilde{K}_Z(t - \tau)$ من أجل $t, \tau \in [-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$. افترض أن $g_1(t), g_2(t), \dots, g_\ell(t)$ تمثل مجموعة من توابع L_2 والتي لا تساوي الصفر فقط في المجال $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$. من أجل الحالة المألوفة للعمليات المستقرة بالمعنى الواسع، يمكن أن نأخذ $T_0 = \infty$. افترض أن التابع الخطي V_m معطى بالعلاقة $\int_{-T_0/2}^{T_0/2} Z(t)g_m(t)dt$ من أجل $1 \leq m \leq \ell$. يعطى التباين المشترك $E[V_m V_j]$ عندئذ بالعلاقة

$$\begin{aligned} \{[V_m V_j]\} &= E \left[\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} Z(t) g_m(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} Z(\tau) g_j(\tau) d\tau \right] \\ (49.7) \quad &= \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g_m(t) \tilde{K}_Z(t - \tau) g_j(\tau) d\tau dt \end{aligned}$$

لاحظ أن هذه العلاقة تعتمد على الفروقات فقط عندما $t, \tau \in [-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ ، أي، حيث $\{Z(t)\}$ مستقرة بالمعنى الواسع بشكل فعال. هذا ليس مستغرباً، حيث إننا لا نتوقع أن تعتمد V_m على سلوك العملية خارج المجال حيث $g_m(t)$ لا تساوي الصفر.

4.5.7 المرشحات الخطية للعمليات العشوائية المستقرة بالمعنى الواسع بشكل فعال

افترض أن العملية العشوائية $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$ تمر عبر مرشح غير متغير زمنياً والذي له استجابة نبضية $h(t)$ هي L_2 . كما تمت الإشارة في 28.7 يكون خرج المرشح عملية عشوائية $\{V(t); t \in \mathbb{R}\}$ تعطى بالعلاقة

$$V(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(t)h(t-t_1)dt_1$$

لاحظ أن $V(t)$ عبارة عن تابع خطي لأجل كل t . تابع التباين المشترك يتم تقييمه عند t, τ هو التباين المشترك للتوابع الخطية $V(t)$ و $V(\tau)$. بإهمال مسائل مراتب التكامل والتقارب نجد أن

$$(50.7) \quad K_V(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t-t_1)K_Z(t_1, t_2)h(\tau-t_2)dt_1dt_2$$

افترض في البداية أن $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$ مستقرة بالمعنى الواسع في المعنى التقليدي. ثم يكمن استبدال $K_Z(t_1, t_2)$ بـ $\bar{K}_Z(t_1 - t_2)$ وباستبدال $t_1 - t_2$ بـ s (أي، $t_1 = s + t_2$).

$$K_V(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-t_2-s)\bar{K}_Z(s)ds \right] h(\tau-t_2)dt_2$$

وبتبديل t_2 بـ $t + \mu$ ،

$$(51.7) \quad K_V(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau-\mu-s)\bar{K}_Z(s)ds \right] h(-\mu)d\mu$$

وهكذا فإن $K_V(t, \tau)$ تابع فقط لـ $t - \tau$. هذا يعني أن $\{V(t); t \in \mathbb{R}\}$ مستقرة بالمعنى الواسع. وهذا ليس مفاجئاً أن ينتج إمرار عملية عشوائية مستقرة بالمعنى الواسع عبر مرشح خطي ذي ثوابت غير متغيرة زمنياً عملية عشوائية أخرى مستقرة بالمعنى الواسع. إذا كانت $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$ عملية غوسية، عندئذ، من النظرية 1.4.7، فإن $\{V(t); t \in \mathbb{R}\}$ أيضاً عملية غوسية. وحيث إن العملية الغوسية تتحدد بتابعها التبايني المشترك، ينتج أن إذا كانت $Z(t)$ عملية غوسية مستقرة، فإن $V(t)$ أيضاً عملية غوسية مستقرة. نحن ليس لدينا الآلية الرياضية لتنفيذ العمليات المذكورة أعلاه بعناية خلال فترة زمنية لانهائية¹¹¹. بدلاً من ذلك نفترض الآن أن $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$ مستقرة بالمعنى الواسع وبشكل فعال خلال المجال $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$. كما سنفترض أيضاً أن الاستجابة النبضية $h(t)$ أعلاه محدودة زمنياً بمعنى أنه A محدودة، فإن $h(t) = 0$ من أجل $|t| > A$.

نظرية 3.5.7. لتكن $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$ مستقرة بالمعنى الواسع وبشكل فعال خلال المجال $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ وأن لدينا تابع عينة الذي هو L_2 خلال المجال $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ باحتمال يساوي الواحد. دع $Z(t)$ هي دخل المرشح مع L_2 ذو الاستجابة النبضية المحدودة زمنياً $\{h(t); [-A, A] \rightarrow \mathbb{R}\}$. ثم من أجل $\frac{T_0}{2} > A$ ، فإن عملية الخرج العشوائية $\{V(t); t \in \mathbb{R}\}$ تكون مستقرة بالمعنى الواسع خلال المجال $[-\frac{T_0}{2}+A, \frac{T_0}{2}-A]$ وتابع عيناتها خلال المجال $[-\frac{T_0}{2}+A, \frac{T_0}{2}-A]$ هو L_2 باحتمال يساوي الواحد.

البرهان: دع $z(t)$ تمثل تابع عينة من $Z(t)$ وافترض أن $z(t)$ هي L_2 خلال المجال $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$. دع $v(\tau) = \int z(t)h(\tau-t)dt$ تمثل القيمة الموافقة لخرج المرشح. تتحدد قيمة $v(\tau)$ من أجل كل $\tau \in [-\frac{T_0}{2}+A, \frac{T_0}{2}-A]$ بوساطة $z(t)$ في المجال $t \in [-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ وبالتالي إذا استبدلنا $z(t)$ بـ $z_0(t) = z(t) \text{ rect } [T_0]$ فإن خرج المرشح، ولنقل $v_0(\tau)$ سيكون مساوياً لـ $v(\tau)$ من أجل $\tau \in [-\frac{T_0}{2}+A, \frac{T_0}{2}-A]$. التابع المحدود زمنياً $z_0(t)$ هو L_1 وكذلك L_2 . هذا يعني أن تحويل فورييه $\hat{z}_0(f)$ يحدها، ولنقل $\hat{z}_0(f) \leq B$ ، من أجل كل f . بما أن

$$\hat{v}_0(f) = \hat{z}_0(f)\hat{h}_0(f)$$

$$\int |\hat{v}_0(f)|^2 df = \int |\hat{z}_0(f)|^2 |\hat{h}_0(f)|^2 df \leq B^2 \int |\hat{h}(f)|^2 df < \infty$$

¹¹¹ الأكثر أهمية أنه ليس لدينا أي مبرر لنمذجة عملية خلال فترة زمنية غير محدودة. لاحقاً، ومع ذلك، بعد بناء بعض الحدس عن العلاقة بين فترة غير محدودة وفترة كبيرة جداً، يمكننا استخدام أبسط المعادلات المقابلة للفترة غير المحدودة.

أن هذا يعني أن $\hat{v}_0(f)$ وكذلك أيضاً $v_0(t)$ ، هو L_2 . الآن عندما يقتطع $v_0(t)$ إلى $[-\frac{T_0}{2}+A, \frac{T_0}{2}-A]$ يكون مساوياً $v(\tau)$ المقتطع ل $[-\frac{T_0}{2}+A, \frac{T_0}{2}-A]$ ، لذلك اقتطاع نسخة من $v(\tau)$ يعطي L_2 . وهكذا توابع العينة لـ $\{V(t)\}$ ، المقتطعة لـ $[-\frac{T_0}{2}+A, \frac{T_0}{2}-A]$ هي عبارة عن L_2 باحتمال مساوي الواحد.

أخيراً، حيث $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$ يمكن اقتطاعها لـ $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ بدون نقص بشكل عام، ينتج عن هذا أن $K_Z(t_1, t_2)$ يمكن اقتطاعه لـ $t_1, t_2 \in [-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$. وهكذا من أجل $t, \tau \in [-\frac{T_0}{2}+A, \frac{T_0}{2}-A]$ تصبح المعادلة (50.7)

$$(52.7) \quad K_V(t, \tau) = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} h(t-t_1) K_Z(t_1-t_2) h(\tau-t_2) dt_1 dt_2$$

تبيّن المعادلات مناقشة المعادلات (50.7) و (51.7) أن $V(t)$ مستقرة بالمعنى الواسع وبشكل فعال خلال المجال $[-\frac{T_0}{2}+A, \frac{T_0}{2}-A]$. تبيّن لنا النظرية أعلاه، بالإضافة لنتيجة العملية المستقرة بالمعنى الواسع وبشكل فعال، عن التوابع الخطية، أن النتائج حول العمليات المستقرة بالمعنى الواسع يمكن استخدامها خلال فترات محدودة. النتيجة في هذه النظرية عن فترة الاستقرار الفعال يتم إنقاصها بالترشيح لا ينبغي أن تكون مستغربة كثيراً. إذا قمنا باقتطاع العملية، ومن ثم تمريرها عبر المرشح، فإن المرشح سوف ينثر تأثير الاقتطاع. من أجل مرشح ذي عرض محدود، لكن كما يفترض هنا، يكون هذا الانتثار محدوداً.

مفهوم الاستقرار (أو الاستقرار الفعال) كان له معنى كأداة نموذجية حيث T_0 أعلاه أكبر بكثير من أي مدة أخرى مهمة، وفي واقع الأمر حيث لا مبرر لوجود قلق واضح حول المدة اللازمة لتكون العملية مستقرة.

تجربنا النظرية أعلاه. بشكل أساسي أنه يمكن أن يكون لدينا كعكسة وأكلناها أيضاً. هذه هي الموجات المرسلية عمليات الضجيج يمكن أن تقتطع، مما يسمح باستخدام كل من الحس السليم ونظرية L_2 ، ولكن في الوقت نفسه رؤى حول الاستقرار لا يزال من الممكن الاعتماد عليها. يمكن نمذجة العمليات العشوائية، بشكل أكثر دقة، كعمليات مستقرة، بدون تخصيص أي فترة محددة $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ للاستقرار الفعال، لأن العمليات المستقرة يمكن النظر إليها الآن على أنها نسخ مقارنة من عمليات محدودة المدة.

تعطي الملاحق 2.A7 و 3.A7 تحليلاً أعمق عن العمليات المستقرة بالمعنى الواسع المقتطعة في مجال ما. تمثل العملية المقتطعة على شكل سلاسل فوربيه ذات متحولات عشوائية بوصفها معاملات. هذا يعطي تفسيراً واضحاً عما سيحدث عندما يزداد حجم المجال بدون حدود، وأيضاً يعطي تفسيراً واضحاً عن تأثير زمن الاقتطاع على المجال الترددي. هناك تقريب آخر لعملية الاقتطاع هو توسع Karhunen-Loeve، الذي ستتم مناقشته في الملحق 4.A7.

6.7 الاستقرار والعمليات المستقرة بالمعنى الواسع في المجال الترددي

الاستقرار والعمليات المستقرة بالمعنى الواسع ذات القيمة المتوسطة الصفرية وبشكل خاص العمليات الغوسية، غالباً ما يُنظر إليها بشكل أكثر تعمقاً في المجال الترددي مما هو في مجال الزمن. عملية مستقرة بالمعنى الواسع بشكل فعال خلال المجال $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ لها تابع تباين مشترك بمتحول واحد $\tilde{K}_Z(\tau)$ معرف خلال $[T_0, T_0]$. يمكن النظر إلى العملية المستقرة بالمعنى الواسع كعملية مستقرة بالمعنى الواسع وبشكل فعال من أجل كل T_0 . طاقة مثل هذه العملية، المقتطعة إلى المجال $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ تزداد خطياً مع T_0 ، لكن التباين المشترك يصبح من السهل تعريفه خلال مجال أكبر وأكبر حيث $T_0 \rightarrow \infty$. افترض فيما يلي أن هذا التباين المشترك المحدد هو L_2 . هذا لا يبدو أن يستبعد أي لكن معظم العمليات المرصية.

في البداية نتطلع على التوابع الخطية والمرشحات الخطية، بإهمال المسائل الحدية وقضايا التقارب وافترض أن T_0 كبيرة لدرجة كافية؛ وسنشير إلى العمليات العشوائية على أنها مستقرة، وسنحافظ على افتراض L_2 توابع عينة.

من أجل عملية مستقرة بالمعنى الواسع وذات قيمة متوسطة صفرية $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$ و L_2 حقيقية تابع $g(t)$ ، افترض التابع الخطي $V = \int g(t)Z(t) dt$ من (49.7)،

$$(53.7) \quad E[V^2] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}_Z(t-\tau) g(\tau) d\tau \right] dt$$

$$(54.7) \quad = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) [\bar{K}_Z * g](t) dt$$

حيث تشير $\bar{K}_Z * g$ إلى طي $\bar{K}_Z(t)$ و $g(t)$. دع $S_Z(f)$ تمثل تحويل فورييه لـ $\bar{K}_Z(t)$. يسمى $S_Z(f)$ الكثافة الطيفية للعمليات المستقرة $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$. وبما أن $\bar{K}_Z(t)$ هي L_2 حقيقية ومتماثلة، فإن تحويل فورييه لها هو أيضاً L_2 ، حقيقية ومتماثلة، وكما سنرى فيما بعد، $S_Z(f) \geq 0$. وكما سنرى أيضاً أن $S_Z(f)$ عند كل تردد f تأويلها على أنها الاستطاعة لكل وحدة تردد. بفرض أن $\theta(t) = [\bar{K}_Z * g](t)$ عبارة عن طي \bar{K}_Z و g . وحيث إن K_Z و g حقيقيان، تكون $\theta(t)$ أيضاً حقيقية وبالتالي $\theta(t) = \theta^*(t)$. باستخدام نظرية باريسفال من أجل تحويل فورييه،

$$E[V^2] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\theta^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(f)\hat{\theta}^*(f)df$$

بما أن $\theta(t)$ تمثل طي \bar{K}_Z و g ، نرى أن $\hat{\theta}(f) = S_Z(f)\hat{g}(f)$. وهكذا،

$$(55.7) \quad E[V^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(f)S_Z(f)\hat{g}^*(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(f)|^2 S_Z(f)df$$

لاحظ أن $E[V^2] \geq 0$ وهذا ينطبق على كل توابع $g(t)$ الحقيقية من L_2 . حقيقة أن $g(t)$ تابع حقيقي تقيد التحويل $\hat{g}(f)$ ليُحقق $\hat{g}(f) = \hat{g}^*(-f)$ ، وبالتالي $|\hat{g}(f)| = |\hat{g}^*(-f)|$ من أجل كل قيم f . موضوع هذا التقييد وتقييد أن $|\hat{g}(f)|$ هو L_2 ، يمكن اختيار $|\hat{g}(f)|$ كأى تابع L_2 . وبطريقة أخرى يمكن اختيار $\hat{g}(f)$ بشكل اعتباطي من أجل $f \geq 0$ حسب وجود L_2 . وبما أن $S_Z(f) = S_Z(-f)$ يمكن إعادة كتابة (55.7) كما يلي:

$$E[V^2] = \int_0^{\infty} 2|\hat{g}(f)|^2 S_Z(f)df$$

وبما أن $E[V^2] > 0$ وأن $|\hat{g}(f)|$ اعتباطية ينتج أن $S_Z(f) \geq 0$ من أجل كل $f \in \mathbb{R}$. الخلاصة هنا هو أن الكثافة الطيفية لأي عملية عشوائية مستقرة بالمعنى الواسع يجب أن تكون ذات قيمة موجبة. بما أن $S_Z(f)$ هو تحويل فورييه لـ $\bar{K}_Z(t)$ ، هذا يعني أن الخاصية الهامة لأي تابع تباين مشترك بمتحول واحد هي أن له تحويل فورييه موجب. فيما يلي، ليكن $V_m = \int g_m(t) Z(t) dt$ حيث $g_m(t)$ تابع حقيقي من L_2 لأجل $m = 1, 2$. من (49.7)،

$$(56.7) \quad E[V_1 V_2] = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \bar{K}_Z(t-\tau) g_2(\tau) d\tau \right] dt$$

$$(57.7) \quad = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) [\bar{K}_Z * g_2](t) dt$$

ليكن $\hat{g}_m(f)$ عبارة عن تحويل فورييه لـ $g_m(t)$ من أجل $m = 1, 2$ ولتكن $\theta(t) = [\bar{K}_Z * g_2](t)$ هي طي \bar{K}_Z و g_2 . وليكن $\hat{\theta}(f) = S_Z(f)\hat{g}_2(f)$ وكما كان من قبل، لدينا

$$(58.7) \quad E[V_1 V_2] = \int \hat{g}_1(f)\hat{\theta}^*(f)df = \int \hat{g}_1(f)S_Z(f)\hat{g}_2^*(f)df$$

هناك ميزة رائعة للعلاقة أعلاه. إذا كان لا يوجد أي تداخل في التردد بين $\hat{g}_1(f)$ و $\hat{g}_2(f)$ ، عندئذ $E[V_1 V_2] = 0$. بكلمات أخرى، من أجل أي عملية مستقرة يجب أن يكون أي تابعين خطيين خلال مجالات ترددية مختلفة غير مترابطين. إذا كانت العملية غوصية، عندئذ تكون التوابع الخطية مستقلة. هذا يعني بالواقع أن الضجيج الغوصي خلال مجالات مختلفة يجب أن يكون مستقلاً. إن هذا صحيح ببساطة لأنه بسبب الاستقرار يثير الدهشة. يساعدنا الملحق 3.A7. في تفسير هذه الظاهرة الغامضة، وخاصة فيما يتعلق بالاستقرار الفعال. بعد ذلك، دع $\{\phi_m(t); m \in \mathbb{Z}\}$ مجموعة من التوابع الحقيقية المتعامدة المستتظمة ولتكن $\hat{\phi}_m(f)$ هي المجموعة المقابلة من تحويلات فورييه. بافتراض أن $V_m = \int Z(t)\phi_m(t)dt$ تصبح (58.7) كما يلي:

$$(59.7) \quad E[V_m V_j] = \int \hat{\phi}_m(f)S_Z(f)\hat{\phi}_j^*(f)df$$

إذا كانت مجموعة من التوابع المتعامدة المستتظمة $\{\phi_m(t); m \in \mathbb{Z}\}$ ضمن مجال ترددي ما، وإذا كانت $S_Z(f)$ ثابتة، ولنقل بقيمة

$N_0/2$ في ذلك المجال، عندها

$$(60.7) \quad E[V_m V_j] = N_0/2 \int \hat{\phi}_m(f) \hat{\phi}_j^*(f) df$$

بوساطة نظرية بارسيغال لتحويلات فورييه، لدينا $\int \hat{\phi}_m(f) \hat{\phi}_j^*(f) df = \delta_{mj}$ وبالتالي

$$(61.7) \quad E[V_m V_j] = \frac{N_0}{2} \delta_{mj}$$

وسوف نفسّر الثابت الغريب نوعاً ما $N_0/2$ في القسم التالي. الآن، ومع ذلك، فمن الممكن تفسير معنى الكثافة الطيفية لعملية الضجيج. افترض أن $S_Z(f)$ مستمر وثابت تقريباً بقيمة $S_Z(f_c)$ خلال مجال ضيق من الترددات حول f_c افترض أن $\phi_1(t)$ مقيدة في ذلك المجال الضيق. وبالتالي يكون تباين التابع الخطي $\int_{-\infty}^{\infty} Z(t) \phi_1(t) dt$ مساوياً تقريباً $S_Z(f_c)$. وبكلام آخر $S_Z(f_c)$ في بعض المعنى الأساسي يمثل طاقة الضجيج لكل درجة من الحرية عند التردد f_c . يفسر القسم التالي ذلك إلى حد أبعد.

7.7 الضجيج الغوسي الأبيض

يمكن نمذجة عمليات الضجيج الفيزيائية في أغلب الأحيان كعمليات مستقرة بقيمة متوسطة صفرية، وغوسية. هناك تبسيط آخر إلى حد أبعد الذي غالباً ما يكون معقولاً. هذا هو أن التباين المشترك بين الضجيج خلال فترتين يتلاشى بسرعة كلما ازداد الفاصل بين هذه الفترات. المجال الذي خلاله هذا التباين المشترك بشكل ملحوظ لا يساوي الصفر يكون غالباً صغيراً جداً بالنسبة للمجالات التي تتغير خلالها الإشارة بشكل كبير. هذا يعني أن تابع التباين المشترك $\bar{K}_Z(\tau)$ يبدو وكأنه نبضة قصيرة المدة حول $\tau = 0$. نحن نعلم من نظرية النظم الخطية أن $\int \bar{K}_Z(t - \tau) g(\tau) dt$ يكون مساوي لـ $g(t)$ إذا كان $\bar{K}_Z(\tau)$ عبارة عن النبضة الواحدية. أيضاً هذا التكامل يساوي تقريباً $g(t)$ إذا كان لـ $\bar{K}_Z(\tau)$ مساحة الوحدة وهو نبضة ضيقة بالنسبة لتغيرات $g(t)$. ويترتب على ذلك أنه عند نفس الظروف تصبغ المعادلة (56.7)

$$(62.7) \quad E[V_1 V_2^*] = \int_t \int_{t'} g_1(t) \bar{K}_Z(t - \tau) g_2(\tau) d\tau dt \approx \int g_1(t) g_2(t) dt$$

هذا يعني أنه إذا كان تابع التباين المشترك ضيقاً جداً بالنسبة للتتابع ذات الأهمية، فإن سلوكه بالنسبة لهذه التتابع يتحدد من قبل مساحته. بكلام آخر، يمكن النظر لتتابع التباين المشترك كنبضة دفعية ذات طيلة محددة. نشير إلى العملية العشوائية المستقرة بالمعنى الواسع والتي لها مثل تابع التباين المشترك الضيق هذا بالضجيج الأبيض الغوسي (WGN). ويطلق على المساحة تحت تابع التباين المشترك اسم الكثافة أو الكثافة الطيفية للضجيج الأبيض الغوسي WGN ويرمز لها بالرمز $N_0/2$. لذلك من أجل التتابع $g_1(t), g_2(t), \dots$ لـ \mathcal{L}_2 في المجال ذي الأهمية، ومن أجل WGN المشار إليه بـ $\{W(t); t \in \mathbb{R}\}$ ذي الكثافة $N_0/2$ يكون للمتحول العشوائي $V_m = \int W(t) g_m(t) dt$

$$(63.7) \quad E[V_m^2] = N_0/2 \int g_m^2(t) dt$$

وبشكل مماثل، يكون للمتحويلات العشوائية V_m و V_j التباين المشترك

$$(64.7) \quad E[V_j V_m] = N_0/2 \int g_j(t) g_m(t) dt$$

أيضاً تكون V_1, V_2, \dots غوسية مشتركة.

الحالة الخاصة الأكثر أهمية من (63.7) و (64.7) أن ندع $\phi_j(t)$ عبارة عن مجموعة من التتابع المتعامدة المنتظمة وندع $W(t)$ تمثل ضجيجاً أبيض غوسياً كثافته $N_0/2$. دع $V_m = \int \phi_m(t) W(t) dt$ ثم من (63.7) و (64.7) يكون

$$(65.7) \quad E[V_j V_m] = (N_0/2) \delta_{jm}$$

هذه معادلة هامة. فهي تنص على أنه إذا أمكن نمذجة الضجيج كضجيج أبيض غوسي. ثم عندما يتم تمثيل الضجيج بدلالة أي

توسع متعامد مُستنظم، تكون المتحولات العشوائية الناتجة مستقلة وموزعة بشكل متماثل (iid). لذلك يمكن أن تُمثل الإشارات بدلالة أي توسع متعامد اعتباطي، وتُمثل الضجيج الغوسي الأبيض WGN بدلالة نفس التوسع، والناتج هو متحول عشوائي غوسي مستقل وموزع بشكل متماثل.

حيث إن معاملات عملية الضجيج الأبيض الغوسي في أي توسع متعامد معيّر هي غوصية ومستقلة وموزعة بشكل متماثل، فإنه من الشائع أيضاً الإشارة إلى الشعاع العشوائي الغوسي المستقل والموزع بشكل متماثل كضجيج أبيض غوسي. إذا جعلنا $K_W(t)$ مساوياً تقريباً $(N_0/2)\delta_{jm}$ ، تُقرب الكثافة الطيفية — $S_W(f) = N_0/2$. إذا ركزنا اهتمامنا على مجال محدد من الترددات، ثم سنهتم بكون $S_W(f)$ ثابتة خلال ذلك المجال. وفي هذه الحالة، $\{W(t); t \in \mathbb{R}\}$ يمكن تمثيله كضجيج أبيض خلال ذلك المجال. وإذا كان هذا هو المجال المهم فقط، يمكننا نمذجة $S_W(f)$ بحيث تكون مساوية $N_0/2$ في أي مكان، في هذه الحالة النموذج الموافق لتابع التباين المشترك هو $(N_0/2)\delta(t)$.

سيلاحظ القارئ الدقيق أن الضجيج الأبيض الغوسي لم يتم تعريفه بشكل حقيقي. ماتم قوله، في المضمون، هو أنه إذا كانت عملية غوصية مستقرة وذات قيمة متوسطة صفرية لها تابع تباين مشترك ضيق جداً بالنسبة لتغيرات جميع التوابع المفيدة، أو أن الكثافة الطيفية ذات القيمة الثابتة خلال المجال الترددي المفيد، ثم نستطيع أن نبين أن تابع التباين المشترك هي نبضة دفعية زمنية $N_0/2$ ، حيث $N_0/2$ هي قيمة $S_W(f)$ خلال المجال المفيد. لسوء الحظ، وفقاً لتعريف العملية العشوائية، لا يمكن أن يكون هناك أي عملية عشوائية غوصية $W(t)$ لها تابع تباين مشترك هو $\bar{K}(t) = (N_0/2)\delta(t)$. والسبب في هذه المشكلة هو أن $E[W^2(t)] = K_W(0)$. يمكننا أن نفسر $K_W(0)$ إما أن يكون غير معرف أو ∞ ، ولكن في أي من الطريقتين، $W(t)$ لا يمكن أن يكون المتحول العشوائي (على الرغم من أننا يمكن أن نفكر في أنه يأخذ فقط القيم زائد أو ناقص ∞).

ينظر علماء الرياضيات إلى الضجيج الأبيض الغوسي كعملية عشوائية معقدة، في نفس المعنى الذي ينظر فيه للنبضة الدفعية الواحدة $\delta(t)$ كتابع عام. هذا هو، تابع النبضة الدفعية $\delta(t)$ لا ينظر إليه كتابع عادي يأخذ القيمة صفر من أجل $t \neq 0$ والقيمة ∞ عندما $t = 0$. بدلاً من ذلك ينظر إليه من حيث تأثيره على الآخر، تتصرف على نحو أفضل $g(t)$ ، حيث $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t)dt = g(0)$. بنفس الطريقة، لا ينظر إلى الضجيج الأبيض الغوسي من حيث المتحولات العشوائية عند كل فترة من الزمن. بدلاً من ذلك ينظر إليه على أنه عملية عشوائية عامة ذات قيمة متوسطة صفرية لها توابع خطية غوصية مشتركة والتي لها تباين وتباين مشترك معطاة في (63.7) و(64.7)، والتي تباينها المشترك يُؤخذ ليكون $(N_0/2)\delta(t)$.

يجب على المهندسين النظر إلى الضجيج الأبيض الغوسي في سياق عرض المجال الكلي والفترات الزمنية المفيدة، حيث العملية مستقرة بشكل فعال خلال المجال الزمني ولها كثافة طيفية ثابتة ضمن المجال المفيد. وفي هذا السياق، يمكن النظر إلى الكثافة الطيفية على أنها ثابتة، وإلى تابع التباين المشترك كنبضة دفعية، ويمكن استخدام (63.7) و(64.7).

الفرق بين وجهة النظر الهندسية ووجهة النظر الرياضية هو أن وجهة النظر الهندسية تستند إلى إطار فترة معينة وعرض المجال الترددي المفيد، بينما تستند وجهة النظر الرياضية إلى مجموعة دقيقة جداً من التعاريف وعمليات التحديد التي من خلالها النظريات يمكن القول دون تحديد واضح للسياق على الرغم من أن القدرة على إثبات النظريات دون إبداء السياق ممكنة، وأي تطبيق يجب أن يستند على السياق.

¹¹² كما يبدو هذا ليس واضحاً، وسوف تتم مناقشته من حيث نظرية لا علاقة لها بالموضوع في الفصل التالي

1.7.7 توسع sinc كتقريب للضجيج الغوسي الأبيض

عالجت النظرية 2.5.7 العملية $Z(t) = \sum_k Z_k \text{sinc}\left(\frac{t-kT}{T}\right)$ حيث كل متحول عشوائي $\{Z(k); k \in \mathbb{R}\}$ هو متحول مستقل وموزع بشكل متماثل و $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. وجدنا أن العملية عملية وصية مستقرة وذات قيمة متوسطة صفرية ولها تابع تباين مشترك $\bar{K}_Z(t - \tau) = \sigma^2 \text{sinc}\left(\frac{t-\tau}{T}\right)$. تعطى الكثافة الطيفية لهذه العملية عندئذ بالعلاقة:

$$S_Z(f) = \sigma^2 T \text{rec}(fT) \quad (66.7)$$

لهذه العملية كثافة طيفية ثابتة خلال عرض المجال الأساسي $W = 1/(2T)$ ، لذلك يجعل T صغيرة بشكل كافٍ، تكون الكثافة الطيفية ثابتة خلال كبر بشكل كافٍ ليشمل جميع الترددات المفيدة. وبالتالي يمكن النظر لهذه العملية كضجيج غوسي أبيض ذو كثافة طيفية $\sigma^2 T$ من أجل أي مجال مرغوب من الترددات $W = 1/(2T)$ يجعل T صغيرة بشكل كافٍ. لاحظ، على كل حال، أنه لتقريب الضجيج الأبيض الغوسي من الكثافة الطيفية $N_0/2$ ، فإن استطاعة الضجيج، أي التباين للعملية $Z(t)$ هو $\sigma^2 = WN_0$. بكلمات أخرى يجب أن تزداد σ^2 بزيادة W . هذا أيضاً يعني أن N_0 لكل تردد موجب. تُعرف الكثافة الطيفية $N_0/2$ على كل الترددات الموجبة والسالبة، وهكذا تصبح N_0 عند ضم الترددات الموجبة والسالبة كتعريف معياري لعرض المجال الترددي¹¹³.

إذا تم تمرير عملية sinc عبر مرشح خطي ذو استجابة نبضية اعتباطية $h(t)$ ، يكون الخرج عبارة عن عملية غوسية مستقرة ذات كثافة طيفية $|\hat{h}(f)|^2 \sigma^2 T \text{rec}(fT)$. وهكذا، باستخدام عملية sinc. بالإضافة للمرشح الخطي، يمكن توليد أي عملية غوسية مستقرة مع أي كثافة طيفية مرغوبة غير سالبة خلال أي عرض مجال ترددي مطلوب ومحدود. وبكلام آخر، يمكن توليد العمليات الغوسية المستقرة ذات التباينات الاعتباطية (بشرط إمكانية توليد $S(f) \geq 0$) من التوسعات المتعامدة للمتحولات الغوسية.

بما أن عملية sinc مستقرة، فإن لها طول موجة عينة ذات طاقة لانهاية. كما هو موضح في الفقرة الفرعية 2.5.7، يمكن أن تقتطع هذه العملية لتحقيق عملية مستقرة بشكل فعال مع L_2 أطوال عينة. يوفر الملحق 3.A7 بعض التمعن حول كيف يمكن لعملية غوسية مستقرة بشكل فعال خلال المجال T_0 أن تقترب من الاستقرار عندما $T_0 \rightarrow \infty$.

يمكن استخدام عملية sinc لفهم الغرابة، في كل مكان للعملية غير المترابطة في المثال 2.4.7. بضبط $\sigma^2 = 1$ في توسع sinc كلما اقتربت T من الصفر، نحصل على عملية ذات تباين مشترك يساوي الواحد من أجل $t - \tau = 0$ ويساوي الصفر فيما عدا ذلك. إن الكثافة الطيفية الموافقة المحددة تساوي الصفر في كل مكان. ما الذي سيحدث إذا كانت استطاعة العملية (أي $\bar{K}_Z(0)$) مساوية الواحد، لكن هذه الاستطاعة تكون منثورة عبر مجال أعرض وأعرض كلما $T_0 \rightarrow 0$ ، لذلك تصبح الاستطاعة لكل وحدة تردد مساوية للصفر. لتوضيح ذلك بطريقة أخرى، لاحظ أن أي قياس لعملية الضجيج هذه يجب أن تتضمن الترشيح ضمن مجال ما صغير جداً، لكن لا يساوي الصفر. وسيكون لخرج هذا المرشح تباين مساوي للصفر. رياضياً، بالطبع، التباين المشترك المحدود هو L_2 مكافئة للصفر، لذلك مرة أخرى تتطابق الحقيقة الرياضية¹¹⁴ مع الحقيقة الهندسية.

2.7.7 ضجيج عملية بواسون

إن عملية sinc في الفقرة الفرعية الأخيرة ملائمة جداً لتوليد عمليات الضجيج التي تقترب من الضجيج الغوسي الأبيض من حيث سهولة صياغة استخدامها. من جهة أخرى هذه العملية لا يمكن اعتبارها¹¹⁵ بشكل كبير كعملية فيزيائية. النموذج المطابق بشكل أفضل للظاهرة الفيزيائية، خصوصاً من أجل القنوات الضوئية، هو سلسلة نبضات ضيقة جداً التي تصل وفقاً لتوزيع بواسون في الوقت المناسب.

¹¹³ سوف يظن الشخص أن هذا المجال قد أوجد طريقة لتكون متناغمة مع حساب فقط الترددات الموجبة أو الترددات الموجبة والسالبة. على كل حال، تعبير عرض المجال يستخدم بشكل واسع في الرياضيات، وتحليل فورييه ضروري جداً للمهندسين، بحيث يجب على الشخص ببساطة التعايش مع مثل هذه الالتباسات الثانوية.

¹¹⁴ هذه العملية لا يمكن تعريفها بشكل مرضي بطريقة القياس النظرية.

¹¹⁵ الكثير من الناس، يحدد عمليات sinc هذه بتحليل خواصها بسهولة لكن بدون أي مبرر فيزيائي، هو أكثر إزعاجاً من استخدامنا سابقاً للمنابع المنقطعة عديمة الذاكرة في دراسة ترميز المنبع. في الواقع، نهج النمذجة هو نفسه في كل حالة على حدة: أولاً فهم صنف من السهل تحليله ولكن ربما تكون العمليات غير عملية ثم نستند على الفهم لفهم الحالات العملية. في الواقع عمليات sinc لها ميزة هنا: العمليات العشوائية الغوسية المستقرة محدودة المجال التي تُعرف بهذه الطريقة (على الرغم من أنها ليست طريقة توليد) يستخدم بشكل واسع في نماذج الضجيج العملية. في حين أنه ليس هناك عملياً أي استخدام لمنابع منقطعة عديمة الذاكرة كنماذج منبع عملية.

توزيع بواسون، لأغراضنا، يمكن النظر إليه على أنه مجرد الحد من عملية متقطعة زمنياً حيث يتم تجزئة محور الزمن إلى فترات ذات مدة Δ ونبضة عرضها Δ تصل في كل فترة باحتمال Δp ، مستقل عن أي فترة أخرى. عندما يتم تمرير مثل هذه العملية عبر مرشح خطي، تكون تآرجحات الخرج في كل لحظة من الزمن غوصية تقريبا إذا كان عرض المجال الترددي للمرشح صغيراً بما فيه الكفاية لدمج عدد كبير جدا من النبضات. يمكن للمرء أن يُظهر أن التركيبات الخطية لخرج المرشح تميل لأن تكون غوصية تقريباً، يجعل العملية كتقريب للعملية الغوصية.

لن نحلل هذا بدقة، لأن وجهة نظرناهي أن الضجيج الغوصي الأبيض، خلال عرض المجال المحدود هو تقريب معقول لعدد كبير من عمليات الضجيج الفيزيائية. بعد أن نفهم كيف يؤثر ذلك على الأنواع المختلفة لنظم الاتصالات، يمكن العودة للوراء لنرى فيما إذا كان هذا النموذج مناسب لعملية الضجيج الفيزيائية المعطاة. عندما ندرس الاتصالات اللاسلكية، سنجد أن المشكلة الأساسية هي ليست أن الضجيج يتم تقريبه بشكل رديء بالضجيج الأبيض الغوصي، بل أن القناة نفسها تتغير بشكل عشوائي.

8.7 إضافة الضجيج إلى الاتصالات المُعدّلة

لنأخذ بعين الاعتبار مسألة الاتصالات ذات التعديل المطالي التعامدي (QAM) مرة أخرى. يتم توليد موجة المجال الأساسي العقدية $u(t)$ من L_2 وتعديلها إلى مجال التمرير كموجة حقيقية $x(t) = 2\Re[u(t)e^{2\pi i f_c t}]$. وبعد ذلك يُصاف تابع العينة $w(t)$ من عملية الضجيج العشوائي $W(t)$ إلى $x(t)$ للحصول على الخرج $y(t) = x(t) + w(t)$ ، الذي بعد ذلك يفك تعديله وإعادة للمجال الأساسي كموجة مجال أساسي مستقبلية عقدية $v(t)$.

تعميم QAM إلى حد ما، افترض أن $u(t)$ معطاة بالعلاقة $u(t) = \sum_k u_k \theta_k(t)$ حيث التتابع $\theta_k(t)$ هي تتابع عقدية متعامدة مستنظمة وسلسلة الرموز $\{u_k; k \in \mathbb{Z}\}$ عبارة عن أعداد عقدية نحصل عليها من أبجدية الرموز وتحمل المعلومات التي يتم إرسالها من أجل كل رمز u_k ، يجب أن ننظر إلى $\Re(u_k)$ و $\Im(u_k)$ كقيم عينة من من المتحولات العشوائية $\Re(U_k)$ و $\Im(U_k)$. يتم تحديد التوزيعات الاحتمالية المشتركة لهذه المتحولات العشوائية بواسطة الأرقام الثنائية العشوائية الواردة وكيف يتم تحويلها إلى رموز. ومن ثم يشار إلى المتحول العشوائي العقدي ¹¹⁶ $U_k = \Re(U_k) + i\Im(U_k)$.

بنفس الطريقة، $\Re(\sum_k U_k \theta_k(t))$ و $\Im(\sum_k U_k \theta_k(t))$ هي عمليات عشوائية يُشار إليها على التوالي بـ $\Re(U(t))$ و $\Im(U(t))$. ثم نسمي $U(t) = \Re(U(t)) + i\Im(U(t))$ من أجل $t \in \mathbb{R}$ العملية العشوائية العقدية. يتم تعريف العملية العشوائية العقدية $U(t)$ بواسطة التوزيع المشترك لـ $U(t_1), U(t_2), \dots, U(t_n)$ لكل خيارات n, t_1, \dots, t_n . وهذا يكافئ تعريف كل من $\Re(U(t))$ و $\Im(U(t))$ كعمليات مشتركة.

نذكر من مناقشة معيار نايكوست أنه إذا أرسلنا في التعديل المطالي المتعامد QAM نبضة $p(t)$ تم اختيارها لتكون الجذر التربيعي من نايكوست، ثم تكون $p(t)$ وإزاحتها المتباعدة بمقدار T متعامدة ويمكن تقييسها لتكون متعامدة مستنظمة. وهكذا بشكل خاص الاختيار الطبيعي هنا هو $\theta_k(t) = p(t - kT)$ من أجل مثل p . لاحظ أن هذا تعميم هو تعميم من الفصل السابق بمعنى أن $\{U_k; k \in \mathbb{Z}\}$ هي سلسلة من المتحولات العشوائية العقدية باستخدام خيارات عشوائية من كوكبة إشارة بدلاً من تابع عينة ما معطى من هذه السلسلة العشوائية. وتكون موجة مجال التمرير (العشوائية) المرسله عندئذ

$$(67.7) \quad X(t) = \sum_k 2\Re\{U_k \theta_k(t) \exp[2\pi i f_c t]\}$$

وبتذكر أن الموجة المرسله لها استطاعة ضعف استطاعة موجة المجال الأساسي. نعرف الآن

$$\psi_{k,1}(t) = \Re\{2\theta_k(t) \exp[2\pi i f_c t]\}$$

$$\psi_{k,2}(t) = \Im\{-2\theta_k(t) \exp[2\pi i f_c t]\}$$

أيضاً بفرض أن $U_{k,1} = \Re(U_k)$ و $U_{k,2} = \Im(U_k)$. بالتالي يكون:

¹¹⁶ بتذكر أن المتحول العشوائي هو تحول من نقاط العينة إلى الأعداد الحقيقية، لذلك المتحول العشوائي العقدي هو تحول من نقاط العينة إلى الأعداد العقدية. في بعض الأحيان في المناقشات تشمل كل من المتحولات العشوائية والمتحولات العشوائية العقدية، حيث يساعدنا هذا بالإشارة إلى المتحولات العشوائية كمتحولات حقيقية، لكن معدل "الحقيقية" غير ضروري.

$$X(t) = \sum_k [U_{k,1}\psi_{k,1}(t) + U_{k,2}\psi_{k,2}(t)]$$

كما هو مبين في النظرية 1.6.6، تكون مجموعة توابع تمرير المجال $\{\psi_{k,\ell}; k \in \mathbb{Z}, \ell \in \{1,2\}\}$ متعامدة وكل منها له طاقة تساوي 2. هذا يفترض مرة أخرى أن تردد الحامل f_c أكبر من جميع الترددات في كل تابع مجال أساسي $\theta_k(t)$. بالطبع من أجل أن تكون (t) هي \mathcal{L}_2 ، افترض أن عدد الموجات المتعامدة كبير بشكل اعتباطي لكنه محدود ولنقل $\theta_1(t), \dots, \theta_n(t)$. لذلك $\{\psi_{k,\ell}\}$ تكون محدودة أيضاً بـ $1 \leq k \leq n$.

افترض أن الضجيج $\{W(t); t \in \mathbb{R}\}$ هو ضجيج أبيض ضمن المجال المفيد ومستقر بشكل فعال ضمن المجال الزمني المفيد، لكن له \mathcal{L}_2 توابع¹¹⁷ عينة. بما أن $\{\psi_{k,\ell}, 1 \leq k \leq n, \ell = 1,2\}$ هي مجموعة حقيقية متعامدة محدودة، فإنه يمكن استخدام نظرية الإسقاط للتعبير عن كل عينة من موجة الضجيج $\{w(t); t \in \mathbb{R}\}$ كما يلي:

$$(68.7) \quad w(t) = \sum_{k=1}^n [z_{k,1}\psi_{k,1}(t) + z_{k,2}\psi_{k,2}(t)] + w \perp (t)$$

حيث $w \perp (t)$ هي مركبة من عينة موجة الضجيج العامودية على الفضاء الممتد بواسطة $\{\psi_{k,\ell}, 1 \leq k \leq n, \ell = 1,2\}$. دع $Z_{k,\ell}$ هي متحول عشوائي ذو قيمة عينة $z_{k,\ell}$. وبالتالي يكون كل متحول عشوائي تابع خطي لـ $W(t)$. بما أن $\{\psi_{k,\ell}, 1 \leq k \leq n, \ell = 1,2\}$ تمثل مجموعة متعامدة، فإن المتحولات العشوائية $Z_{k,\ell}$ هي متحولات عشوائية غوصية مستقلة وموزعة بشكل متماثل. دع $W \perp (t)$ عملية عشوائية مقابلة لتابع العينة $w \perp (t)$ أعلاه. بتوسيع $\{w \perp (t); t \in \mathbb{R}\}$ عن طريق التوسع المتعامد المنتظم عمودياً على $\{\psi_{k,\ell}, 1 \leq k \leq n, \ell = 1,2\}$ ، يفترض أن المعاملات مستقلة عن $Z_{k,\ell}$ ، على الأقل خلال المجال الزمني والترددية المفيد. ماذا سيحدث لهذه المعاملات خارج المنطقة المفيدة فهي غير ذات أهمية، كغيرها من افتراض أن $W \perp (t)$ مستقلة عن $U_{k,\ell}$ و $Z_{k,\ell}$ من أجل $1 \leq k \leq n$ و $\ell = \{1,2\}$. وتكون الموجة المستقبلية $Y(t) = X(t) + W(t)$ عندئذ

$$Y(t) = \sum_{k=1}^n [(U_{k,1} + Z_{k,1})\psi_{k,1}(t) + (U_{k,2} + Z_{k,2})\psi_{k,2}(t)] + w \perp (t)$$

وعندما يتم فك تعديلها¹¹⁸، يتم تمثيل موجة المجال الأساسي كموجة عقدية

$$(69.7) \quad V(t) = \sum_k (U_k + Z_k)\theta_k(t) + Z \perp (t)$$

حيث كل Z_k هي متحول عشوائي عقدي معطى بالعلاقة $Z_k = Z_{k,1} + iZ_{k,2}$ والضجيج المتبقي في المجال الأساسي $Z \perp (t)$ مستقل عن $U_k, Z_k; 1 \leq k \leq n$. يؤخذ التباين لكل متحول عشوائي حقيقي $Z_{k,1}$ و $Z_{k,2}$ وفق ما هو مصطلح عليه ليكون $N_0/2$. ونحن نتبع هذا المصطلح لأننا نقيس استطاعة الدخل في المجال الأساسي، كما ذكر مرات عديدة، الاستطاعة في مجال التمرير يتم قياسها لتكون أكبر بمرتين منها في المجال الأساسي. الغاية هنا هي أن N_0 ليست ثابتاً فيزيائياً — بل هي عبارة عن استطاعة الضجيج لكل وحدة تردد موجب في الوحدات المستخدمة لتمثيل استطاعة الإشارة.

1.8.7 المتحولات العشوائية الغوصية العقدية والأشعة

تكون موجة الضجيج بعد فك تعديلها في المجال الأساسي عادة عقدية وبالتالي تمثل كما في (69.7)، بسلسلة من المتحولات العشوائية العقدية، ويفضل اعتبارها كشعاع عشوائي عقدي. من الممكن اعتبار أي شعاع مثل هذا الشعاع العشوائي العقدي ذي n بعداً $Z = Z_{re} +$

$$iZ_{im} \text{ كشعاع عشوائي حقيقي ذو } 2n \text{ بعداً } \begin{bmatrix} Z_{re} \\ Z_{im} \end{bmatrix} \text{ حيث } Z_{re} = \Re(Z) \text{ و } Z_{im} = \Im(Z).$$

¹¹⁷ بما أن الموجات المتعامدة $\theta_k(t)$ ليس من الضروري أن تكون محدودة زمنياً أو ترددياً، الافتراض هنا هو أن الضجيج هو ضجيج أبيض خلال مجال زمني أو ترددي أكبر بكثير من عرض المجال الترددي الاسمي والمجال الزمني المستخدمة في الاتصالات. هذا الافتراض ستم مناقشته لحد أبعد في الفصل القادم.

¹¹⁸ بعض الترشيح ضروري قبل فك التعديل لإزالة الضجيج المتبقي خارج المجال، لكن نحن لا نريد تحليل ذلك هنا.

بالنسبة للعديد من نفس الأسباب يكون من المرغوب فيه العمل مباشرةً مع موجة المجال الأساسي العقدية بدلاً من زوج من أمواج مجال التمرير الحقيقية، ومن المفيد غالباً التعامل مباشرةً مع الأشعة العشوائية العقدية.

تعريف 1.8.7. يكون المتحول العشوائي العقدي $Z = Z_{re} + iZ_{im}$ غوصياً إذا كان كل من Z_{im} و Z_{re} غوصي مشترك؛ Z غوصي متمائل دائرياً¹¹⁹ إذا كان غوصي وكل من Z_{im} و Z_{er} عبارة عن متحول عشوائي مستقل وموزع بشكل متمائل وله قيمة متوسطة صفرية.

مطال المتحول العشوائي الغوصي المتمائل دائرياً له توزيع رايلي وطوره ذو توزيع منتظم، أي أن له تماثلاً دائرياً. يمكن وصف المتحول العشوائي الغوصي المتمائل دائرياً Z بشكل تام بواسطة تابع تباينه $\sigma^2 = E[ZZ^*]$ ونشير للمتحوّل بـ $Z \sim \mathcal{CN}(0, \sigma^2)$. لاحظ أن الجزء الحقيقي والجزء التخيلي من Z مستقلان وموزعان بشكل متمائل ولكل منهما تباين $\sigma^2/2$.

تعريف 2.8.7. يكون الشعاع العشوائي العقدي $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)^T$ غوصي مشترك إذا كانت $2n$ مركبة حقيقية وتحليلية من غوصية مشتركة. ويكون متمائل دائرياً إذا كان توزيع Z (أي التوزيع المشترك للجزء الحقيقي والجزء التخيلي) هو نفسه كما لـ $e^{i\theta}\mathbf{Z}$ من أجل جميع زوايا الطور θ . ويكون غوصي متمائل دائرياً إذا كان غاوي مشترك ومتمائل دائرياً.

مثال 1.8.7. مثال هام عن المتحول العشوائي الغوصي المتمائل دائرياً هو $\mathbf{W} = (W_1, \dots, W_n)^T$ حيث المركبات $W_k, 1 \leq k \leq n$ مستقلة إحصائياً وكل منها هو $\mathcal{CN}(0, 1)$. وبما أن كل W_k هو $\mathcal{CN}(0, 1)$ ، يمكن أن نرى أن $e^{i\theta}\mathbf{W}$ له نفس توزيع \mathbf{W} . المركبات الحقيقية والتخيلية ذات $2n$ من \mathbf{W} مستقلة وموزعة بشكل متمائل ولها $\mathcal{N}(0, 1/2)$ لذلك تكون كثافة الاحتمال

$$(70.7) \quad f_{\mathbf{W}}(\mathbf{w}) = \frac{1}{(\pi)^n} \exp \left[\sum_{k=1}^n -|w_k|^2 \right]$$

حيث استخدمنا حقيقة أن $|w_k|^2 = \Re(w_k)^2 + \Im(w_k)^2$ من أجل كل k لاستبدال الجمع فوق تعبير $2n$ بالجمع فوق تعبير n .

تعريف 3.8.7. مصفوفة التباين المشترك K_Z ومصفوفة التباين شبه المشترك M_Z لمتحول عشوائي عقدي ذي قيمة متوسطة صفرية $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)^T$ هي مصفوفات ذات $n \times n$ تعطى على التوالي بالعلاقة

$$(71.7) \quad K_Z = E[\mathbf{Z} \mathbf{Z}^{\dagger}] \quad M_Z = E[\mathbf{Z} \mathbf{Z}^T]$$

حيث \mathbf{Z}^{\dagger} هو المرافق المنقول من \mathbf{Z}^* .

تحدد مصفوفة التباين المشترك للأشعة العشوائية الحقيقية ذات القيمة المتوسطة الصفرية جميع العزوم من الدرجة الثانية، وبالتالي في حالة الأشعة الغوصية المشتركة، تحدد التوزيع. من أجل الأشعة العشوائية العقدية يتم ضم كل من K_Z و M_Z لتحديد كل العزوم من الدرجة الثانية. وبشكل خاص، يبيّن الحساب البسيط أن

$$\begin{aligned} E[\Re(Z_k) \Re(Z_j)] &= \frac{1}{2} \Re[K_Z(k, j) + M_Z(k, j)] & E[\Im(Z_k) \Im(Z_j)] &= \frac{1}{2} \Re[K_Z(k, j) - M_Z(k, j)] \\ E[\Re(Z_k) \Im(Z_j)] &= \frac{1}{2} \Im[K_Z(k, j) + M_Z(k, j)] & E[\Im(Z_k) \Re(Z_j)] &= \frac{1}{2} \Im[K_Z(k, j) + M_Z(k, j)] \end{aligned}$$

إذا كانت \mathbf{Z} شعاعاً عشوائياً عقدياً غوصياً مشتركاً له قيمة متوسطة صفرية فإن K_Z و M_Z يحددان توزيع \mathbf{Z} ، وبالتالي يكون \mathbf{Z} غوصياً متمائلاً دائرياً إذا وفقط إذا $K_Z = K_{e^{i\theta}\mathbf{Z}}$ و $M_Z = M_{e^{i\theta}\mathbf{Z}}$ من أجل كل الأطوار θ . بحساب هذه المصفوفات لمتحول عشوائي اعتباطي يكون $K_{e^{i\theta}\mathbf{Z}} = E[e^{i\theta}\mathbf{Z} \cdot e^{-i\theta}\mathbf{Z}^{\dagger}] = K_Z$; $M_{e^{i\theta}\mathbf{Z}} = E[e^{i\theta}\mathbf{Z} \cdot e^{i\theta}\mathbf{Z}^T] = e^{2i\theta}M_Z$

وهكذا، $K_{e^{i\theta}\mathbf{Z}}$ يكون دائماً مساوي K_Z ولكن $M_{e^{i\theta}\mathbf{Z}}$ يساوي M_Z من أجل كل قيم θ الحقيقية إذاً وفقط إذا كانت M_Z مصفوفة صفرية. وقد أثبتنا النظرية التالية.

نظرية 1.8.7. يكون للشعاع العشوائي الغوصي المشترك العقدي غوصي متمائل دائرياً إذاً وفقط إذا كانت مصفوفة شبه التباين المشترك M_Z تساوي الصفر.

¹¹⁹ هذا في بعض الأحيان يشير إلى الغوصي العقدي الأصلي.

بما أن M_Z تساوي الصفر من أجل أي شعاع عشوائي غوسي متماثل دائرياً Z ، يتم تحديد توزيع Z فقط من قبل K_Z ويرمز له بـ $Z \sim \mathcal{CN}(0, K_Z)$ حيث تشير c على أن Z متماثل عقدياً ودائرياً. الشعاع العشوائي العقدي المقيس المستقل والموزع بشكل متماثل في المثال 1.8.7 يرمز له $W \sim \mathcal{CN}(0, I_n)$.

يُوضح المثالان التاليان بعض الخفايا في النظرية 1.8.7.

مثال 2.8.7. دع $Z = (Z_1, Z_2)^T$ حيث $Z_1 \sim \mathcal{CN}(0, 1)$ و $Z_2 = UZ_1$ و U مستقلة إحصائياً عن Z_1 ولها قيم ممكنة ± 1 مع احتمال يساوي $1/2$ لكل منها. من السهل رؤية أن $Z_2 \sim \mathcal{CN}(0, 1)$ ، لكن الأجزاء الحقيقية والتخيلية من Z_1 و Z_2 معاً ليست غوسية مشتركة. في الواقع، يتركز التوزيع المشترك لـ $\Re(Z_1)$ و $\Re(Z_2)$ على محوري قطري و $\Im(Z_1)$ و $\Im(Z_2)$ موزعة بشكل متماثل. وهكذا فإن Z ليس غوسياً مشتركاً، والنظرية لا يمكن تطبيقها. على الرغم من أن كل من Z_1 و Z_2 بشكل فردي غوسي متماثل دائرياً، لا يكون Z غاوسياً متماثلاً دائرياً. في هذا المثال، اتضح أن Z متماثل دائرياً و $M_Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. يمكن تغيير المثال قليلاً، بتغيير تعريف Z_2 لـ $\Re(Z_2) = U\Re(Z_1)$ و $\Im(Z_2) \sim \mathcal{N}(0, 1/2)$ ، حيث $\Im(Z_2)$ مستقلة إحصائياً عن كل المتحولات الأخرى. ثم تبقى M_Z مساوية للصفر، لكن Z غير متماثل دائرياً. لذلك بدون خاصية الغوسي المشترك، فإن مصفوفة التباين شبه المشترك لا يمكن أن تحدد فيما إذا كان Z متماثل دائرياً.

مثال 3.8.7. افترض أن الشعاع $Z = (Z_1, Z_2)^T$ حيث $Z_1 \sim \mathcal{CN}(0, 1)$ و $Z_2 = Z_1^*$. وبما أن $\Re(Z_2) = \Re(Z_1)$ و $\Im(Z_2) = -\Im(Z_1)$ ، نرى أن المركبات الحقيقية والتخيلية الأربعة لـ Z هي غوسية مشتركة، لذلك يكون Z غوسي عقدي مشترك والنظرية مطبقة. نحن نرى أن $M_Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، وبالتالي Z غوسي مشترك لكن غير متماثل دائرياً. هذا الأمر يبدو منطقياً تماماً، حيث إنه عندما تكون Z_1 حقيقية (أو تقريباً حقيقية)، فإن $Z_1 = Z_2$ (أو $Z_1 \approx Z_2$) وعندما تكون Z_1 عقدية نقية (أو قريبة من العقدية النقية)، يكون Z_2 عكس Z_1 (أو $Z_2 \approx -Z_1$)، وهكذا فإن العلاقة بين Z_1 و Z_2 هي بالتأكيد ليست مرحلة ثابتة الصفحة.

إن الذي يجعل هذا المثال مثيراً للاهتمام هو أن كلا من $Z_1 \sim \mathcal{CN}(0, 1)$ و $Z_2 \sim \mathcal{CN}(0, 1)$. لذلك كما في المثال 2.8.7 هو العلاقة بين Z_1 و Z_2 التي تخرق خاصية الغوسية المتماثلة دائرياً. هنا هذا التماثل الدائري هو الذي يسبب المشكلة، في حين في المثال 2.8.7 لا يوجد توزيع غوسي مشترك.

وجدنا في الفقرة 3.7 أن التقريب الممتاز للأشعة العشوائية الغوسية المشتركة الحقيقية كان بعرضها كتحويلات خطية من الأشعة العشوائية ذات مركبات مستقلة وموزعة بشكل متماثل ولكل منها $\mathcal{N}(0, 1)$. سوف نجد هنا أن نفس التقريب يطبق على الأشعة الغوسية المتماثلة دائرياً بالتالي دع A تمثل مصفوفة عقدية اعتباطية ذات $n \times m$ ودع الشعاع العشوائي العقدي $Z = (Z_1, \dots, Z_n)^T$ يُعرف بالعلاقة

$$Z = AW \quad (72.7)$$

حيث $W \sim \mathcal{N}(0, I_m)$. الشعاع العشوائي العقدي المعرف بهذه الطريقة غوسي مشترك حقيقي وأجزاء تخيلية. لبيان ذلك نمثل (72.7) بالتحويلات الخطية الحقيقية التالية ذات الفضاء الحقيقي ذي $2n$ بعد:

$$\begin{bmatrix} Z_{re} \\ Z_{im} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{re} & -A_{im} \\ A_{im} & A_{re} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{re} \\ W_{im} \end{bmatrix} \quad (73.7)$$

حيث $Z_{re} = \Re(Z)$ ، $Z_{im} = \Im(Z)$ ، $A_{re} = \Re(A)$ و $A_{im} = \Im(A)$. الشعاع العشوائي Z هو أيضاً متماثل دائرياً¹²⁰. لرؤية هذا، لاحظ أن

$$K_Z = E[A W W^T A^\dagger] = AA^\dagger \quad M_Z = E[A W W^T A^T] = 0 \quad (74.7)$$

وبالتالي من النظرية 1.8.7، يكون Z غوسي متماثل دائرياً و $Z \sim \mathcal{CN}(0, AA^\dagger)$. هذا يُثبت الجزء المتعلق بالشرط من النظرية التالية.

نظرية 2.8.7. يكون الشعاع العشوائي العقدي Z غوسياً متماثلاً دائرياً إذاً فقط إذا كان يمكن التعبير عنه بـ $Z = AW$ من أجل

¹²⁰ على العكس من ذلك، كما سنرى لاحقاً يمكن تعريف كل الأشعة العشوائية الغوسية المشتركة المتماثلة دائرياً بهذه الطريقة.

مصفوفة عقدية A ولشعاع عشوائي غوسي متمائل دائرياً ومستقل وموزع بشكل متمائل $W \sim \mathcal{N}(0, I_m)$.

البرهان: دع $Z \sim K_Z$ يمثل شعاع عشوائي غوسي اعتباري متمائل دائرياً. من الملحق 1.A7، يمكن أن نعبر عن K_Z بالعلاقة:

$$(75.7) \quad K_Z = Q \Lambda Q^{-1}$$

حيث Q واحدة أعمدها هي الأشعة الذاتية من K_Z . المصفوفة Λ مصفوفة قطرية ومدخلاتها هي القيم الذاتية من K_Z ، التي جميعها غير سالبة. ثم يمكننا التعبير عن Z بالشكل $Z = RW$ حيث $R = Q \sqrt{\Lambda} Q^{-1}$ و $W \sim \mathcal{N}(0, I)$.

لاحظ أن أي تابع خطي، ولنقل $V = b^+ Z$ من الشعاع العشوائي الغوسي المتمائل دائرياً Z يمكن التعبير عنه بالشكل $V = (b^+ A)W$ وبالتالي هو متحول عشوائي ذو تماثل دائري. بشكل خاص، من أجل أي تابع ذاتي متعامد معيّر q_k من K_Z ، أن $\langle Z, q_k \rangle = q_k^+ Z$ هو شعاع عشوائي ذو تماثل دائري. علاوة على ذلك، باستخدام (75.7)، يمكن أن نرى بسهولة أن هذه المتحولات غير مترابطة، وعلى الأخص،

$$E[\langle Z, q_k \rangle \langle Z, q_j \rangle^*] = \lambda_k \delta_{k,j}$$

حيث إن هذه الأشعة العشوائية غوسية مشتركة، هذا يعني أيضاً أنها مستقلة إحصائياً. من نظرية الإسقاط، يمكن تمثيل أي قيمة عينة z من الشعاع العشوائي Z بالشكل $z = \sum_j \langle z, q_j \rangle q_j$ ، ويكون لدينا أيضاً

$$(76.7) \quad z = \sum_j \langle z, q_j \rangle q_j$$

تمثل هذه العلاقة Z كتوسع متعامد معيّر ذي عوامل، $\langle Z, q_j \rangle$ مستقلة من الشعاع العشوائي الغوسي المتمائل دائرياً. تكون كثافة الاحتمال لـ Z عندئذ ببساطة عبارة عن كثافة الاحتمال لسلسلة المعاملات¹²¹. بتذكّر أن كل شعاع عشوائي غوسي متمائل دائرياً $\langle Z, q_j \rangle$ يقابل شعاعين عشوائيين حقيقيين مستقلين بتباين $\lambda_k/2$ ، تكون الكثافة الناتجة، بافتراض أن كل القيم الذاتية موجبة هي:

$$(77.7) \quad f_Z(z) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\pi \lambda_j} \exp(-|\langle z, q_j \rangle|^2 \lambda_j^{-1})$$

هذه هي كثافة احتمال n متحول عشوائي غوسي مستقل ومتماثل دائرياً، $(\langle Z, q_1 \rangle, \dots, \langle Z, q_n \rangle)$ ذي تباينات $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ على التوالي. وهذه هي نفس النتيجة المشابهة من أجل الأشعة العشوائية الحقيقية الغوسية المشتركة والتي تقول إن هناك دائماً أسساً متعامدة مستنظمة تكون فيها المتحولات غوسية ومستقلة. يُشكل هذا التشابه الطريقة الأبسط (نوعاً ما) لتصور أن الأشعة الغوسية المتماثلة دائرياً لديها نفس النوع من التماثل ببيضاوي الشكل كما هو لحالة الأشعة الحقيقية، إلا أنه هنا، كل متحول عشوائي عقدي هو أيضاً متمائل دائرياً.

غالباً ما يكون من الأكثر ملاءمة التعبير عن f_Z من أجل $Z \sim \mathcal{CN}(0, K_Z)$ مباشرةً بدلالة K_Z . بمعرفة أن $K_Z^{-1} = Q \Lambda^{-1} Q^{-1}$ ، تصبح

$$(78.7) \quad f_Z(z) = \frac{1}{\pi^n \det(K_Z)} \exp(-z^+ K_Z^{-1} z)$$

يجب أن يكون واضحاً أن (77.7) أو (78.7) هي أيضاً إذاً - وفقط - إذا كانت شروط التماثل الدائري للأشعة العشوائية الغوسية المشتركة مع مصفوفة تباين مشترك - محددة - موجبة.

¹²¹ هذا يعتمد على حقيقة "واضحة" أن الحجم التدريجي يكون نفسه من أجل في أي أسس متعامدة مستنظمة. القارئ المتشكك مع بعض العمل يمكنه العمل مع كثافة الاحتمال في \mathbb{R}^{2n} ثم يحول إلى \mathbb{C}^n .

9.7 نسبة الإشارة إلى الضجيج

هناك عددٌ من المقاييس المختلفة لاستطاعة الإشارة، واستطاعة الضجيج، والطاقة لكل رمز، والطاقة لكل بت، وهكذا... الخ، التي تعرف هنا. يتم شرح هذه المقاييس من ناحية التعديل المطالي المتعامد QAM والتعديل النبضي المطالي PAM، لكنها أيضاً بشكل أكثر عمومية. في الفقرة السابقة تم استخدام مجموعة عامة إلى حد ما من التوابع المتعامدة المنتظمة، وهنا يُفترض مجموعة محددة. اعتبر التوابع المتعامدة المنتظمة $p_k(t) = p(t - kT)$ كما هي مستخدمة في QAM، واستخدم عرض المجال الترددي الأسمي لمجال التمرير $W = 1/T$. يمكن أن نفترض أن كل رمز U_k من QAM مستقل وذا توزيع متماثل وله طاقة $E_s = E[|U_k|^2]$. هذه هي طاقة الإشارة لكل عنصر حقيقي بالإضافة إلى عنصر تخيلي. تُعرف طاقة الضجيج لكل عنصر حقيقي وتخييلي بحيث تكون N_0 . وهكذا يتم تعريف نسبة الإشارة إلى الضجيج لتكون

$$(79.7) \quad \text{SNR} = \frac{E_s}{N_0} \quad \text{for QAM}$$

من أجل PAM في المجال الأساسي، استخدام التوابع الحقيقية المتعامدة المنتظمة لتحقيق $p_k(t) = p(t - kT)$ تكون طاقة الإشارة لكل رمز هي $E_s = E[|U_k|^2]$ بما أن الرمز وحيد البعد، أي أنه، حقيقي، يتم تعريف طاقة الضجيج في هذا البعد الواحد بحيث تكون $N_0/2$ وهكذا يتم تعريف SNR لتكون

$$(80.7) \quad \text{SNR} = \frac{2E_s}{N_0} \quad \text{for PAM}$$

من أجل QAM هناك W درجة عقدية من الحرية في الثانية، لذلك تعطى استطاعة الإشارة بالعلاقة $P = E_s W$. ومن أجل PAM بالمجال الأساسي، يوجد $2W$ درجة من الحرية في الثانية، لذلك تكون استطاعة الإشارة $P = 2E_s W$. وهكذا في كل حالة، تصبح SNR

$$(81.7) \quad \text{SNR} = \frac{P}{N_0 W} \quad \text{for QAM and PAM}$$

يمكننا تفسير المقام هنا على أنه الاستطاعة الكلية للضجيج خلال عرض المجال عرض المجال W ، لذلك يُنظر إلى SNR أيضاً على أنها استطاعة الإشارة مقسومة على استطاعة الضجيج في المجال الأسمي. بالنسبة للذين يرغبون في إنقاص عدد هذه الصيغ أن يتذكروا، أن كل هذه المعادلات تأتي من التعريف الأساسي كطاقة الإشارة لكل درجة من الحرية مقسومة على طاقة الضجيج لكل درجة من الحرية. يستخدم كل من PAM و QAM نفس طاقة الإشارة لكل درجة من الحرية (أو على الأقل لكل زوج عقدي من درجات الحرية)، بينما يمكن أن تستخدم النظم الأخرى الدرجات المتوفرة من الحرية بشكل مختلف. على سبيل المثال، PAM ذو عرض المجال الأساسي W يشغل عرض مجال $2W$ إذا تم تعديله إلى مجال تمرير، ويستخدم فقط نصف درجات الحرية المتوفرة. لهذه الحالات، يمكن تعريف SNR بعدة طرائق مختلفة اعتماداً على السياق. وكمثال آخر القفز الترددي هو تقنية تستخدم في كل من الاتصالات اللاسلكية والأمنة. وهي نفس QAM، باستثناء أن تردد الحامل f_c يتغير بشكل شبه عشوائي على فترات طويلة بالنسبة لفترة الرمز. هنا يمكن أخذ عرض المجال الترددي W على أنه عرض المجال الترددي لنظام QAM الأساسي، أو يمكن أن يُؤخذ على أنه عرض المجال الترددي الكلي الذي يقفز f_c . تكون SNR في (81.7) مختلفة تماماً في الحالتين.

إن ظهور W في مقام عبارة SNR في المعادلة (81.7) مثير للدهشة نوعاً ما ومثير للقلق في البداية. حيث يخبرنا أنه إذا تم تخصيص عرض مجال كبير لنظام الاتصالات مع نفس الاستطاعة المتاحة، عندئذ تنخفض SNR. هذا هو أفضل تفسير عن طريق عرض SNR من حيث طاقة الإشارة إلى الضجيج لكل درجة من الحرية. كلما ازداد عدد درجات الحرية في الثانية، فإن SNR تنخفض، لكن يزداد العدد المتاح من درجات الحرية. وسنرى لاحقاً أن الريح الصافي موجب.

عامل آخر هام هو المعدل R ، وهو عبارة عن عدد البتات المرسل في الثانية، والذي هو عدد البتات بالرمز، $\log_2 |A|$ مضروباً بعدد الرموز في الثانية. وبالتالي

$$(82.7) \quad R = W \log_2 |A|, \quad \text{for QAM}; \quad R = 2W \log_2 |A| \quad \text{for PAM}$$

من العوامل الهامة الفعلية للطيف للنظام، التي تُعرف على أنها $\rho = R/W$. هذا هو عدد البتات المرسل في الثانية bit/sec لكل وحدة

بمجال ترددي. من أجل PAM، QAM، تعطى ρ بالعلاقة (82.7) لتكون

$$(83.7) \quad \rho = \log_2 |\mathcal{A}|, \quad \text{for QAM}; \quad \rho = 2 \log_2 |\mathcal{A}| \quad \text{for PAM}$$

بشكل عام يمكن تعريف الفعالية الطيفية ρ بأنها عدد البتات المرسل لكل درجة من الحرية. من (83.7) نجد أن تحقيق قيمة كبيرة من الفعالية الطيفية يتطلب جعل رمز الأيجدية كبيراً؛ لاحظ أن ρ تزداد فقط لوغاريماً مع $|\mathcal{A}|$.

أيضاً هناك عامل آخر هو طاقة البت E_b . وبما أن كل رمز يحتوي على $\log_2 \mathcal{A}$ بت، تعطى E_b لكل من PAM، QAM بالعلاقة

$$(84.7) \quad E_b = \frac{E_s}{\log_2 |\mathcal{A}|}$$

إحدى الكميات الأساسية في الاتصالات هي النسبة E_b/N_0 . يتم قياس كل من E_b و N_0 بنفس الطريقة وبالتالي فإن النسبة عديمة البعد وهذه النسبة هي المهمة بدلاً من E_b أو N_0 لوحدها. إن إيجاد طرائق لإنقاص E_b/N_0 مهم، وخاصةً عندما تستخدم أجهزة الإرسال بطاريات. من أجل QAM، بتعويض (79.7) و (83.7) في (84.7) نحصل على

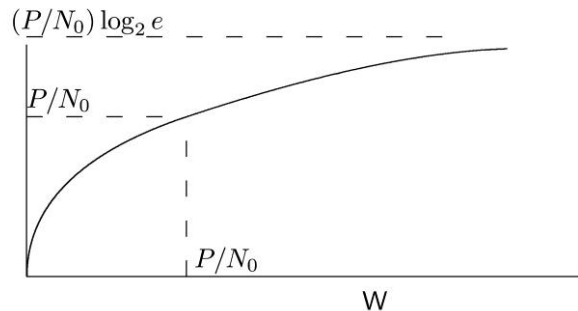
$$(85.7) \quad \frac{E_b}{N_0} = \frac{\text{SNR}}{\rho}$$

وتصلح هذه المعادلة من أجل PAM. وهي تنص على أن الحصول على قيمة صغيرة لـ E_b/N_0 يتطلب نسبة صغيرة من SNR إلى ρ . نحن ننظر إلى هذا من خلال مصطلحات سعة القناة.

إحدى النتائج الأكثر شهرة لشانون هي تطوير مفهوم سعة القناة C لقناة اتصال ذات ضجيج أبيض غوسي جمعي. ويُعرف هذا على أنه أعلى قيمة لعدد البتات في الثانية التي يمكن إرسالها واستقبالها باحتمال خطأ اعتباطي صغير. من أجل قناة ذات ضجيج أبيض غوسي وذات عرض مجال محدود W واستطاعة إشارة مستقبلية محدودة P ، هو برهن أنّ

$$(86.7) \quad C = W \log_2 \left(1 + \frac{P}{W N_0} \right)$$

وهو أثبت أنه يمكن تحقيق أي معدل $R < C$ باحتمال خطأ اعتباطي صغير وذلك باستخدام ترميز قناة ذات طول قيد كبير بشكل اعتباطي. وبين أيضاً، كما أكدت النتائج لاحقاً، حقيقة أن المعدلات الأكبر تؤدي إلى احتمالات خطأ أكبر. وسنشرح هذه النتيجة في الفصل القادم. تستخدم هذه النتيجة بشكل واسع كميّار للمقارنة مع نظم معينة. يبيّن الشكل (5.7) رسماً تخليطياً لـ C كتابع لـ W . لاحظ أن C تزداد بازدياد W ، لتصل إلى الحد $(P/N_0) \log_2 e$ حيث $W \rightarrow \infty$. ويُعرف هذا بالحد الأقصى لشانون للمعدل الممكن تحقيقه. لاحظ أيضاً أنه عندما $W = P/N_0$ ، أي أن، عندما يكون عرض المجال كبيراً بما فيه الكفاية لتصل SNR إلى الواحد، عندئذ تكون C ضمن حدّ $1/\log_2 e$ ، التي تشكل 69% من الحد الأقصى لشانون.



الشكل 5.7: السعة كتابع لعرض المجال W من أجل P/N_0 ثابتة.

لأجل أي معدل ممكن تحقيقه، R ، أي المعدل الذي يمكن عنده جعل احتمال الخطأ صغير بشكل اعتباطي عن طريق الترميز والاستراتيجيات الذكية الأخرى، تنص النظرية أعلاه على أن $R < C$. إذا أعدنا كتابة المعادلة (86.7) باستبدال $P/(W N_0)$ بـ SNR و ρ بـ R/W نحصل على

$$(87.7) \quad \rho < \log_2 (1 + \text{SNR})$$

وبتعويض هذه العلاقة في المعادلة (85.7)، نحصل على

$$\frac{E_b}{N_0} > \frac{\text{SNR}}{\log_2(1 + \text{SNR})}$$

هذه عبارة عن تابع يتزايد باطراد تبعاً للمتغير واحد SNR التي بدورها تتناقص بزيادة W . وبالتالي تتناقص النسبة $(E_b/N_0)_{\min}$ باطراد بزيادة W . ونصل إلى الحد $\ln 2 = 0.693$ ، أي -1.59 dB عندما $W \rightarrow \infty$. وعندما تتناقص، فإنها تزداد لتصل إلى 0 dB عند $\text{SNR} = 1$ ، وتزداد بدون حدود لغاية القيم الأصغر لـ W . الفعالية الطيفية المحدودة، مع ذلك تكون مساوية C/W . وهي تتناقص باطراد بزيادة W ، وتصبح مساوية الصفر عندما $W \rightarrow \infty$. وبكلام آخر، توجد مفاضلة بين E_b/N_0 (التي نرغب أن تكون صغيرة) والفعالية الطيفية (التي نرغب أن تكون كبيرة) وهذا سنناقشه إلى حد أبعد في الفصل التالي.

10.7 ملخص عن العمليات العشوائية

من الأفضل عادةً نموذج الضجيج الإضافي في نظم الاتصالات الفيزيائية كعملية عشوائية، أي مجموعة من المتحولات العشوائية، لكل متحول قيمته الحقيقية اللحظية من الزمن. يمكن تحديد العملية العشوائية بوساطة التوزيع الاحتمالي المشترك خلال مجموعة منتهية من الفترات، لكن الضجيج الإضافي في أغلب الأحيان تتم نمذجته بافتراض أن المتحولات العشوائية جميعها غوسية وذات قيمة متوسطة صفرية وتوابع التوزيع المشترك لها هي غوسية مشتركة.

كان الدافع لهذه الافتراضات جزئياً نظرية النهاية المركزية، جزئياً من سهولة التعامل مع العمليات الغوسية، جزئياً عن طريق العرف، وجزئياً بوساطة الخواص الحدية المختلفة. وجدنا أن الغوسي المشترك يعني قدراً كبيراً أكثر من الغوسي الإفرادي، وأن الكثافات المشتركة يتم تحديدها بوساطة مصفوفة التباين المشترك. هذه الكثافات لها مجسم قطع ناقص متساوي الاحتمالات والذي محاوره هي التوابع الذاتية من مصفوفة التباين المشترك.

تابع العينة، ولنقل $Z(t, w)$ من العملية العشوائية $Z(t)$ يمكن أن ننظر إليه ونفسره على أنه متجه L_2 . من أجل أي تابع ثابت $g(t)$ من L_2 ، فإن الجداء الداخلي $\langle g(t), Z(t, w) \rangle$ يحول w إلى عدد حقيقي وبالتالي يمكن أن ننظر إليها على Ω كمتحول عشوائي. يسمى هذا التابع العشوائي تابع خطي من $Z(t)$ ويرمز له بـ $\int g(t)Z(t)dt$.

تنشأ هذه التوابع الخطية عند توسيع العملية العشوائية إلى توسع متعامد مستنظمة وأيضاً عند كل فترة عندما تُمر العملية العشوائية خلال مرشح خطي. للتبسيط هذه التوابع الخطية لا يتم عرضها بشكل نظري، على الرغم من أن تطوير L_2 في الفصل الرابع يوفر بعض التمعن عن الخفايا الرياضية المعنية.

يُنظر عادةً إلى عمليات الضجيج على أنها مستقرة، والذي يعني عملياً أن قيمها الإحصائية لا تتغير مع الزمن. وهذا يولد مشكلتين — الأولى لها طاقة محدودة والثانية هي أنه لا توجد طريقة واضحة لمعرفة ما إذا كانت النتائج حساسة للغاية لمنطق الزمن حتى خارج المنطقة المفيدة. يتم التعامل مع كل من هذه المشاكل من خلال تعريف الاستقرار الفعال (أو الاستقرار الفعال بالمعنى الواسع) من حيث سلوك العملية خلال فترة محدودة. يظهر هذا التحليل، على سبيل المثال أن التوابع الغوسية الخطية تعتمد فقط على الاستقرار الفعال خلال المنطقة المفيدة. من الناحية العملية، هذا يعني أن النتائج البسيطة الناتجة عن افتراض الاستقرار يمكن استخدامها بدون قلق بالنسبة لإحصائيات العملية خارج المجال — الزمني المفيد.

يمكن أيضاً استخدام الكثافة الطيفية للعملية المستقرة بدون قلق بالنسبة للعملية خارج المجال — الزمني المفيد. إذا كانت العملية مستقرة بالمعنى الواسع (WSS) وبشكل فعال، يكون لها تابع تباين مشترك ذو متغير واحد المقابل للفترة المفيدة. وهذا له تحويل فورييه الذي يعمل بوصفه الكثافة الطيفية خلال المنطقة المفيدة. كيف تتغير هذه النتائج عند اقتراب المنطقة المفيدة من اللانهاية هذا ما سيتم شرحه في الملحق 3.A7.

A7 ملحق: مواضيع تكميلية

1.A7 خواص مصفوفات التباين

يلخص هذا الملحق بعض خواص مصفوفات التباين المشترك التي هي مفيدة غالباً ولكن ليست في غاية الأهمية في معالجتنا للعمليات العشوائية. بدلاً من تكرار كل شيء مرتين سوف ندمج معالجة كل من المتحولات العشوائية والعقدية معاً. خلال القراءة الأولى، مع ذلك، يمكن للقارئ أن يفترض أن يكون كل شيء حقيقي. تكون معظم النتائج هي نفسها في كل حالة، على الرغم أن علامة المرافق العقدي يمكن إزالتها في الحالة الحقيقية. من المهم فهم أن الخواص المتطورة هنا تنطبق على المتحولات العشوائية غير الغوصية والغوصية. كل المتحولات العشوائية والمتحولات العشوائية هنا لتكون ذات قيمة متوسطة صفرية.

المصفوفة المربعة K هي مصفوفة تباين مشترك إذا كان المتحول العشوائي Z (الحقيقي أو العقدي) موجود مثل ذلك $K = E[Z Z^T]$. يطلق على المرافق العقدي للتبديل، Z^{T*} تبديل هيرميتيان *Hermitian transpose* ويُرمز له بالرمز Z^\dagger . إذا كان Z حقيقي، بالطبع، $Z^T = Z^\dagger$ وبشكل مماثل، من أجل مصفوفة K ، يكون مرافق هيرميتيان، المشار له بـ K^\dagger ، هو K^{T*} . تكون المصفوفة هيرميتيانة إذا كان $K = K^\dagger$ وبالتالي مصفوفة هيرميتيان الحقيقية (أي المصفوفة الهيرميتيانة التي تحتوي على تعابير حقيقية فقط) هي مصفوفة متماثلة.

تكون المصفوفة المربعة K ذات $n \times n$ مع تعابير حقيقية أو عقدية ذات قيمة غير سالبة محددة إذا كانت هيرميتيانة وإذا كان $b^\dagger K b$ حقيقي غير سالب من أجل كل $b \in \mathbb{C}^n$. وهي موجبة محددة إذا، بالإضافة، كان $b^\dagger K b > 0$ من أجل أي $b \neq 0$. ندرج الآن بعض العلاقات الهامة بين غير السالب المحدود، الموجب المحدود، ومصفوفات التباين المشترك وبعض حالات أخرى من الخواص المفيدة لمصفوفات التباين المشترك.

1. تكون كل مصفوفة تباين مشترك K غير سالبة محددة. لبيان هذا، دع Z هي متحول عشوائي حيث إن $K = E[Z Z^\dagger]$. المصفوفة K هي هيرميتيانة حيث $E[Z_k Z_m^*] = E[Z_m^* Z_k]$ من أجل كل قيم k, m . من أجل أي $b \in \mathbb{C}^n$ ، دع $X = b^\dagger Z$. ثم يكون $0 \leq E[|X|^2] = b^\dagger K b$

$$E[(b^\dagger Z)(b^\dagger Z)^*] = E[b^\dagger Z Z^\dagger b] = b^\dagger K b$$

2. من أجل أي مصفوفة عقدية A ذات $n \times n$ ، تكون المصفوفة $K = A A^\dagger$ مصفوفة تباين مشترك. في الواقع، دع Z لها n عنصر وحدة تباين مستقلة ولذلك K_Z هي مصفوفة الوحدة I_n . ثم يكون $Y = A Z$ مصفوفة تباين مشترك $K_Y = E[(A Z)(A Z)^\dagger] = A A^\dagger$. لاحظ أن إذا كانت A حقيقية و Z ، تكون Y حقيقية بالطبع، وبالطبع، K_Y حقيقية. ومن الممكن أيضاً أن تكون A حقيقية و Z عقدية، وفي هذه الحالة تبقى K_Y حقيقية، لكن Y هي عقدية.

3. تكون مصفوفة التباين المشترك K موجبة محددة إذاً فقط إذا كانت غير فردية، لبيان هذا دع $K = E[Z Z^\dagger]$ ولاحظ أنه إذا كان $b^\dagger K b = 0$ من أجل $b \neq 0$ ، ثم يكون $X = b^\dagger Z$ تباين يساوي الصفر. وبالتالي هي مساوية للصفر باحتمال يساوي الواحد. وهكذا $E[X Z^\dagger] = 0$ ، وكذلك $b^\dagger E[Z Z^\dagger] = 0$. بما أن $b \neq 0$ و $b^\dagger K b = 0$ ، فإن K يجب أن تكون فردية. وبالعكس، إذا كانت K فردية، هناك بعض b بحيث $K b = 0$ ، وبالتالي $b^\dagger K b$ هي صفر أيضاً.

4. يكون العدد العقدي λ هو القيمة الذاتية للمصفوفة المربعة K إذا كان $K q = \lambda q$ لأجل شعاع ما غير صفري q ، تكون q المقابلة هي المتجه الذاتي لـ K . النتائج التالية حول القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفات المحددة الموجبة (غير السالبة) K هي نتائج جبرية خطية قياسية (انظر على سبيل المثال سترانغ، الفقرة 5.5):

كل القيم الذاتية من K هي موجبة (غير سالبة). إذا كانت K حقيقية، فإن الأشعة الذاتية يمكن أن تؤخذ لتكون حقيقية. تكون الأشعة الذاتية للقيم الذاتية المختلفة متعامدة، وتُشكل الأشعة الذاتية لأي قيمة ذاتية فضاء جزئياً له يُعد يطلق عليه تعدد تلك القيمة. إذا كانت K هي مصفوفة ذات $n \times n$ ، بالتالي يمكن اختيار n من الأشعة الذاتية المستنظمة q_1, \dots, q_n . القائمة المقابلة من القيم الذاتية، $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ليس من الضروري أن تكون مختلفة، على وجه التحديد، عدد التكرارات لكل قيمة ذاتية يساوي تعدد تلك القيمة الذاتية. وأخيراً $\det(K) = \prod_{k=1}^n \lambda_k$.

5. إذا كانت K محددة غير سالبة، دع Q هي مصفوفة لها أعمدة متعامدة مستنظمة، q_1, \dots, q_n المحددة أعلاه. ثم تحقق $Q K Q = Q \Lambda$ حيث $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. هذا هو ببساطة نسخة شعاع من علاقة الشعاع الذاتي/القيمة الذاتية أعلاه. وحيث إن $Q^\dagger Q = I_n$ تحقق $Q^{-1} = Q^\dagger$ بعد ذلك يكون لدينا أيضاً $Q^{-1} = Q^\dagger$ وبالتالي $Q Q^\dagger = I_n$ ، هذا يعني أن صفوف Q هي أيضاً $q_k^\dagger q_m = \delta_{km}$

متعامدة مستنظمة. وأخيراً، من خلال مرحلة مابعد التعداد $KQ = Q\Lambda$ في Q^\dagger ، نرى أن $K = Q\Lambda Q^\dagger$. تسمى المصفوفة Q مصفوفة واحدة إذا كانت عقدية ومتعامدة إذا كانت حقيقية.

6. إذا كانت K موجبة محدودة، ثم $Kb \neq 0$ لأجل $b \neq 0$. وبالتالي يمكن أن يكون لـ K قيم ذاتية غير صفرية وتكون Λ غير فردية. ومن ثم فإن K يمكن أن تكون معكوسة أي $K^{-1} = Q\Lambda^{-1}Q^\dagger$. ومن أجل أي شعاع b ،

$$b^\dagger K^{-1} b = \sum_k \lambda_k^{-1} | \langle b, q_k \rangle |^2$$

ليبان هذا، لاحظ أن $b^\dagger K^{-1} b = b^\dagger Q\Lambda^{-1}Q^\dagger b$. بافتراض أن $v = Q^\dagger b$ واستخدام حقيقة أن صفوف Q^T هي أشعة متعامدة مستنظمة، نرى أن q_k هي المركبة ذات الترتيب k من v . وبالتالي يكون لدينا $v^\dagger \Lambda^{-1} v = \sum_k \lambda_k^{-1} |v_k|^2$ التي تكون مكافئة للنتيجة المطلوبة. لاحظ أن $\langle b, q_k \rangle$ هو مسقط b في اتجاه q_k .

7. $\det K = \prod_{k=1}^n \lambda_k$ حيث $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ هي القيم الذاتية لـ K المتكررة تبعاً لتعداداتها. وبالتالي إذا كانت K محددة موجبة، يكون $\det K > 0$ وإذا كانت K محددة غير سالبة، يكون $\det K \geq 0$.

8. إذا كانت K مصفوفة محددة موجبة (نصف محددة)، ثم أنه هناك تحديد فريد موجب (نصف تحديد) هو مصفوفة الجذر التربيعي R تحقق $R^2 = K$. وتعطى R ، بشكل خاص، بالعلاقة:

$$R = Q\Lambda^{1/2}Q^\dagger \text{ where } \Lambda^{1/2} = \text{diag} (\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \quad (88.7)$$

9. إذا كانت K مصفوفة محددة غير سالبة، ثم K مصفوفة تباين مشترك. وبشكل خاص، K هي مصفوفة تباين مشترك من $Y = RV$ حيث R هي مصفوفة الجذر التربيعي في (88.7) و $K_V = I_m$.

يبيّن هذا أن المتحولات العشوائية الغوسية المشتركة ذات القيمة المتوسطة الصفرية موجودة في أي مصفوفة تباين مشترك مطلوبة: تعريف الغوسي المشترك هنا كتركيب خطي من المتحولات العشوائية العادية لا يجد من مجموعة ممكنة من مصفوفات التباين المشترك. من أجل أي مصفوفة تباين مشترك معطاة K ، هناك العديد من الخيارات من أجل A لتحقيق $K = AA^T$. إن مصفوفة الجذر التربيعي R آفة الذكر هي خيار بسيط وملائم. تم تلخيص بعض النتائج في هذه الفقرة في النظرية التالية:

نظرية 1.A7. تكون المصفوفة K ذات $n \times n$ مصفوفة تباين مشترك إذا وفقط إذا كانت محددة غير سالبة. وأيضاً هي مصفوفة تباين مشترك إذاً فقط إذا كان $K = AA^\dagger$ ذات $n \times n$. خيار واحد لـ A هو مصفوفة الجذر التربيعي R في (88.7).

2.A7. توسع سلسلة فورييه من عملية عشوائية مقتطعة

اعتبر أن عملية عشوائية (بقيمة متوسطة حقيقية صفرية) مستقرة بالمعنى الواسع بشكل فعال خلال المجال $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ حيث ينظر إلى T_0 بشكل حدسي على أنها كبيرة جداً. دع $\{Z(t); |t| \leq \frac{T_0}{2}\}$ تكون هذه العملية مقتطعة إلى المجال $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$. الهدف من هذا الملحق والملحق القادم هو عرض هذه العملية المقتطعة في المجال الترددي واكتشاف علاقتها بالكثافة الطيفية للعملية المستقرة بالمعنى الواسع غير المقتطعة. الهدف الثاني هو تفسير بين الترددات المختلفة للعمليات الغوسية المستقرة من حيث العملية المقتطعة.

افتراض في البداية أن العملية $\{Z(t); |t| \leq \frac{T_0}{2}\}$ اعتباطية؛ وستتم إضافة افتراض أنها مستقرة بالمعنى الواسع بشكل فعال لاحقاً. افترض أن توابع العينة من العملية المقتطعة هي توابع حقيقية من \mathcal{L}_2 باحتمال يساوي الواحد. كل تابع عينة من \mathcal{L}_2 ، ولنقل $\{Z(t, \omega); |t| \leq \frac{T_0}{2}\}$ يمكن بعد ذلك توسيعه في سلسلة فورييه

$$Z(t, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{Z}_k(\omega) e^{2\pi i k t / T_0}, \quad |t| \leq \frac{T_0}{2} \quad (89.7)$$

التوابع المتعامدة هنا عقدية ويمكن أن تكون المعاملات $\hat{Z}_k(\omega)$ بالمثل عقدية. وبما أن توابع العينة $\{Z(t, \omega); |t| \leq \frac{T_0}{2}\}$ هي حقيقية، فإن $\hat{Z}_k(\omega) = \hat{Z}_{-k}^*(\omega)$ من أجل كل k . هذا أيضاً يعني أن $\hat{Z}_k(\omega)$ هي حقيقية. تعطى سلسلة فورييه العكسية بالعلاقة

$$(90.7) \quad \hat{Z}_k(\omega) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} Z(t, \omega) e^{-2\pi i k t / T_0} dt.$$

من أجل كل نقطة عينة ω ، $\hat{Z}_k(\omega)$ هي عدد عقدي، لذلك \hat{Z}_k هي متحول عشوائي عقدي، أي أن، كلاً من $\Re(\hat{Z}_k)$ و $\Im(\hat{Z}_k)$ هي متحولات عشوائية. أيضاً، $\Re(\hat{Z}_k) = \Re(\hat{Z}_{-k})$ و $\Im(\hat{Z}_k) = -\Im(\hat{Z}_{-k})$ من أجل كل k . ويترب على ذلك أن العملية المقتطعة $\{Z(t); |t| \leq \frac{T_0}{2}\}$ تعرف بالعلاقة

$$(91.7) \quad Z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{Z}_k e^{2\pi i k t / T_0}, \quad -\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2}$$

هي عملية عشوائية (حقيقية) والمتحولات العشوائية العقدية \hat{Z}_k هي توابع خطية من $Z(t)$ تعطى بالعلاقة:

$$(92.7) \quad \hat{Z}_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} Z(t) e^{-2\pi i k t / T_0} dt.$$

وهكذا فإن (91.7) و (92.7) هما زوج سلسلة فورييه بين العملية العشوائية و تابع من المتحولات العشوائية. تحقق توابع العينة العلاقة:

$$\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} Z^2(t, \omega) dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{Z}_k(\omega)|^2$$

ولذلك

$$(93.7) \quad \frac{1}{T_0} \mathbb{E} \left[\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} Z^2(t) dt \right] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} |\hat{Z}_k|^2$$

الافتراض أن توابع العينة هي \mathcal{L}_2 باحتمال يساوي الواحد يمكن أن ينظر إليه ليكون مكافئاً لافتراض أن:

$$(94.7) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} S_k < \infty \quad \text{where } S_k = \mathbb{E} [|\hat{Z}_k|^2]$$

ويُلخص هذا في النظرية التالية.

نظرية 2.A7. إذا تم اقتطاع عملية عشوائية (حقيقية) ولها قيمة متوسطة صفرية إلى المجال $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ وكانت توابع العينة المقتطعة هي \mathcal{L}_2 باحتمال يساوي الواحد، ثم يتم تحديد العملية المقتطعة بوساطة التوزيع المشترك للمتحولات العشوائية ذات معاملات فورييه العقدية $\{\hat{Z}_k\}$. علاوة على ذلك، أي توزيع مشترك من $\{\hat{Z}_k; k \in \mathbb{Z}\}$ يحقق (94.7) يحدد مثل هذه العملية المقتطعة.

يمكن حساب تابع التوزيع المشترك للعملية المقتطعة من المعادلة (91.7) كما يلي:

$$(95.7) \quad \begin{aligned} K_Z(t, \tau) &= \mathbb{E}[Z(t)Z^*(\tau)] = \mathbb{E} \left[\sum_k \hat{Z}_k e^{2\pi i k t / T_0} \sum_m \hat{Z}_m^* e^{-2\pi i m \tau / T_0} \right] \\ &= \sum_{k, m} \mathbb{E} [\hat{Z}_k \hat{Z}_m^*] e^{2\pi i k t / T_0} e^{-2\pi i m \tau / T_0}, \quad \text{for } -\frac{T_0}{2} \leq t, \tau \leq \frac{T_0}{2} \end{aligned}$$

لاحظ أنه إذا تم تمديد التابع على يمين المعادلة (95.7) على كل $t, \tau \in \mathbb{R}$ ، فإنه يصبح دوري في t بدور T_0 من أجل كل τ ، ودوري في τ بدور T_0 من أجل كل t .

تلين النظرية 2.A7 أن أي عملية اقتطاع يمكن عملياً تمثيلها على شكل سلسلة فورييه. يصبح مثل هذا التمثيل أكثر فائدة، على كل حال، إذا كانت معاملات فورييه غير مترابطة. يبحث القسمان الفرعيان القادمان هذه الحالة ومن ثم يتخصصان في العمليات الغوصية، حيث يعني تعبير غير مترابطة المستقلة.

3.A7 المعاملات غير المترابطة (المستقلة) في سلسلة فورييه

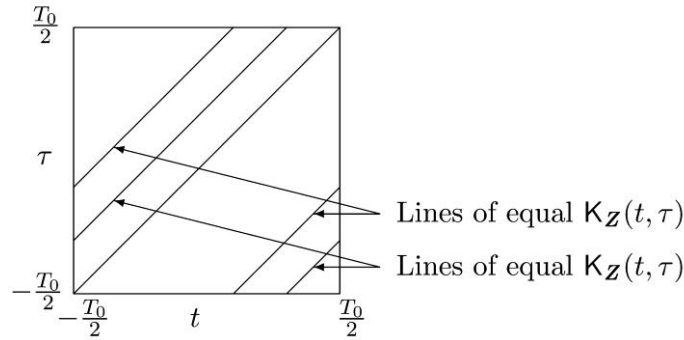
اعتبر تابع التباين المشترك في (95.7) في ظل الافتراض الإضافي أن معاملات فورييه $\{Z_k; k \in \mathbb{Z}\}$ غير مترابطة، أي، أن $E[Z_k Z_m^*] = 0$ من أجل كل قيم k, m حيث $k \neq m$. يبقى هذا الافتراض أيضاً من أجل $m = -k$ ، وحيث $Z_k = Z_{-k}^*$ ، يعني أن كلاً من $E[(\Re(Z_k))^2] = E[(\Im(Z_k))^2]$ و $\Re(Z_k) \Im(Z_k) = 0$ (انظر التمرين 10.7). بما أن $E[Z_k Z_m^*] = 0$ من أجل $k \neq m$ فإن المعادلة (95.7) تصبح أبسط لتكون

$$(96.7) \quad K_Z(t, \tau) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} S_k e^{2\pi i k(t-\tau)/T_0} \quad \text{for } -\frac{T_0}{2} \leq t, \tau \leq \frac{T_0}{2}$$

هذا يعني أن $K_Z(t, \tau)$ تابع فقط لـ $t - \tau$ خلال المجال $-\frac{T_0}{2} \leq t, \tau \leq \frac{T_0}{2}$ ، أي أن $K_Z(t, \tau)$ مستقر بالمعنى الواسع وبشكل فعال خلال المجال $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ وهكذا يمكن أن نشير إلى $K_Z(t, \tau)$ بـ $\bar{K}_Z(t - \tau)$ في هذا المجال، و

$$(97.7) \quad \bar{K}_Z(\tau) = \sum_k S_k e^{2\pi i k \tau / T_0}$$

هذا يعني أن تغيرات S_k الجيبية تشكل هذه العملية التي هي معاملات سلسلة فورييه في تابع التباين المشترك $\bar{K}_Z(r)$. وباختصار، فإن الافتراض بأن العملية العشوائية المقتطعة (حقيقية) لها معاملات فورييه غير مترابطة خلال المجال $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ يعني أن العملية مستقرة بالمعنى الواسع خلال المجال $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ وأن تغيرات هذه المعاملات هي معاملات فورييه من التباين المشترك ذي المتحول الواحد. هذا معقول حيث إن مركبات الجيب والتجيب لكل من الجيوب المقابلة غير مترابطة وذات تباين متساوٍ. لاحظ أن $K_Z(t, \tau)$ في المثال الأنف تم تعريفه من أجل كل قيم $t, \tau \in [-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ وبالتالي تمتد مجالات t, τ من $-T_0$ إلى T_0 ويجب أن يحقق $\bar{K}_Z(r)$ (97.7) من أجل $-T_0 \leq r \leq T_0$. من المعادلة (97.7)، نجد أن $\bar{K}_Z(r)$ دوري أيضاً ودوره T_0 ، لذلك فإن المجال $[-T_0, T_0]$ يتضمن فترتين من $\bar{K}_Z(r)$. هذا يعني، على سبيل المثال، أن $E[Z(-\varepsilon)Z^*(\varepsilon)] = E[Z(\frac{T_0}{2} - \varepsilon)Z^*(-\frac{T_0}{2} + \varepsilon)]$ وبشكل عام، تنعكس دورية $\bar{K}_Z(r)$ في $K_Z(t, \tau)$ كما هو موضح في الشكل 6.7.



الشكل 6.7: القيود على $K_Z(t, \tau)$ المفروضة من دورية $\bar{K}_Z(t - \tau)$.

لقد رأينا بشكل أساسي أنه عندما تُقتطع أي عملية عشوائية إلى المجال $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ ، يكون لها تمثيل سلسلة فورييه، إنه إذا كانت معاملات سلسلة فورييه غير مترابطة، ومن ثم تكون العملية المقتطعة مستقرة بالمعنى الواسع خلال المجال $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ ولها تابع تباين مشترك دوري دوره T_0 . هذا يُبرهن النصف الأول من النظرية التالية :

نظرية 3.A7. لتكن $\{Z(t); t \in [-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]\}$ عملية عشوائية (حقيقية) ذات قيمة متوسطة صفرية وطاقة محدودة خلال المجال $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ ولتكن $\{Z_k; k \in \mathbb{Z}\}$ هي المتحولات العشوائية لسلسلة فورييه في (91.7) و (92.7).
 • إذا كان $E[Z_k Z_m^*] = S_k \delta_{k,m}$ من أجل $k, m \in \mathbb{Z}$ فإن $\{Z(t); t \in [-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]\}$ مستقرة بالمعنى الواسع بشكل فعال خلال المجال $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ وتحقق (97.7).

• إذا كانت $\{Z(t); t \in [-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]\}$ مستقرة بالمعنى الواسع بشكل فعال خلال $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ وإذا كان $K_Z(t, \tau)$ دوري بدور T_0 خلال $[-T_0, T_0]$

T_0 ، تكون $E[\hat{Z}_k \hat{Z}_m^*] = S_k \delta_{k,m}$ من أجل خيار ما من $S_k > 0$ ومن أجل كل $k, m \in \mathbb{Z}$.
 البرهان: لإثبات القسم الثاني من النظرية، لاحظ من (92.7) أن:

$$(98.7) \quad E[\hat{Z}_k \hat{Z}_m^*] = \frac{1}{T_0^2} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} K_Z(t, \tau) e^{-2\pi i k t / T_0} e^{2\pi i m \tau / T_0} dt d\tau$$

نعلم أن $K_Z(t, \tau) = \tilde{K}_Z(t - \tau)$ من أجل $t, \tau \in [-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ و $\tilde{K}_Z(t - \tau)$ دوري دوره T_0 . بتعويض $s = t - \tau$ لأجل t كمتحول في التكامل، تصبح (98.7).

$$(99.7) \quad E[\hat{Z}_k \hat{Z}_m^*] = \frac{1}{T_0^2} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \left(\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}-\tau} \tilde{K}_Z(s) e^{-2\pi i k s / T_0} ds \right) e^{-2\pi i k \tau / T_0} e^{2\pi i m \tau / T_0} d\tau$$

لا يعتمد التكامل بالنسبة لـ s على τ لأن مجال التكامل هو دور واحد و \tilde{K}_Z دورية. وهكذا فإن هذا التكامل تابع فقط لـ k والذي نشير إليه $T_0 S_k$. وبالتالي

$$(100.7) \quad E[\hat{Z}_k \hat{Z}_m^*] = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} S_k e^{-2\pi i (k-m)\tau / T_0} d\tau = \begin{cases} S_k & \text{for } m = k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

وهذه تبين أن Z_k غير مترابطة، انتهى البرهان.

المشكلة الثانية هي إيجاد العلاقة بين هذه العمليات والعمليات المستقرة بالمعنى الواسع خلال كل الوقت. هذا يمكن تحقيقه بدقة أكثر في حالة العمليات الغوسية. اعتبر عملية عشوائية غوسية¹²² $\{Z'(t); t \in \mathbb{R}\}$ ذات قيمة متوسطة صفرية مستقرة بالمعنى الواسع (وبالتالي ثابتة) ولها تابع تباين مشترك $\tilde{K}_{Z'}(\tau)$ وافترض أن المجال الذي يكون فيه التباين المشترك لا يساوي الصفر محدود، أي أن،

$$\tilde{K}_{Z'}(\tau) = 0 \quad \text{for } |\tau| > \frac{T_1}{2}$$

افترض أن $S_{Z'}(f) \geq 0$ هي الكثافة الطيفية لـ Z' وأن $T_0 > T_1$. تعطى معاملات سلسلة فورييه لـ $\tilde{K}_{Z'}(\tau)$ خلال المجال $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ عندئذ بالعلاقة $S_k = \frac{S_{Z'}(k/T_0)}{T_0}$. افترض أن هذه العملية تقترب خلال المجال $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ من العملية الغوسية المقطعة $\{Z(t); t \in [-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]\}$ التي تتألف من معاملات فورييه المستقلة \hat{Z}_k ، أي أن،

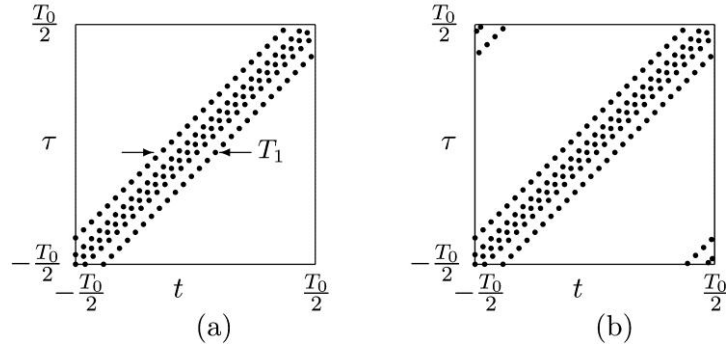
$$Z(t) = \sum_k \hat{Z}_k e^{2\pi i k t / T_0}, \quad -\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2},$$

حيث

$$E[\hat{Z}_k \hat{Z}_m^*] = S_k \delta_{k,m} \quad \text{for all } k, m \in \mathbb{Z}$$

ومن النظرية 3.A7. فإن تابع التباين المشترك للعملية $Z(t)$ هو $\tilde{K}_Z(\tau) = \sum_k S_k e^{2\pi i k \tau / T_0}$. وهو دوري دوره T_0 ومن أجل $|\tau| \leq \frac{T_0}{2}$ فإن $\tilde{K}_Z(\tau) = \tilde{K}_{Z'}(\tau)$. فإن للعمليات الأصلية $Z'(t)$ والتقريبية $Z(t)$ بالتالي نفس التباين من أجل $|\tau| \leq \frac{T_0}{2}$. ومن أجل $|\tau| > \frac{T_0}{2}$ ، فإن $\tilde{K}_Z(\tau) = 0$ بينما يكون $\tilde{K}_{Z'}(\tau)$ دوري خلال كل قيم τ . أيضاً، بالطبع، Z' مستقرة، بينما Z مستقرة بشكل فعال خلال مجالها $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$. يكون الفرق بين Z' و Z أكثر وضوحاً من خلال تعبير تابع التباين المشترك ذي المتحولين. وهو موضح في الشكل 7.7.

¹²² بشكل مكافئ، يمكن للمرء أن يفترض أن مستقرة بالمعنى الواسع بشكل فعال خلال مجال ما أكبر بكثير من المجالات المفيدة هنا.



الشكل 7.7: يوضح الجزء (a) $\bar{K}_{Z'}(t, \tau)$ خلال المجال $-\frac{T_0}{2} \leq t, \tau \leq \frac{T_0}{2}$ من أجل العملية المستقرة Z' التحقق $\bar{K}_{Z'}(\tau) = 0$ لأجل $|\tau| > T_1/2$. الجزء (b) يوضح عملية تقارب Z المؤلفة من المنحنيات الجيبية المستقلة، المتباعدة بمقدار $1/T_0$ ومع طور موزع بانتظام. لاحظ أن توابع التباين المشترك متماثلة باستثناء السلوك الشاذ عند الزوايا حيث t قريبة من $T_0/2$ و τ قريبة من $-T_0/2$ أو بالعكس.

يتضح من الشكل أنه إذا تمت نمذجة Z' على شكل سلسلة فورييه خلال المجال $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ باستخدام معاملات غوسية عقدية مستقلة و متماثلة دائرياً، فإن $K_{Z'}(t, \tau) = K_Z(t, \tau)$ من أجل $|\tau|, |t| \leq \frac{T_0 - T_1}{2}$ وبما أن العمليات الغوسية ذات القيمة المتوسطة الصفرية يتم تحديدها بواسطة توابع التباين المشترك لها، هذا يعني أن Z' و Z تكون متطابقة إحصائياً خلال هذا المجال.

وباختصار، لا يمكن نمذجة العملية الغوسية Z' بشكل تام خلال المجال $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ باستخدام سلسلة فورييه خلال ذلك المجال. مع ذلك، يتم تجنب السلوك الشاذ باستخدام سلسلة فورييه على مجال أكبر على نحو كافٍ ليشمل المجال المفيد إضافة للمجال الذي خلاله $\bar{K}_{Z'}(\tau) \neq 0$. إذا كان هذا المجال الأخير غير محدود، فإن نموذج سلسلة فورييه يمكن استخدامه فقط بشكل تقريبي. تم إنشاء النظرية التالية:

نظرية 4.A7. لتكن $Z'(t)$ عملية عشوائية غوسية مستقرة وذات قيمة متوسطة صفرية مع كثافة طيفية $S(f)$ وتابع تباين مشترك $\bar{K}_{Z'}(\tau) = 0$ من أجل $|\tau| > T_1/2$. ثم من أجل $T_0 > T_1$ ، العملية المقتطعة $Z(t) = \sum_k Z_k e^{2\pi i k t / T_0}$ من أجل $|t| \leq \frac{T_0}{2}$ ، حيث Z_k مستقلة وتكون $Z_k \sim \mathcal{CN}\left(\frac{S(k/T_0)}{T_0}\right)$ متطابقة إحصائياً مع $Z'(t)$ من أجل كل قيم $k \in \mathbb{Z}$ خلال المجال $[-\frac{T_0 - T_1}{2}, \frac{T_0 - T_1}{2}]$.

النظرية المذكورة أنفاً هي بالدرجة الأولى لاستخدام المفاهيم، بدلاً من كونها أداة لحل المشكلة. وهي تبين أنه، بالإضافة إلى السلوك الشاذ الذي تمت مناقشته أعلاه، يمكن استخدام الاستقرار خلال المجال المفيد دون القلق عن كيفية تصرف العملية خارج بعيداً خارج المجال المفيد. أيضاً، حيث إن T_0 يمكن أن تكون كبيرة بشكل اعتباطي، وبالتالي الجيوب متباعدة على نحو متراص بشكل اعتباطي، نرى أن العلاقة بين استقرار العملية الغوسية واستقلال مجالات التردد هي متينة تماماً وأكثر من شيء ما صالح فقط بمعنى الحد.

4.A7 توسع Karhunen-Loeve

ثمة أسلوب آخر، يدعى توسع Karhunen-Loeve لتمثيل العملية العشوائية التي يتم اقتطاعها لمجال ما $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ بواسطة توسع متعامد ومستنظم. والهدف من ذلك هو اختيار مجموعة من التوابع المتعامدة المستنظمة مثل أن هذه المعاملات في التوسع غير مترابطة. نبدأ مع تابع التباين المشترك $K(t, \tau)$ المعروف بالنسبة لـ $t, \tau \in [-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$. الحقائق الأساسية حول توابع التباين المشترك المحدودة زمنياً هذه هي عملياً نفس الحقائق عن مصفوفات التباين المشترك في الملحق 1.A7. هو محدد غير سالب بمعنى أنه لجميع التوابع $g(t)$ من L_2 ،

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g(t) K_Z(t, \tau) g(\tau) dt d\tau \geq 0$$

يكون لـ K_Z أشعة ذاتية متعامدة مستنظمة قيمتها الحقيقية معرفة في المجال $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ وقيم ذاتية غير سالبة. هذا هو

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} K_Z(t, \tau) \phi_m(\tau) d\tau = \lambda_m \phi_m(t); \quad t \in \left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right]$$

حيث $\langle \phi_m, \phi_k \rangle = \delta_{m,k}$.

هذه الأشعة الذاتية تمدد فضاء L_2 للتوابع الحقيقية خلال المجال $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$. باستخدام هذه الأشعة الذاتية كتوابع متعامدة مستنظمة من $Z(t) = \sum_m Z_m \phi_m(t)$. يكون من السهل أن نبين أن $E[Z_m Z_k] = \lambda_m \delta_{m,k}$. بكلام آخر إذا كان تابع التباين المشترك معطى بشكل اعتباطي خلال مجال الاقتطاع $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$. يمكننا إيجاد مجموعة معينة من التوابع المتعامدة المستنظمة بحيث إن $Z(t) = \sum_m Z_m \phi_m(t)$ و $E[Z_m Z_k] = \lambda_m \delta_{m,k}$. وهذا ما يسمى توسع Karhunen-Loeve. هذه المعادلات للأشعة الذاتية والقيم الذاتية معروفة بالمعادلات التكاملية ويمكن حسابها باستخدام الحاسوب. لسوء الحظ أنها لا توفر قدراً كبيراً من التمعّن في المجال الترددي.

7.E تمارين

1.7 (a) افترض أن X, Y هي متحولات عشوائية مستقلة وموزعة بشكل متماثل، كل منها له كثافة $f_X(x) = \alpha \exp(-x^2/2)$. في الجزء (b)، سوف نرى أن يجب أن تكون $1/\sqrt{2\pi}$ من أجل أن تكتمل $f_X(x)$ للواحد، لكن في الجزء لدينا α غير معرفة. لتكن $S = X^2 + Y^2$. أوجد كثافة احتمال S بدلالة α . تلميح: ارسم منحنيات كثافة الاحتمال المتساوية في المستوي X, Y .
 (b) برهن من الجزء (a) أن α يجب أن تكون $1/\sqrt{2\pi}$ لتكون S ، ومن ثم X, Y متحولات عشوائية. بين أن $E[X] = 0$ وأن $E[X^2] = 1$.

(c) أوجد الكثافة الاحتمالية لـ $R = \sqrt{S}$. وتسمى R متحول رايلي العشوائي.

2.7 (a) افترض أن $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma_X^2)$ و $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma_Y^2)$ هي متحولات عشوائية غوسية مستقلة وذات قيمة متوسطة صفرية. عن طريق طي كثافتيهما، أوجد كثافة $X + Y$. تلميح: خلال إنجاز تكامل الطي، يجب عليك استخدام ما يسمى (الإتمام إلى مربع كامل) في الأس. هذا يتضمن ضرب والتقسيم بـ $e^{\alpha y^2/2}$ من أجل قيمة ما لـ α ، وبمكنتك الاسترشاد في ذلك عن طريق معرفة ما هو الجواب. هذا الأسلوب ذو قيمة خلال العمل مع المتحولات العشوائية الغوسية.

(b) تحويل فورييه لكثافة الاحتمال $f_X(x)$ هو: $\hat{f}_X(\theta) = \int f_X(x) e^{-2\pi i x \theta} dx = E[e^{-2\pi i x \theta}]$. وبتقييس التحويل الغوص الأساسي في العلاقة (84.4) بين أنه من أجل $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma_X^2)$

$$\hat{f}_X(\theta) = \exp\left[-\frac{(2\pi\theta)^2 \sigma_X^2}{2}\right]$$

(c) أوجد الآن كثافة $X + Y$ باستخدام تحويل فورييه لهذه الكثافات.

(d) باستخدام نفس تقنية تحويل فورييه، أوجد كثافة $V = \sum_{k=1}^n \alpha_k W_k$ حيث W_1, \dots, W_k هي متحولات عشوائية عادية مستقلة.

3.7 في هذا التمرين سوف نقوم بتركيب متحولين عشوائيين بحيث يكونا غوصيين بشكل فردي لكن ليسا غوصيين مشتركين. افترض أن X متحول عشوائي غير سلمي وله كثافة

$$f_X(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \quad \text{for } x \geq 0$$

وافترض أن U اثنائية، ± 1 ، باحتمالات $1/2$. $p_U(1) = p_U(-1) = 1/2$

(a) أوجد كثافة احتمال $Y_1 = UX$. ارسم كثافة Y_1 وأوجد قيمتها المتوسطة وتباينها.

(b) مثل متحولين عشوائيين غوصيين مقيسين، ولنقل Y_1 و Y_2 ، بحيث تكون الكثافة المشتركة لـ Y_1, Y_2 مساوية للصفر في الربعين الثاني والرابع من المستوي. وهي لا تساوي الصفر في الربعين الأول والثالث حيث تكون الكثافة خلالهما $\frac{1}{\pi} \exp\left(\frac{-y_1^2 - y_2^2}{2}\right)$. تلميح: استخدم الجزء (a) من أجل Y_1 وفكر في كيفية تركيب Y_2 .

(c) أوجد التباين المشترك $E[Y_1 Y_2]$. تلميح في البداية أوجد المتوسط للمتحول العشوائي X أعلاه.

(d) استخدم الاختلاف من نفس الفكرة لبناء متحولين عشوائيين غوصيين مقيسين Y_1, Y_2 يتركز احتمالهما على المحور القطري $v_1 = v_2$ و $v_1 = -v_2$ أي التي يكون لها $\Pr(V_1 \neq V_2 \text{ and } V_1 \neq -V_2) = 0$

4.7 افترض $W_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$ و $W_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$ متحولات عشوائية عادية مستقلة. وافترض $X = \max(W_1, W_2)$ و $Y = \min(W_1, W_2)$

(a) ارسم التحويل من قيم العينة لـ W_1, W_2 إلى قيم العينة لـ X, Y . أي زوج العينة w_1, w_2 من W_1, W_2 يتحول إلى زوج عينة معطى x, y من X, Y ؟

(b) أوجد كثافة احتمال $f_{XY}(x, y)$ لـ X, Y . اشرح برهانك باختصار لكن استخدم الرسم بدلاً من المعادلات.

(c) أوجد $F_S(s)$ حيث $S = X + Y$

(d) أوجد $f_D(d)$ حيث $D = X - Y$

(e) افترض أن U متحول عشوائي يأخذ القيم ± 1 باحتمال يساوي $1/2$ لكل قيمة وافترض أن U مستقل إحصائياً عن W_1, W_2 . هل S و UD غوصية مشتركة؟

5.7 افترض $\phi(t)$ تابع من L_2 ذو طاقة تساوي الواحد وافترض أن $h(t)$ هي L_2 بين أن $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)h(\tau-t)dt$ هو L_2 تابع لـ τ مع طاقة عند الحد العلوي بوساطة $\|h\|^2$. تلميح: خذ بعين الاعتبار تحويل فورييه لـ $\phi(t)$ و $h(t)$.

6.7 (a) عمّم العملية العشوائية في المعادلة (30.7) بافتراض أن Z_k مترابط اعتبارياً. بين أن كل تابع عينة يبقى L_2 .
(b) من أجل نفس الحالة، بيّن أن $\int \int |K_Z(t, \tau)|^2 dt d\tau < \infty$.

7.7 (a) افترض أن Z_1, Z_2, \dots سلسلة من المتحولات العشوائية الغوصية المستقلة، $Z_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_k^2)$ وافترض أن $\{\phi_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ هي سلسلة من التوابع المتعامدة المنتظمة. ناقش من التعاريف الأساسية أنه من أجل كل t ، يكون $Z(t) = \sum_{k=1}^n Z_k \phi_k(t)$ متحول غوصي عشوائي. أوجد تبين $Z(t)$ كتاباً لـ t .

(b) لأي مجموعة من الفترات t_1, \dots, t_ℓ ، افترض أن $Z(t_m) = \sum_{k=1}^n Z_k \phi_k(t_m)$ لأجل $1 \leq m \leq \ell$ اشرح بعناية من التعاريف الأساسية لماذا تكون $\{Z(t_1), \dots, Z(t_\ell)\}$ غوصية مشتركة ثم حدد مصفوفة التباين الخاصة بها. وضح لماذا تكون العملية $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$ عملية عشوائية غوصية.

(c) الآن افرض $n = \infty$ أعلاه وافترض أن $\sum_k \sigma_k^2 < \infty$. افترض أيضاً أن التوابع المتعامدة المنتظمة محدودة من أجل جميع قيم k و t بمعنى أنه لثابت ما A ، $|\phi_k(t)| \leq A$ من أجل كل قيم k و t . اعتبر التركيب الخطي من المتحولات العشوائية

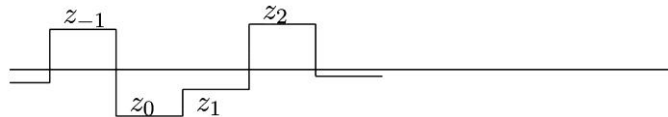
$$Z(t) = \sum_k Z_k \phi_k(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n Z_k \phi_k(t)$$

لتكن $Z^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^n Z_k \phi_k(t)$. من أجل أي قيمة معطاة لـ t ، أوجد التباين $Z^{(j)}(t) - Z^{(n)}(t)$ من أجل $j > n$. بيّن أنه لكل قيم $j > n$ يقترب هذا التباين من الصفر حيث $n \rightarrow \infty$. اشرح لماذا يدل هذا على أن $Z(t)$ هي متحول عشوائي غوصي. ملاحظة: في الحقيقة $Z(t)$ هي متحول عشوائي غوصي، لكن إثبات هذا يتطلب خلفية كبيرة. $Z(t)$ هي سلسلة محدودة من المتحولات العشوائية، وكل متحول عشوائي هو تابع من فضاء العينة - القضية هنا هي نفسها كما في سلسلة التوابع التي تذهب إلى التابع الحدي، حيث كان علينا استخدام نظرية Riesz - Fischer.

(d) من أجل العملية العشوائية الغوصية أعلاه $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$ ، افترض أن $z(t)$ هي تابع عينة من $Z(t)$ وأوجد طاقتها أي، $\|z\|^2$ بدلالة قيم العينة z_1, z_2, \dots من Z_1, Z_2, \dots . أوجد الطاقة المتوقعة من العملية $\mathbb{E}\{\|Z(t); t \in \mathbb{R}\|^2\}$.

(e) أوجد الحد الأعلى لـ $\Pr\{\|Z(t); t \in \mathbb{R}\|^2 > \alpha\}$ الذي ينتهي إلى الصفر حيث $\alpha \rightarrow \infty$. تلميح: يمكن أن تجد متراجحة Markov مفيدة. هذه تنص على أنه من أجل أي متحول غير سلمي Y يكون $\Pr\{Y \geq \alpha\} \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{\alpha}$. اشرح لماذا هذا يُظهر أن توابع العينة من $\{Z(t)\}$ هي L_2 باحتمال يساوي الواحد.

8.7 اعتبر العملية الستوستاتيكية $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$ والتي فيها كل تابع عينة عبارة عن سلسلة من النبضات المستطيلة كما في الشكل أدناه



تحليلياً، $Z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_k \text{rec}(t - k)$ حيث $\dots, Z_{-1}, Z_0, Z_1, \dots$ سلسلة من المتحولات العادية المستقلة والموزعة بشكل متماثل، $Z_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

(a) هل $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$ عملية عشوائية غوصية؟ اشرح بدقة لماذا أو لماذا لا.

(b) أوجد تابع التباين المشترك للعملية $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$.

(c) هل $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$ عملية عشوائية مستقرة؟ وضح ذلك بدقة.

(d) افترض الآن أن العملية الستوستاستيكية تم تعديلها بواسطة إدخال إزاحة زمنية عشوائية Φ موزعة بانتظام بين الصفر والواحد. وبالتالي، العملية الجديدة $\{V(t); t \in \mathbb{R}\}$ تُعرف بالعلاقة $V(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_k \text{rec}(t - k - \Phi)$. أوجد التوزيع الشرطي من $V(0.5)$ الشرطي على $V(0) = v$.

(e) هل $\{V(t); t \in \mathbb{R}\}$ عملية عشوائية غوسية؟ اشرح بدقة لماذا أو لماذا لا.

(f) أوجد تابع التباين المشترك للعملية $\{V(t); t \in \mathbb{R}\}$.

(g) هل $\{V(t); t \in \mathbb{R}\}$ عملية عشوائية مستقرة؟ من الأسهل تفسير هذا من كتابة كثير من المعادلات.

9.7 ادرس العملية الغوسية، $V(t) = \sum_k V_k \text{sinc}\left(\frac{t-kT}{T}\right)$ حيث $\{V_k\} = \{V_{-1}, V_0, V_1, \dots\}$ سلسلة من المتحولات العشوائية المستقلة والموزعة بشكل متماثل، $V_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

(a) أوجد كثافة الاحتمال للتابع الخطي $\int V(t) \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) dt$.

(b) أوجد كثافة الاحتمال للتابع الخطي $\int V(t) \text{sinc}\left(\frac{\alpha t}{T}\right) dt$ من أجل $\alpha > 1$.

(c) اعتبر مرشحاً خطياً ذا استجابة نبضية $h(t) = \text{sinc}\left(\frac{\alpha t}{T}\right)$ حيث $\alpha > 1$. وافترض أن $\{Y(t)\}$ هي خرج هذا المرشح عندما يكون دخله هو $V(t)$ المين آنفاً. أوجد تابع التباين المشترك للعملية $\{Y(t)\}$. اشرح لماذا تعتبر هذه العملية غوسية ولماذا هي مستقرة.

(d) أوجد كثافة الاحتمال للتابع الخطي $Y(\tau) = \int V(t) \text{sinc}\left(\frac{\alpha(t-\tau)}{T}\right) dt$ من أجل $\alpha > 1$ و τ اعتباطية.

(e) أوجد الكثافة الطيفية لـ $\{Y(t); t \in \mathbb{R}\}$.

(f) بيّن أن $\{Y(t); t \in \mathbb{R}\}$ يمكن تمثيلها بالشكل $Y(t) = \sum_k Y_k \text{sinc}\left(\frac{t-kT}{T}\right)$ ثم وُصف المتحولات العشوائية $\{Y_k; k \in \mathbb{Z}\}$.

(g) أعد الطلبين (c)، (d)، و (e) من أجل $\alpha > 1$.

(h) بيّن أن $\{Y(t)\}$ في حالة $\alpha > 1$ يمكن تمثيلها كعملية sinc غوسية (مثل $\{V(t)\}$) ولكن مع قيمة معدلة بشكل مناسب لـ T .

(i) بيّن أنه إذا كانت أي عملية $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$ مستقرة، فإن العملية $\{Y(t); t \in \mathbb{R}\}$ حيث $Y(t) = Z^2(t)$ هي أيضاً مستقرة من أجل كل قيم $t \in \mathbb{R}$.

10.7 (متحول عشوائي عقدي) (a) افترض أن المتحولات العشوائية العقدية X_k و X_{-k} تحقق $X_{-k}^* = X_k$ من أجل كل قيم k . بيّن أنه إذا

كانت $E[X_k X_{-k}^*] = 0$ عندها تكون $E[\Re(X_k)]^2 = E[\Im(X_k)]^2$ و $E[\Re(X_k)\Im(X_{-k})] = 0$.

(b) استخدم هذا لبيان أنه إذا كانت $E[X_k X_m^*] = 0$ فإن $E[\Re(X_k)\Re(X_m)] = 0$ و $E[\Re(X_k)\Im(X_m)] = 0$ و $E[\Im(X_k)\Im(X_m)] = 0$.

من أجل كل قيم m التي لا تساوي أيّاً من k أو $-k$.

11.7 اشرح لماذا يجب أن يكون التكاملي في (58.7) حقيقياً من أجل $g_1(t)$ و $g_2(t)$ حقيقيان، ولكن التكاملية $\hat{g}_1(f)S_Z \hat{g}_2^*(f)$ لا تحتاج أن تكون حقيقية.

12.7 (الضجيج الأبيض المرشح) افترض أن $\{Z(t)\}$ هي عملية ضجيج غوسي أبيض ذو كثافة طيفية $N_0/2$.

(a) ليكن $Y = \int_0^T Z(t) dt$. أوجد كثافة الاحتمال لـ Y .

(b) افترض أن $Y(t)$ ناتجة عن إمرار $Z(t)$ عبر مرشح مجال أساسي مثالي له عرض مجال W والذي تم ضبط رجه بحيث تكون استجابته

النبضية ذات طاقة واحدة. أوجد التوزيع المشترك لكل من $Y(0)$ و $Y\left(\frac{1}{4W}\right)$.

(c) أوجد كثافة الاحتمال للتابع

$$Y = \int_0^{\infty} e^{-t} Z(t) dt$$

13.7 (الكثافة الطيفية للاستطاعة) (a) افترض أن $\{\phi_k(t)\}$ هي أي مجموعة من شكل الموجة L_2 المتعامدة المستظمة الحقيقية التي تحولتها

تقتصر على المجال B ، وافترض أن $\{W(t)\}$ عبارة عن ضجيج غوسي أبيض بالنسبة B له كثافة طيفية للاستطاعة $S_W(f) = N_0/2$

من أجل $f \in B$ وافترض أن التوسع المتعامد المستظم لـ $\{W(t)\}$ بالنسبة للمجموعة $\{\phi_k(t)\}$ يمكن تعريفها بواسطة

$$\tilde{W}(t) = \sum_k W_k \phi_k(t)$$

حيث $W_k = \langle W(t), \phi_k(t) \rangle$. يبين أن $\{W_k\}$ هي سلسلة غوسية مستقلة وموزعة بشكل متماثل وأعط التوزيع الاحتمالي لكل W_k .

(b) افترض أن المجال B هو $\mathbf{B} = [-1/2T, 1/2T]$ ، وأن $\phi_k(t) = (1/\sqrt{T}) \text{sinc}(\frac{t-kT}{T})$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$. فسر نتيجة الطلب (a) بهذه الحالة.

14.7 (الأشعة العقدية الغوسية) (a) اعط مثالاً عن متحول عشوائي عقدي ثنائي الأبعاد $\mathbf{Z} = (Z_1 Z_2)$ حيث $Z_k \sim \mathcal{CN}(0,1)$ من أجل $k = 1, 2$ وحيث يكون لـ \mathbf{Z} نفس التوزيع الاحتمالي المشترك مثل $e^{i\theta} \mathbf{Z}$ من أجل كل قيم $\theta \in [0, 2\pi]$ لكن عندما لا تكون \mathbf{Z} غوسية مشتركة وبالتالي ليست متماثلة دائرياً. تلميح: وسع فكرة الطلب (d) في التمرين 3.7.

(b) افترض متحولاً عشوائياً عقدياً $Z = Z_{\text{re}} + iZ_{\text{im}}$ له خواص أن Z_{re} و Z_{im} هي إفرادياً غوسية وأن لها نفس الكثافة الاحتمالية مثل $e^{i\theta} \mathbf{Z}$ من أجل كل $\theta \in [0, 2\pi]$. يبين أن Z غوسية عقدية متماثلة دائرياً.

8. الكشف، الترميز، وفك الترميز

1.8 مقدمة

بيّن الفصل السابق كيف نُوصّف الضحيج على أنه إجرائية عشوائية، وفي هذا الفصل سنستخدم ذلك التوصيف في استخلاص الإشارة من الموجة المستقبلية المخترجة بالضحيج. ومن الواضح أن هذا الأمر لا يخلو من الأخطاء العرضية عندما يكون الضحيج كبيراً. ومن ثمّ فإن الهدف هو استخلاص المعطيات مع تقليل أثر هذه الأخطاء. تُعرف هذه الطريقة لاستخلاص المعطيات من النسخة المخترجة بالضحيج، بالكشف.

تُعَدُّ التعابير التالية: الكشف، اتخاذ القرار، اختبار الفرضية، وكشف الترميز مترادفات. تُعبّر كلمة كشف عن الجهد المبذول لكشف وجود ظاهرة معينة من عدم وجودها اعتماداً على المراقبة. فعلى سبيل المثال، يستخدم نظام الرادار المراقبة لكشف وجود هدف أم لا؛ ويحاول نظام ضبط الجودة أن يكشف إذا كانت الوحدة عاطلة؛ ويكشف الفحص الطبي وجود مرض مُعيّن. توسّع مفهوم الكشف في حقل الاتصالات الرقمية من قرار نعم/لا، إلى اتخاذ قرار في المستقبل من ضمن مجموعة محددة من الإشارات المرسلة المحتملة. يُسمى مثل هذا القرار للانتقاء من مجموعة من الإشارات المرسلة المحتملة أيضاً كشف الترميز، لكن في هذه الحالة، تُعتبر المجموعة المحتملة عادة كلمات الرماز ضمن رماز وليس الإشارات ضمن مجموعة إشارات¹²³. اتخاذ القرار هو أيضاً عملية اختيار بين عدد من البدائل غير المتقاطعة. اختبار الفرضية هو ذات الشيء، هنا تُسمى البدائل المستقلة بالفرضيات. نستخدم كلمة فرضيات للخيارات المحتملة فيما سييلي، إذ إن الكلمة تستعيد الصورة الحدسية المناسبة للاختيار بين مجموعة من البدائل، حيث أحدها فقط صحيح، وهناك احتمال أن يكون الاختيار خطأً.

ستجري دراسة هذه المسائل مبدئياً ضمن إطار احتمالي صرف. أي أن هناك نموذجاً احتمالياً تُمثّل كل افتراضية ضمنه حدثاً. هذه الأحداث مُستقلة وشاملة، أي أن نتيجة أخذ العينات من التجربة تقع في واحدة وواحدة فقط من هذه الأحداث، مما يعني أنه في كل أداء للتجربة ثمة فرضية واحدة فقط صحيحة. لنفرض وجود M فرضية¹²⁴، مُعنونة a_0, \dots, a_{M-1} فإن عينة خرج التجربة ستقع ضمن أحد هذه الأحداث. هنا يُعرّف رمز عشوائي U بحيث، من أجل كل M ، يأخذ القيمة a_m عندما يظهر الحدث a_m . يرمز الاحتمال الحدي $P_U(a_m)$ للفرضية a_m بالرمز P_m ويُطلق عليه عادة اسم الاحتمال القَبلي لـ a_m . ثمة متحول عشوائي آخر V (rv)، يُسمى المشاهدة (الرصد). وهو المعطيات التي يجب أن يعتمد عليها اتخاذ القرار. تُرصد قيمة عينة v للمتحول V ، وبناء على هذا الرصد يختار الكاشف واحدة من الفرضيات المحتملة M . قد يكون الرصد متحولاً عشوائياً عُقدياً، أو شعاعاً عشوائياً، أو عملية عشوائية، أو رمزاً عشوائياً، على حدّ سواء، وستجري مناقشة هذه المبادئ العامة فيما يلي.

قبل مناقشة كيفية اتخاذ قرار، من الضروري أن نفهم متى ولماذا علينا أن نتخذ قراراً. لنأخذ مثلاً اثنائياً، لنفرض أن الاحتمال الشرطي للفرضية a_0 ، بإعطاء الرصد، هو $2/3$ ولأجل الفرضية a_1 هو $1/3$. يؤدي اتخاذ القرار لصالح a_0 وغض الطرف عن الاحتمالات، ببساطة، إلى إهمال المعلومات عن احتمال أن يكون القرار صحيحاً. ومع ذلك فلا بدّ للقرارات الفعلية أن تُتخذ أحياناً. في نظام الاتصالات، يرغب المستخدم في استقبال الرسالة (ولو مبتورة جزئياً) وليس مجموعة من الاحتمالات. في نظام التحكم، على أجهزة القيادة أن تتصرّف أحياناً. كما يجب على المديرين أحياناً أن يختاروا بين إجراءات مختلفة، وبين منتجات، وبين أشخاص لتشغيلهم. نعود باتخاذ القرارات، إلى حدّ ما، من عالم نماذج الاحتمالات الرياضية إلى عالم جزّت نمذجته.

ثمة عدد من المعايير المحتملة تُستخدم في اتخاذ القرارات. لنفرض أن المعيار هو في جعل احتمال الخيار الصحيح أعظماً. أي عند إجراء التجربة، يُمثّل الخرج التجريبي الناتج بكلٍ من قيمة عينة a_m للرمز العشوائي U وقيمة عينة v للمتحول العشوائي V . يرصد مُتخذ القرار القيمة v (وليس a_m) ويُمثّل v بقرار $\hat{u}(v)$. يكون القرار صحيحاً إذا كان $\hat{u}(v) = a_m$. من حيث المبدأ، فإنّ جعل احتمال الخيار الصحيح

¹²³ وكما سيجري شرحه لاحقاً، ليس ثمة فارق أساسي بين رماز ومجموعة الإشارة.

¹²⁴ تُطبّق المبادئ هنا على نحو أساسي دون تغيير لأجل مجموعة فرضيات غير منتهية حسابياً؛ أما من أجل مجموعة فرضيات غير محدودة، تُسمى عملية اختيار فرضية من مراقبة تخميناً. إن احتمال الاختيار على نحو صحيح في هذه الحالة هو صفر ويكون التركيز على إجراء تخمين يكون قريباً إلى حد ما من الفرضية الصحيحة.

أعظماً سهلاً للغاية. من القيمة v ، نحسب $P_{U|V}(a_m|v)$ لكل فرضية محتملة a_m . وهذا يمثل الاحتمال بأن تكون a_m هي الفرضية الصحيحة الشرطية على v . ومن ثم فإن القاعدة لجعل احتمال أن تكون الفرضية صحيحة أعظماً، هي في اختيار $\tilde{u}(v)$ بحيث تكون $P_{U|V}(a_m|v)$ ذات قيمة أعظمية للفرضية a_m . يُعبّر عن ذلك، من أجل كل رصد مُحتمل v

$$(1.8) \quad \text{(قاعدة MAP)} \quad u(v) = \arg \max_m [p_{U|V}(a_m|v)]$$

حيث يعني المصطلح $\arg \max_m$ المعامل m الذي يجعل التابع أعظماً. إن لم تكن القيمة العظمى وحيدة فإن الاحتمال بأن تكون صحيحة هو ذاته، بقطع النظر عن أي مُعامل تعظيم m جرى اختياره، ولهذا نختار أصغر قيمة لـ m .¹²⁵ وحيث إن القاعدة (8.1) تُطبّق لكل نتيجة عينة v مُحتملة من المتحول العشوائي V ، فإنها تُعرّف الفرضية المنتقاة بوصفها رمزاً عشوائياً $\tilde{U}(V)$. يُسمى الاحتمال الشرطي $P_{U|V}$ احتمالاً بعدياً. وهو على العكس من الاحتمال القَبلي P_U للفرضية قبل رصد V . ومن ثم فإن القاعدة (1.8) تُسمى قاعدة الاحتمال البعدي الأعظمي.

نتيجة هامة لـ (1.8) هي أن قاعدة الاحتمال البعدي الأعظمي MAP تعتمد فقط على الاحتمال الشرطي $p_{U|V}$ ومن ثم فإنها تُحدّد على نحو كامل بالتوزيع المشترك لكل من V و U . وكل ما عدا ذلك في فراغ الاحتمال لا علاقة له باتخاذ القرار. عند التمييز بين قواعد اتخاذ القرار المختلفة، يُدّل على قاعدة الاحتمال البعدي — $\tilde{u}_{\text{MAP}}(v)$. وبما أن قاعدة الاحتمال البعدي الأعظمي MAP تجعل احتمال القرار الصحيح لكل قيمة عينة v أعظماً، فإنها تجعل احتمال القرار الصحيح أعظماً لمتوسط كل قيم v . لنشاهد ذلك تحليلياً، لنفرض $\tilde{u}_D(v)$ قاعدة اتخاذ قرار اعتباطية. بما أن \tilde{u}_{MAP} تجعل $[p_{U|V}(m|v)]$ أعظماً،

$$(2.8) \quad p_{U|V}(\tilde{u}_{\text{MAP}}(v)|v) - p_{U|V}(\tilde{u}_D(v)|v) \geq 0 \quad \text{وذلك لأجل كل قاعدة D ورصد } v$$

إذا أخذنا القيمة المتوقعة للحدّ الأول من اليسار على الرصد V ، نحصل على احتمال القرار الصحيح باستخدام قاعدة الاحتمال البعدي الأعظمي MAP. أما القيمة المتوقعة للحد الثاني من اليسار، ولأجل أي قاعدة D ، فتمثل احتمال القرار الصحيح باستخدام تلك القاعدة. ومن ثم فإن القيمة المتوقعة من (2.8) على V ، تُبيّن أن قاعدة الاحتمال البعدي الأعظمي MAP تجعل احتمال القرار الصحيح أعظماً على كامل فضاء الرصد. النتائج السابقة بسيطة جداً، لكنها مهمة وأساسية. تُلخّص النظرية التالية هذه النتائج.

نظرية 8.1.1: إن قاعدة الاحتمال البعدي الأعظمي MAP المبيّنة في (1.8) تجعل احتمال القرار الصحيح أعظماً، وذلك لكل قيمة عينة مرصودة v وعلى نحو متوسط على V . تُحدّد قاعدة الاحتمال البعدي الأعظمي MAP فقط بالتوزيع المشترك لكل من U و V .

قبل مناقشة مضامين واستخدام قاعدة الاحتمال البعدي الأعظمي MAP، سنقوم بمراجعة الافتراضات الواردة آنفاً. أولاً، جرى افتراض نموذج الاحتمال بحيث تكون جميع الاحتمالات معروفة، وأنه، ولأجل كل أداء لتجربة، فإن واحدة فقط من الفرضيات صحيحة. وهذا يتوافق تماماً مع نموذج الاتصالات حيث يبعث المرسل واحدة من مجموعة إشارات محتملة، ويقوم المستقبل، عند استقباله إشارة مع ضجيج، باتخاذ قرار على الإشارة المرسله فعلياً. لكن ذلك لا يتوافق دوماً مع تجربة علمية تحاول أن تثبت وجود ظاهرة جديدة؛ في مثل هذه الحالة، ليس ثمة طريقة معقولة لنمذجة الاحتمالات القَبلية. ستجري مناقشة الكشف في حال عدم وجود احتمالات قَبلية معروفة في الملحق. أما الفرضية الثانية فتعتبر أن جعل احتمال القرار الصحيح أعظماً معياراً مناسباً لاتخاذ القرار. في كثير من الحالات، تكون كلفة اتخاذ القرار الخطأ متباينة جداً. فعلى سبيل المثال، عند إجراء اختبار لمرض قابل للعلاج لكنّه مُميت، فإن ارتكاب خطأ في حال وجود المرض مُكلفٌ أكثر بكثير من ارتكابه في حال عدم وجود المرض. وكما هو مبين في التمرين 1.8 من السهل توسيع النظرية لتأخذ بالحسبان الكلف المتعلّقة بالأخطاء.

يمكن، ضمن هذه الافتراضات، أن نُعبّر عن مسألة الكشف بإيجاز بالمصطلحات الاحتمالية التالية. لدينا فضاء عينة أساسي Ω ، وقياس احتمال، ومتحولين عشوائيين U و V ذوي أهمية. عند إجراء التجربة المناسبة، يرصد المراقب قيمة العينة v من المتحول العشوائي V ،

¹²⁵ كما هو مبين في الملحق، من المفضل أحياناً أن نختار عشوائياً من بين الخيارات الاستدلالية اللاحقة عندما لا تكون القيمة العظمى في (1.8) وحيدة. غالباً ما توجد حالات (كما في الترميز وفك الترميز المُقطّع) حيث تظهر حالات عدم تفرّد مع قيم احتمال موجبة.

ولا يرصد أي شيء آخر، وعلى وجه الخصوص قيمة العينة من المتحول العشوائي U ، ولتكن a_m . يستخدم المراقب قاعدة الكشف، وهي تابع يُمثل كل قيمة مُحتملة من v بقيمة مُحتملة من a_0 إلى a_{M-1} ، من U . إذا كان $\tilde{v}(v) = a_m$ ، فإن الكشف صحيح، وما عدا ذلك فقد حدث خطأ. تجعل قاعدة الاحتمال البعدي الأعظمي MAP احتمال الكشف الصحيح أعظمياً مشروطاً بكل قيمة v ، كما تجعل احتمال الكشف غير المشروط أعظمياً أيضاً. من البديهي أن على المراقب أن يعرف الاحتمال الشرطي $p_{U|V}$ ليتمكن من استخدام قاعدة الاحتمال البعدي الأعظمي MAP.

سنقتصر في الفترتين التاليتين على حالة الفرضيات الإثنائية، ($M = 2$). وهذا يسمح لنا بفهم معظم الأفكار الهامة، مع تخفيض ملحوظ بالرموز. تُعمّم هذه الحالة بعد ذلك لأي عدد اختياري من الفرضيات ولحسن الحظ أن هذا التعميم بسيط جداً.

2.8 الكشف الإثنائي

لنفرض نموذج احتمال فيه الفرضية الصحيحة U متحول عشوائي إثنائي له القيمتان المحتملتان $\{a_0, a_1\}$ واحتمالان قَبْلَيَّان p_0 و p_1 . في الاتصالات، تُمدج الاحتمالات القَبْلِيَّة بوصفها احتمالات متساوية، إلا أنه في بعض الأحيان نمة عمليات كشف متعددة المراحل تقود فيها نتيجة المرحلة الأولى إلى احتمالات قَبْلِيَّة غير متساوية في المراحل التالية. لذلك سنفرض أن p_0 و $p_1 = 1 - p_0$ كيفية. ليكن V متحولاً عشوائياً ذا كثافة احتمال شرطية $f_{V|U}(v|am)$ منتهية ولا تساوي الصفر لكل قيم $v \in \mathbb{R}$ و $m \in \{0, 1\}$. تُعدُّ التعديلات للكثافات الصفرية، أو V المقطّعة، أو V العقدية، أو V الشعاعية سهلةً نسبياً وسناقشها لاحقاً.

تُسمى الكثافات الشرطية $f_{V|U}(v|am)$ و $m \in \{0, 1\}$ ترجيحات في لغة فحص الفرضيات. تُعطي الكثافة الهامشية لـ V بالعلاقة:

$$(3.8) \quad p_{U|V}(a_m|v) = \frac{p_m f_{V|U}(v|a_m)}{f_V(v)}$$

تكتب العلاقة (1.8) بالتفصيل لهذه الحالة:

$$(4.8) \quad \frac{p_0 f_{V|U}(v|a_0)}{f_V(v)} \geq \frac{\tilde{U}_{=a_0} p_1 f_{V|U}(v|a_1)}{\tilde{U}_{=a_1} f_V(v)}$$

تدلُّ "المعادلة" على أن قرار قاعدة الاحتمال البعدي الأعظمي MAP هو a_1 إذا كان الطرف الأيسر أكبر من أو يساوي الطرف الأيمن، و a_0 إذا كان الطرف الأيسر أصغر من الطرف الأيمن. إن اختيار القرار $\tilde{U} = a_0$ عند حدوث التساوي في العلاقة (4.8) هو اختيار اعتباطي ولا يؤثر على احتمال أن يكون صحيحاً. بحذف $f_V(v)$ وإعادة الترتيب نجد:

$$(5.8) \quad \Lambda(v) = \frac{f_{V|U}(v|a_0)}{f_{V|U}(v|a_1)} \geq \frac{\tilde{U}_{=a_0} p_1}{\tilde{U}_{=a_1} p_0} = \eta$$

تُسمى النسبة $\Lambda(v) = f_{V|U}(v|a_0)/f_{V|U}(v|a_1)$ نسبة الترجيح، وهي فقط تابع لـ v . وتُسمى النسبة $\eta = p_1/p_0$ العتبة وتعتمد فقط على الاحتمالات السابقة. تُقارن قاعدة الاحتمال البعدي الإثنائية (أو اختبار MAP كما تُسمى عادة) نسبة الترجيح مع العتبة، وتُقرّر الفرضية a_0 إذا وصلت النسبة إلى العتبة، والفرضية a_1 فيما عدا ذلك. لنلاحظ أنه إذا زاد الاحتمال السابق p_0 المنخفضت العتبة، كما وتزداد مجموعة القيم v التي أدت لاختيار الفرضية a_0 ؛ وهذا يتوافق مع حدسنا - كلما كنا في البدء أكثر تأكيداً بأن U هي صفر، وجب أن تكون الدلائل أقوى لتغيير رأينا. وكما يظهر من التمرين 1.8، فإن الأثر الوحيد لتخفيض الكلف الزائدة وليس احتمال الخطأ هو تغيير العتبة η في العلاقة (5.8).

نمة حالة خاصة هامة من العلاقة (5.8) حيث يكون $p_0 = p_1$. في هذه الحالة $\eta = 1$ ، وتُختار القاعدة $\tilde{U}(v) = a_0$ من أجل: $f_{V|U}(v|a_0) \geq f_{V|U}(v|a_1)$ وتُختار $\tilde{U}(v) = 1$ فيما عدا ذلك. تسمى هذه العملية قاعدة أو اختبار الترجيح الأعظمي (ML). في الاتصالات، وكما ذكرنا سابقاً فإن الاحتمالات السابقة تكون متساوية عادة، ومن ثمَّ تُخفّض القاعدة MAP (قاعدة الاحتمال البعدي الأعظمي) إلى القاعدة ML (قاعدة الترجيح الأعظمي). يستخدم اختبار الترجيح الأعظمي أيضاً عندما يكون p_0 و p_1 مجهولين.

سنستخرج الآن احتمال الخطأ، أي واحد ناقص احتمال الاختيار الصحيح للقاعدة MAP. نحسب أولاً احتمال الخطأ الشرطي على كل فرضية، $\Pr\{e|U = a_0\}$ و $\Pr\{e|U = a_1\}$. بعد ذلك يُعطى احتمال الخطأ الإجمالي بالعلاقة:

$$\Pr\{e\} = p_0\Pr\{e|U = a_0\} + p_1\Pr\{e|U = a_1\}$$

في حقل الرادار يُسمى الحد $\Pr\{e|U = a_0\}$ احتمال الإنذار الخطأ، والحد $\Pr\{e|U = a_1\}$ احتمال الفشل. والقيمة $1 - \Pr\{e|U = a_1\}$ احتمال الكشف. في الإحصاء يُسمى الحد $\Pr\{e|U = a_1\}$ احتمال الخطأ من النوع الثاني، ويُسمى الحد $\Pr\{e|U = a_0\}$ احتمال الخطأ من النوع الأول. هنا، لا تُستخدم هذه المصطلحات.

لاحظ أن العلاقة (5.8) تقسم فضاء قيم العينات إلى منطقتين. $R_0 = \{v : \Lambda(v) \geq \eta\}$ وهي المنطقة حيث $\bar{U} = a_0$ و $R_1 = \{v : \Lambda(v) < \eta\}$ هي المنطقة حيث $\bar{U} = a_1$. من أجل $U = a_1$ يحدث الخطأ إذاً فقط إذا كانت v ضمن R_0 ، ومن أجل $U = a_0$ يحدث الخطأ إذاً فقط إذا كانت v ضمن R_1 . ومن ثم،

$$(6.8) \quad \Pr\{e|U = a_0\} = \int_{R_1} f_{V|U}(v|a_0)dv$$

$$(7.8) \quad \Pr\{e|U = a_1\} = \int_{R_0} f_{V|U}(v|a_1)dv$$

ثم مقارنة أسهل عادة للعمل مباشرة مع نسبة الترجيح. بما أن $\Lambda(v)$ تابع لقيمة العينة المرصودة v ، فإن المتحول العشوائي (V) ، المسمى أيضاً نسبة الترجيح، يُعرّف على النحو التالي: لأجل كل نقطة عينة ω فإن $V(\omega)$ هي قيمة العينة المقابلة لـ v ، و $\Lambda(V)$ هو مختصر لـ $\Lambda(V(\omega))$. وبنفس الطريقة فإن $\bar{U}(V)$ (أو اختصاراً \bar{U}) هي متحول القرار العشوائي. وبهذه التعابير تبين العلاقة (5.8)

$$(8.8) \quad \bar{U} = a_0 \text{ فقط إذا كان } \Lambda(V) \geq \eta$$

ومن ثم، للكشف باستخدام الاحتمال البعدي الأعظمي MAP بعبء η

$$(9.8) \quad \Pr\{e|U = a_0\} = \Pr\{\bar{U} = a_1|U = a_0\} = \Pr\{\Lambda(V) < \eta|U = a_0\}$$

$$(10.8) \quad \Pr\{e|U = a_1\} = \Pr\{\bar{U} = a_0|U = a_1\} = \Pr\{\Lambda(V) \geq \eta|U = a_1\}$$

تُعرّف الإحصائية الكافية على أنها أي تابع من الرصد v يمكن من خلاله حساب نسبة الترجيح. يُعتبر كل من v ، و $\Lambda(v)$ ، وأي تابع تقابل من $\Lambda(v)$ إحصائية كافية. إن التعامل مع $\Lambda(v)$ وأي تابع من $\Lambda(v)$ في حساب احتمال الخطأ هو أسهل من التعامل مع v . ويكون هذا صحيحاً على نحو خاص عند مناقشة المشاهدات الشعاعية أو الإجرائية، لأن $\Lambda(v)$ يكون دوماً حقيقياً وأحادي البعد.

رأينا أن قاعدة الاحتمال البعدي الأعظمي MAP (ومن ثم قاعدة الترجيح الأعظمي ML) هي اختبار عتبة على نسبة الترجيح. كما تُعتبر قاعدة الكلفة الصغرى، (انظر التمرين 8.1)، وكذلك اختبار نيمان-بيرسون (والذي، كما بينه الملحق، لا يشمل افتراضات عن الاحتمالات القبلية)، اختبارات عتبة على نسبة الترجيح. لا تعتمد جميع قواعد اتخاذ القرار الإثنائية هذه فقط على اختبارات العتبة على نسبة الترجيح، لكن خصائص هذه القواعد، التي من مثل احتمالات الخطأ الشرطية في (9.8) و (10.8)، تعتمد فقط على $\Lambda(v)$ و η أيضاً. في الواقع، من الصعب أن نتخيل أي عملية اتخاذ قرار إثنائية ذات معنى، وعلى وجه الخصوص في مفهوم الاتصالات الرقمية، ليست اختبار عتبة على نسبة الترجيح. ومن ثم، فعند حساب إحصائية كافية من الشعاع المرصود، لا يعود لذلك الشعاع قيمة إضافية في أي قاعدة اتخاذ قرار ذات أهمية هنا.

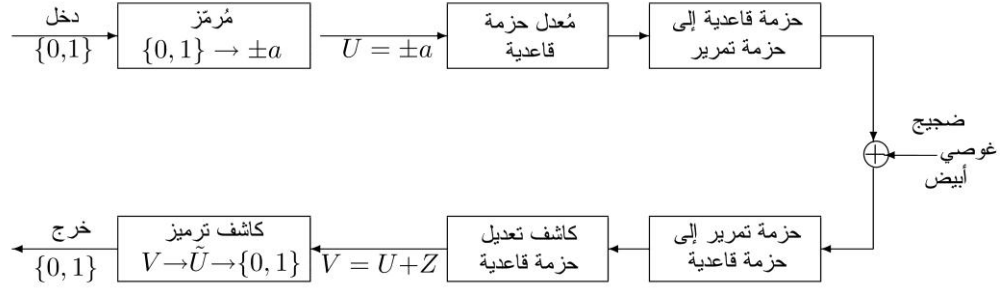
تُعتبر نسبة الترجيح اللوغارتمية $LLR(V) = \ln[\Lambda(V)]$ إحصائية كافية هامة، وهي عادة أسهل للتعامل معها من نسبة الترجيح ذاتها. وكما سنرى في الفقرة التالية، فإن نسبة الترجيح اللوغارتمية LLR مناسبة لإحصائيات الضجيج الغوسي.

3.8 الإشارات الإثنائية في الضجيج الغوسي الأبيض

تعالج هذه الفقرة التعديل الإثنائي بمطال النبضة 2-PAM وبعد ذلك 2-PAM مع زحان، ومن ثمَّ الإشارات الإثنائية مع عمليات رصد الشعاع، وأخيراً مع رصد الموجة.

1.3.8 كشف إشارات التعديل بمطال النبضة PAM المتعكسة القطبية

لنفرض تعديلاً بمطال النبضة ذا قطبية متعكسة (مثلاً 2-PAM) كما يبيّنه الشكل 1.8.



الشكل 1.8: يعطي المنبع رقماً إثنائياً يُمثّل بـ $U = \pm a$. تُعدّل هذه القيم إلى إشارة، ويضاف الضجيج الغوسي الأبيض، تجري على الموجة الناتجة عمليتا كشف تعديل وأخذ عينات، مما يعطي قيمة مُستقبلة مُضجّجة $V = U + Z$. من الفقرة 8.7، $Z \sim \mathcal{N}(0, N_0/2)$. سيجري شرح هذه العلاقة أكثر تفصيلاً لاحقاً. اعتماداً على هذه المشاهدة يتخذ المستقبل قراراً \bar{U} ويُمثّله بخرج إثنائي، يُمثّل النسخة المُفترضة للدخل الإثنائي.

الفرضية U الصحيحة هي إما $a_0 = a$ أو $a_1 = a$. لتكن $Z \sim \mathcal{N}(0, N_0/2)$ تُمثّل الضجيج الغوسي المتغيّر عشوائياً بقيمة متوسطة 0 ويتغيّر $N_0/2$ مستقل عن U . أي

$$f_Z(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0/2}} \exp\left[-\frac{Z^2}{N_0}\right]$$

لنفرض أن تعديلاً إثنائياً بمطال النبضة 2-PAM جرى تبسيطه بإرسال رمز إثنائي مفرد (بدلاً من تسلسل مع مرور الوقت) وبرصد فقط لقيمة العينة المفردة v التي توافق ذلك الدخل. هذه التبسيطات ليست ضرورية، كما سنرى لاحقاً، إلا أنها تسمح برؤية المسألة بأبسط سياق ممكن. يكون الرصد V (أي خرج القناة قبل الكشف) إما $a + Z$ أو $-a + Z$ ، وذلك بحسب إذا كانت $U = a$ أو $-a$. فلأجل $U = a$ ، يكون:

$$V \sim \mathcal{N}(a, N_0/2), \text{ ولأجل } U = -a, \text{ يكون } V \sim \mathcal{N}(-a, N_0/2)$$

$$f_{V|U}(v|-a) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left[-\frac{(v+a)^2}{N_0}\right] \quad f_{V|U}(v|a) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left[-\frac{(v-a)^2}{N_0}\right]$$

إن نسبة الترجيح هي نسبة هذين الترجيحين، وتُعطى بالعلاقة:

$$(11.8) \quad \Lambda(v) = \exp\left[\frac{-(v-a)^2 + (v+a)^2}{N_0}\right] = \exp\left[\frac{4av}{N_0}\right]$$

وبالتبديل في (5.8) نجد:

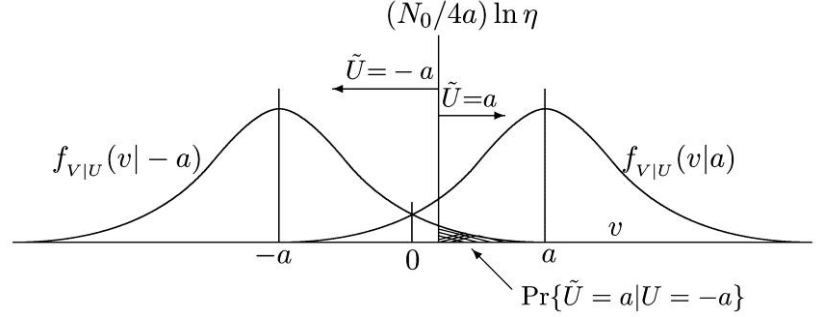
$$(12.8) \quad \exp\left[\frac{4av}{N_0}\right] \geq \bar{U}=a \quad \frac{p_1}{p_0} = \eta$$

يمكن تبسيط هذه العلاقة بأخذ اللوغارتم، فتصبح

$$(13.8) \quad \text{LLR}(v) = \left[\frac{4av}{N_0} \right] \begin{matrix} \geq \tilde{U}=a \\ < \tilde{U}=-a \end{matrix} \ln(\eta)$$

$$(14.8) \quad v \begin{matrix} \geq \tilde{U}=a \\ < \tilde{U}=-a \end{matrix} \frac{N_0 \ln(\eta)}{4a}$$

يوضح الشكل 2.8 قاعدة اتخاذ القرار هذه.



الشكل 2.8: اختبار الفرضية الإثنائية لإشارة متعاكسة، $0 \rightarrow a$ و $-a \rightarrow 1$. الاحتمالات القبلية هي p_0 و p_1 ، والعتبة $\eta = p_0 / p_1$ ، والضجيج $\mathcal{N}(0, N_0/2)$.

يمكن النظر إلى احتمال الخطأ، باعتبار $U = -a$ ، على أنه احتمال أن تكون قيمة الضجيج أكبر من $a + \frac{N_0 \ln(\eta)}{4a}$. وبما أن للضجيج عامل تشتت $N_0/2$ ، فإن هذا الاحتمال هو الذي تزيد فيه قيمة المتحول العشوائي الغوسي المنتظم $Z/\sqrt{N_0/2}$ عن $a/\sqrt{N_0/2} + \sqrt{N_0/2} \ln(\eta)/(2a)$. وبالتالي:

$$(15.8) \quad \Pr\{e|U = -a\} = Q\left(\frac{a}{\sqrt{N_0/2}} + \frac{\sqrt{N_0/2} \ln \eta}{2a}\right)$$

حيث يُعطى $Q(x)$ ، تابع التوزيع المتمم لـ $\mathcal{N}(0, 1)$ ، بالعلاقة:

$$Q(x) = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

يُحسب احتمال الخطأ، باعتبار $U = a$ ، بنفس الطريقة، ولكن تكون Z أقل من أو تساوي $-a + \frac{N_0 \ln(\eta)}{4a}$. إذ إن لـ $-Z$ نفس التوزيع مثل Z .

$$(16.8) \quad \Pr\{e|U = a\} = Q\left(\frac{a}{\sqrt{N_0/2}} - \frac{\sqrt{N_0/2} \ln \eta}{2a}\right)$$

من المستحسن أن تُعبّر عن $a/\sqrt{N_0/2}$ على الشكل $\sqrt{2a^2/N_0}$. كما شاهدنا سابقاً يمكن النظر إلى a^2 باعتباره الطاقة لكل بت، E_b ، ومن ثمّ تصيح العلاقاتان (15.8) و (16.8) على الشكل التالي:

$$(17.8) \quad \Pr\{e|U = -a\} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} + \frac{\ln \eta}{2\sqrt{2E_b/N_0}}\right)$$

$$(18.8) \quad \Pr\{e|U = a\} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} - \frac{\ln \eta}{2\sqrt{2E_b/N_0}}\right)$$

نلاحظ أن هذه الصيغ تشمل فقط النسبة E_b/N_0 وليس E_b أو N_0 كل على حدة. إذا جرى قياس الإشارة، والرصد، والضجيج بسلم مختلف، فإن كلاً من E_b و N_0 سيتغيران بنفس العامل، وهذا يساعد في توضيح سبب اعتماد النسبة فقط. يمكن، في الحقيقة استنظام السلم بحيث يكون إما للضجيج أو للإشارة تشتتاً مقداره 1.

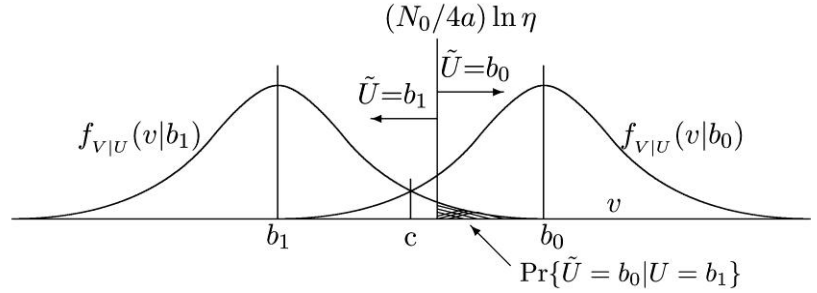
نُمدج الفرضيات في مسائل الاتصالات هذه على أنها متساوية الاحتمالات، أي $p_0 = p_1 = 1/2$. في هذه الحالة، $\ln \eta = 0$ وتساوى عندئذ قاعدتا الكشف MAP و ML. تُبسّط المعادلتان (17.8) و (18.8) لتُصبحا:

$$(19.8) \quad \Pr\{e\} = \Pr\{e|U = -a\} = \Pr\{e|U = a\} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

تمثل هذه في الشكل 2.8 أي من ذَيْلي التوزيع الغوسي بدءاً من النقطة 0 حيث يتقاطعان. ستظهر هذه المعادلة مراراً بأشكال مختلفة، وستبدو كأنها نتيجة حتمية لمسائل كشف غُوصية متنوعة.

2.3.8 كشف الإشارات الإثنائية غير المتعكسة القطبية

لندرس الحالة الأكثر تعقيداً والميَّنة في الشكل 3.8. بدلاً من مقابلة 0 إلى $+a$ و 1 إلى $-a$ ، يُمثّل 0 بعدد كفي b_0 ويُمثّل 1 بعدد كفي b_1 . ولتحليل ذلك، لتكن c هي نقطة الوسط بين b_0 و b_1 ، أي $c = (b_0 + b_1)/2$. ولنفرض أن $b_1 < b_0$ ، وليكن $a = b_0 - c = c - b_1$. وباشتراط أن $U = b_0$ ، يكون الرصد: $V = c + a + Z$ ؛ وباشتراط أن $U = b_1$ ، يكون $V = c - a + Z$ ، بكلمات أخرى، فإن هذه الحالة الأكثر عموماً هي ببساطة نتيجة لإزاحة الإشارات السابقة بالثابت c .



الشكل 3.8: اختبار فرضية إثنائية لإشارات كيفية، $b_0 \rightarrow 0$ و $b_1 \rightarrow 1$ حيث $b_0 > b_1$. حيث $c = (b_0 + b_1)/2$ وهي ذاتها كما في الشكل 2.8 مع إزاحة بمقدار c . من أجل $b_0 < b_1$ يجب قلب الصورة، لكن الجواب ذاته.

لنعتبر أن $\tilde{V} = V - c$ هي نتيجة لإزاحة الرصد بمقدار $-c$. إن \tilde{V} هي إحصائية كافية وإن $\tilde{V} = \pm a + Z$. هذا مشابه للمسألة آنفة الذكر، ومن ثمّ فإن احتمال الخطأ يُعطى أيضاً بالعلاقين (15.8) و (16.8).

تغيرت الطاقة المستخدمة في الحصول على احتمال الخطأ هذا عنها في حالة الإشارة المتعكسة القطبية. وبفرض وجود احتمالات قَبْلية متساوية، تُصبح الطاقة لكل بت $a^2 + c^2 = (b_0^2 + b_1^2)/2$. في الاتصالات، تُستخدم عادة قيمة وسطى c بوصفها نعمة دليلية لملاحقة القناة. سنرى بعد ذلك أن E_b هي مجموع الطاقة المستخدمة للإرسال الإثنائي الفعلي (a^2) بالإضافة إلى الطاقة المستخدمة للنعمة الدليلية (c^2). إن جزء الطاقة E_b المستخدم للإشارة هو $\gamma = \frac{a^2}{a^2 + c^2}$. وهذا يُغيّر العلاقة (19.8) لتصبح:

$$(20.8) \quad \Pr\{e | U = b_1\} = \Pr\{e | U = b_0\} = Q\left(\sqrt{\frac{2\gamma E_b}{N_0}}\right)$$

على سبيل المثال، ثمة تقنية اتصالات إثنائية شائعة تُسمى التبدل/فصل/وصل تستخدم الإشارات الإثنائية 0 و $2a$. في هذه الحالة تصبح $\gamma = 1/2$ وهناك ضياع طاقة مقداره 3 dB عن حالة الإشارة المتعكسة القطبية. وباستخدام قاعدة الترجيح الأعظمي ML يُصبح احتمال الخطأ، $Q(\sqrt{E_b/N_0})$.

3.3.8 كشف الأشعة الإثنائية الحقيقية في الضجيج الغوسي الأبيض

لندرس الآن الصيغة الشعاعية لمسألة الكشف الغوسي. لنفرض أن الرصد هو n شعاع عشوائي $V = U + Z$. والضجيج Z هو شعاع n عشوائي $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)^T$ ، على نحو مستقل عن U ، ومُرَكَّبَات مُسْتَقَلَّة وموزعة بانتظام Independent and Identically Distributed معطية بالعلاقة $Z_k \sim \mathcal{N}(0, N_0/2)$. إن الدخل U هو شعاع n عشوائي له M قيمة مُحْتَمَلَة (فرضية). يُدَلُّ على الفرضية ذات الترتيب m بالعلاقة $a_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})^T$ ، حيث $0 \leq m \leq M-1$. تُرصد قيمة العينة v من، وتُصبح المسألة هي اتخاذ قرار عن الفرضية U باستخدام قاعدة الاحتمال البعدي MAP، يُدَلُّ عليه بـ \bar{U} . لنفرض أولاً حالة الإشارة الإثنائية المتعكسة القطبية حيث $a_1 = -a_0$. ولتبسيط الرموز سنعتبر أن a_0 هو $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ ومن ثمَّ فإن الفرضيتين هما $U = -\mathbf{a}$ و $U = \mathbf{a}$ وأن الرصد هو إما $\mathbf{a} + Z$ أو $-\mathbf{a} + Z$ عندئذ تُعطى الترحيحات بالعلاقين التاليين:

$$f_{V|U}(v | \mathbf{a}) = \frac{1}{(\pi N_0)^{\frac{n}{2}}} \exp \sum_{k=1}^n \frac{-(v_k - a_k)^2}{N_0} = \frac{1}{(\pi N_0)^{\frac{n}{2}}} \exp \left(\frac{-\|v - \mathbf{a}\|^2}{N_0} \right)$$

$$f_{V|U}(v | -\mathbf{a}) = \frac{1}{(\pi N_0)^{\frac{n}{2}}} \exp \sum_{k=1}^n \frac{-((v_k - a_k))^2}{N_0} = \frac{1}{(\pi N_0)^{\frac{n}{2}}} \exp \left(\frac{-\|v + \mathbf{a}\|^2}{N_0} \right)$$

وتُعطى نسبة الترحيح اللوغارتمية بالعلاقة:

$$(21.8) \quad \text{LLR}(v) = \frac{-\|v - \mathbf{a}\|^2 + \|v + \mathbf{a}\|^2}{N_0} = \frac{4\langle v, \mathbf{a} \rangle}{N_0}$$

ويكون اختبار قاعدة الاحتمال البعدي الأعظمي MAP

$$\text{LLR}(v) = \frac{4\langle v, \mathbf{a} \rangle}{N_0} \begin{cases} \geq \bar{U} = a \\ < \bar{U} = -a \end{cases} \quad \ln \frac{p_1}{p_0} = \ln(\eta)$$

تُمكن إعادة صياغة هذه العلاقة لتصبح كما يلي:

$$(22.8) \quad \frac{\langle v, \mathbf{a} \rangle}{\|\mathbf{a}\|} \begin{cases} \geq \bar{U} = a \\ < \bar{U} = -a \end{cases} \quad \frac{N_0 \ln(\eta)}{4\|\mathbf{a}\|}$$

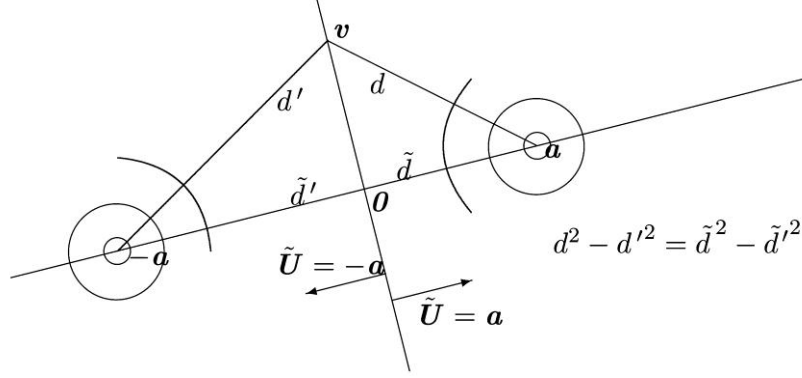
يُمثِّل الحد $\frac{\langle v, \mathbf{a} \rangle}{\|\mathbf{a}\|} \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$ إسقاط الرصد v على الإشارة \mathbf{a} . وبالتالي يكون الجانب الأيسر من العلاقة (22.8) هو مُرَكَّبَة v في اتجاه \mathbf{a} ، مما يبيِّن أن القرار يعتمد فقط على تلك المُرَكَّبَة من v . وهذه نتيجة طبيعية؛ فالضجيج مُسْتَقَل في مختلف الاتجاهات المتعامدة، والضجيج الذي في اتجاه الإشارة فقط له علاقة في كشف الإشارة.

الوضع الهندسي للحالة واضح على وجه الخصوص في الترحيح الأعظمي ML (انظر الشكل 4.8). فالضجيج مُتَنَاطِر كروياً حول المنبع، ويعتمد الترحيح فقط على المسافة من المنبع. وبالتالي فإن قاعدة الكشف بالترحيح الأعظمي ML تُمَثِّل اختيار الفرضية الأقرب إلى نقطة الاستقبال. إن مجموعة النقاط المتساوية البُعد عن الفرضيتين، كما هو مُبَيَّن في الشكل 4.8، هي المنصِّف العمودي بينهما؛ هذا المنصِّف هو مجموعة القيم v التي تحقق العلاقة $\langle v, \mathbf{a} \rangle = 0$. وتكون مجموعة النقاط الأقرب إلى \mathbf{a} على الجانب الذي يحتوي \mathbf{a} من هذا المنصِّف العمودي؛ وهي تُحدَّد بالعلاقة $\langle v, \mathbf{a} \rangle > 0$ وتُقابَل بـ \mathbf{a} في قاعدة الترحيح الأعظمي ML. وبطريقة مشابهة، تُحدَّد مجموعة النقاط الأقرب إلى $-\mathbf{a}$ بالعلاقة $\langle v, \mathbf{a} \rangle < 0$ ، وتُقابَل بـ $-\mathbf{a}$. في حالة قاعدة الاحتمال البعدي العامة، تُفصل المنطقة التي جرت مُقابلتها بـ \mathbf{a} عن المنطقة التي قبولت بـ $-\mathbf{a}$ بعمود على \mathbf{a} ، لكنَّه في هذه الحالة هو العمود المُعرَّف بالعلاقة $\langle v, \mathbf{a} \rangle = N_0 \ln(\eta)/4$.

ثمة طريقة أخرى لتفسير العلاقة (22.8) وذلك بالنظر إليها بنظام إحداثيات مختلف. لنُخْتَر $\phi_1 = \mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|$ بوصفه أحد عناصر القاعدة المتعامد للأشعة $n-1$ ونختار $n-1$ شعاعاً متعامداً آخر باستخدام إجرائية غرام - شميدت. في نظام الإحداثيات الجديد هذا، يمكن التعبير عن v بالعلاقة $(v'_1, v'_2, \dots, v'_n)^T$ ، ومن أجل $1 \leq k \leq n$ ، يكون $v'_k = \langle v, \phi_k \rangle$. وبما أن $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{a}\| \langle v, \phi_1 \rangle = \|\mathbf{a}\| v'_1$ ، فإن الجانب الأيسر من العلاقة (22.8) هو ببساطة v'_1 ، أي قياس مسقط v على \mathbf{a} . ومن ثمَّ تصبح العلاقة (22.8) على الشكل التالي:

$$v'_1 \begin{cases} \geq \bar{U} = 0 \\ < \bar{U} = 1 \end{cases} \quad \frac{N_0 \ln(\eta)}{4\|\mathbf{a}\|}$$

هذه العلاقة مشابهة للعلاقة (14.8) لاختبار قاعدة الاحتمال البعدي MAP أحادي البعد. بكلمات أخرى، فإن المسألة متعددة الأبعاد تُصبح نفس المسألة أحادية البعد عند اختيار نظام الإحداثيات المناسب. في الحقيقة، فإن نتائج العلاقة (22.8) بيّنت أكثر من ذلك، وتحديداً أن v_1 إحصائية كافية. إذا جرى التعبير عن العلاقة (21.8) بنظام الإحداثيات الجديد، فإن المركبات v'_1, \dots, v'_n والتي تحتوي ضجيجاً فقط، تُلغى في هذه العلاقة. تُسمى حقيقة عدم تأثير إحداثيات v في الاتجاهات العمودية على الإشارة على نسبة الترجيح اللوغاريتمية LLR نظرية انعدام الترابط (اللاأهميّة). النظرية 2.4.8 تُعطي تعميماً لهذه النظرية.



الشكل 4.8: مناطق اتخاذ القرار حسب قاعدة الترجيح الأعظمي ML للإشارات الإثنائية في الضجيج الغوسي الأبيض. يظهر بالشكل شعاع v على حدّ العتبة. المسافة من v إلى a هي $d = \|v - a\|$. وبطريقة مشابهة تكون المسافة لـ $-a$ هي $d' = \|v + a\|$. وكما بيّنا جبرياً في العلاقة (21.8)، أي نقطة تُحقّق $d^2 - d'^2 = 0$ هي نقطة يكون فيها $\langle v, a \rangle = 0$ ، وبالتالي يكون فيها LLR يساوي 0. هندسياً، وبحسب نظرية فيثاغورث يكون $d^2 - d'^2 = \tilde{d}^2 - \tilde{d}'^2$ ، حيث \tilde{d} و \tilde{d}' هما المسافتان من a و $-a$ إلى مسقط v على المستقيم المولّد من a . وهذا يبين هندسياً لماذا يكون فقط لمسقط v على a علاقة .

يمكن كسب مزيداً من التبصّر في العلاقة (22.8) (في نظام الإحداثيات الأساسي) وذلك بكتابة $\langle v, a \rangle$ على الشكل $\sum_k v_k a_k$. هذا يُبيّن أن اختبار قاعدة الاحتمال البعدي الأعظمي MAP يُثقل كل إحداثية خطياً بمقدار الإشارة في تلك الإحداثية. وهذا ليس مفاجئاً، إذ إن الفرضيتين تصبجان أكثر انفصالاً في حالة المركبات الأكبر لـ a عنهما في حالة المركبات الأصغر. لندرس فيما يلي احتمال الخطأ الشرطي على $U = -a$. لنفرض $U = -a + Z$ و $V = -a + Z$ وبالتالي:

$$\frac{\langle v, a \rangle}{\|a\|} = -\|a\| + \langle Z, \phi_1 \rangle$$

وتكون القيمة المتوسطة والتغيّر باعتبار $U = -a$ هما $-\|a\|$ و $N_0/2$ ، ومن ثمّ تصبح $\langle v, a \rangle / \|a\|$ بالشكل $\mathcal{N}(-\|a\|, N_0/2)$. من العلاقة (22.8) نجد أن الاحتمال، باعتبار $U = -a$ ، هو احتمال أن تزيد $\mathcal{N}(-\|a\|, N_0/2)$ عن $N_0 \ln(\eta) / (4\|a\|)$. وهذا هو احتمال أن تكون Z أكبر من $\|a\| + N_0 \ln(\eta) / (4\|a\|)$. وبعملية استنظام كاتي أُجريت في الفقرة 1.3.8 نجد:

$$(23.8) \quad \Pr\{e \mid U = -a\} = Q\left(\sqrt{\frac{2\|a\|^2}{N_0} + \frac{\ln \eta}{2\sqrt{2\|a\|^2/N_0}}}\right)$$

وينفس البرهان نجد:

$$(24.8) \quad \Pr\{e \mid U = a\} = Q\left(\sqrt{\frac{2\|a\|^2}{N_0} - \frac{\ln \eta}{2\sqrt{2\|a\|^2/N_0}}}\right)$$

نلاحظ أن هذه النتيجة هي ذاتها المعطاة في العلاقتين (15.8) و (16.8) عند تحويل المسألة إلى نظام إحداثيات فيه a على استقامة واحدة مع شعاع الإحداثيات. بما أن الطاقة في البت هي $E_b = \|a\|^2$ ، فإن العلاقتين (17.8) و (18.8) تُتابع كما في السابق. وهذا ليس مفاجئاً، بالتأكيد، حيث إن مسألة اتخاذ القرار الشعاعي مشابهة إلى المسألة السّلمية (اللاموجّهة) عند استخدام القاعدة المناسبة.

ومن أجل مُعظم مسائل الاتصالات، تُعتبر الفرضيات القبلية متساوية أي $\eta = 1$. وبالتالي، كما في (19.8)،

$$(25.8) \quad \Pr\{e\} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

وهذا يعطينا تأكيداً منطقياً - أن احتمال الخطأ لا يعتمد على أساس الإحداثيات المتعامدة المستنظمة.

لنفرض الآن أن الفرضيات الإثنائية تُطابق إشارات شعاعية غير متعاكسة القطبية، لنقل b_0 و b_1 . نُحللها بنفس الطريقة المستخدمة في الحالة السُّلمية. لتكن $c = (b_0 + b_1)/2$ و $a = b_0 - c$. ومن ثم فإن الإشارتين هما $b_0 = a + c$ و $b_1 = -a + c$. وكما في السابق فإن تحويل الرصد \mathbf{V} إلى $\mathbf{V} = \bar{\mathbf{V}} - c$ يزيح نقطة الوسط ويُعيد المسألة إلى حالة الإشارات المتعاكسة القطبية. يعتمد احتمال الخطأ فقط على المسافة $\|\mathbf{a}\|$ بين الإشارات ويُعطى بالعلاقين (23.8) و (24.8). كما تختلف الطاقة في البت أيضاً، وبفرض وجود أشعة دخل متساوية الاحتمال، تكون الطاقة في البت $E_b = \|\mathbf{a}\|^2 + \|c\|^2$. وعليه فنقطة الوسط c تُساهم في الطاقة، ولكن ليس في احتمال الخطأ.

من المناسب، وعلى وجه الخصوص عند التعميم لحالة $M > 2$ ، أن نُعبّر عن نسبة الترجيح اللوغارتمية LLR في الحالة الغير المتعاكسة القطبية مباشرة بالقيم b_0 و b_1 . وباستخدام العلاقة (21.8) للشعاع المزاح $\bar{\mathbf{V}}$ يمكن التعبير عن نسبة الترجيح اللوغارتمية كما يلي:

$$(26.8) \quad \text{LLR}(\mathbf{v}) = \frac{-\|\mathbf{v} - \mathbf{b}_0\|^2 + \|\mathbf{v} - \mathbf{b}_1\|^2}{N_0}$$

وهذه ببساطة هي قاعدة المسافة الصغرى في الترجيح الأعظمي ML، أما في قاعدة الاحتمال البعدي، فإن التعليل هو ذاته كما في الحالة المتعاكسة القطبية.

4.3.8 كشف الأشعة الإثنائية العُقدية في الضجيج الغوسي الأبيض

لندرس الآن صيغة الشعاع العُقدية لنفس المسألة. لنفرض أن الرصد هو شعاع n -عشوائي عُقدية $\mathbf{V} = \mathbf{U} + \mathbf{Z}$. والضجيج هو شعاع عشوائي عُقدية $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)^T$ ، كل منها $\mathcal{N}(0, N_0/2)$. وبالتالي فإن كل Z_k متناظر دائرياً ومعطى بـ $\mathcal{CN}(0, N_0)$. والدخل \mathbf{U} مُستقل عن \mathbf{Z} وإثنائي، يأخذ القيمة a باحتمال p_0 و $-a$ باحتمال p_1 حيث $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^T$ هو شعاع n -عُقدية كيني.

يمكن تبسيط المسألة إلى تلك التي وردت في الفقرة السابقة بجعل \mathbf{Z}' هو الشعاع العشوائي الحقيقي ذو $2n$ بعداً وله المركبات $\Re(Z_k)$ و $\Im(Z_k)$ من أجل $1 \leq k \leq n$. بطريقة مُشابهة ليكن \mathbf{a}' هو الشعاع الحقيقي ذو $2n$ بعداً وله المركبات $\Re(a_k)$ و $\Im(a_k)$ من أجل $1 \leq k \leq n$ ، و ليكن \mathbf{U}' الشعاع الحقيقي الذي يأخذ القيمة a' أو $-a'$. وأخيراً ليكن $\mathbf{V}' = \mathbf{U}' + \mathbf{Z}'$.

لنتذكر أن كثافة الاحتمالات للمتغيرات أو الأشعة العشوائية العُقدية تساوي إلى كثافة الاحتمالات المشتركة للجزئين الحقيقي والعُقدية،

$$f_{(V|U)}(\mathbf{v}|\mathbf{a}) = f_{(V'|U')}(\mathbf{v}'|\mathbf{a}') = \frac{1}{(\pi N_0)^n} \exp \sum_{k=1}^n \frac{-\Re(v_k - a_k)^2 - \Im(v_k - a_k)^2}{N_0}$$

$$f_{(V|U)}(\mathbf{v}|\mathbf{a}) = f_{(V'|U')}(\mathbf{v}'|\mathbf{a}') = \frac{1}{(\pi N_0)^n} \exp \sum_{k=1}^n \frac{-\Re(v_k + a_k)^2 - \Im(v_k + a_k)^2}{N_0}$$

فتكون نسبة الترجيح اللوغارتمية

$$(27.8) \quad \text{LLR}(\mathbf{v}) = \frac{-\|\mathbf{v} - \mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{v} + \mathbf{a}\|^2}{N_0}$$

لنلاحظ أن

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 - 2\Re[\langle \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle] + \|\mathbf{a}\|^2$$

وباستخدام هذه العلاقة والعلاقة المشابهة للحد $\|\mathbf{v} + \mathbf{a}\|^2$ تُصبح العلاقة (27.8):

$$(28.8) \quad \text{LLR}(\mathbf{v}) = \frac{4\Re\{\langle \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle\}}{N_0}$$

يمكن تحديد اختبار الاحتمال البعدي الأعظمي MAP على الشكل التالي:

$$(29.8) \quad \frac{\Re\{\langle \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle\}}{\|\mathbf{a}\|} \begin{cases} \geq \bar{v} = a \\ < \bar{v} = -a \end{cases} \frac{N_0 \ln(\eta)}{4\|\mathbf{a}\|}$$

لنلاحظ أن القيمة لنسبة الترجيح اللوغارتمية LLR وصيغة اختبار الاحتمال البعدي الأعظمي MAP هي ذاتها كما في حالة الشعاع الحقيقي باستثناء الجزء الحقيقي من $\langle \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle$. سنناقش الآن أهمية (دلالة) هذا الجزء الحقيقي. في فضاء الشعاع العقدي مُتعدد الأبعاد، تُمثّل $\langle \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle / \|\mathbf{a}\|$ القيمة العُقديّة لمسقط \mathbf{v} باتجاه \mathbf{a} . ولنفهم هذا الإسقاط بصورة أفضل، لنفرض وجود قاعدة متعامدة مُستنزّمة فيها $\mathbf{a} = (1, 0, 0, \dots, 0)^T$. عندها تُصبح $\langle \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle / \|\mathbf{a}\| = v_1$. وبالتالي $\Re(v_1) = \pm 1 + \Re(z_1)$ وكذلك $\Im(v_1) = \Im(z_1)$. من الواضح أن الحد $\Re(v_1)$ فقط له علاقة بالقرار الإثنائي. إن استخدام الحد $\Re\{\langle \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle / \|\mathbf{a}\|\}$ في العلاقة (29.8) هو ببساطة الطريقة العامة للتعبير عن هذه الفكرة الأساسية. إذا نظرنا إلى المستوي العقدي بوصفه فضاءً حقيقياً ثنائي الأبعاد، عندها يكون أخذ الجزء الحقيقي للحدّ $\langle \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle$ مساوياً لأخذ أسقاطٍ إضافي لهذا الشعاع الحقيقي الثنائي الأبعاد باتجاه \mathbf{a} . (انظر التمرين 12.8).

وتبقى النتائج والاستنتاجات التي وردت في الفقرة السابقة دون تغيير. وبما أن $\|\mathbf{a}'\| = \|\mathbf{a}\|$ ، على وجه الخصوص، فإن نتائج احتمال الخطأ تُعطى بالعلاقين التاليين:

$$(30.8) \quad \Pr\{e \mid \mathbf{U} = -\mathbf{a}\} = Q\left(\sqrt{\frac{2\|\mathbf{a}\|^2}{N_0} + \frac{\ln \eta}{2\sqrt{2\|\mathbf{a}\|^2/N_0}}}\right)$$

$$(31.8) \quad \Pr\{e \mid \mathbf{U} = \mathbf{a}\} = Q\left(\sqrt{\frac{2\|\mathbf{a}\|^2}{N_0} - \frac{\ln \eta}{2\sqrt{2\|\mathbf{a}\|^2/N_0}}}\right)$$

وفي حالة الترجيح الأعظمي ML، وبمعرفة أن $\|\mathbf{a}\|^2 = E_b$ تحصل على نتائج مشابهة

$$(32.8) \quad \Pr\{e\} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

أخيراً، ومن أجل حالة الإشارات غير المتعكسة القطبية مع فرضيتين b_0 و b_1 ، تُعطى نسبة الترجيح اللوغارتمية LLR بالعلاقة (26.8).

5.3.8 كشف الأمواج المتعكسة القطبية الإثنائية في الضجيج الغوسي الأبيض

توسّع هذه الفقرة حالة الشعاع الواردة في الفقرتين السابقتين إلى حالة الشكل الموجي. سيكون من المفيد أن نفعل ذلك على التوازي لكل من العمليات العشوائية الحقيقية لحزمة التمرير، والعمليات العشوائية العُقديّة لحزمة القاعدة. لتكن $U(t)$ الموجة القاعدية المعدّلة. وكما في السابق، تُبسّط الحالة بإرسال بت مُفرد عوضاً من سلسلة من البتات، ومن ثمّ، ولأجل موجة قاعدية $a(t)$ كيفية، وربما عُقدية، يُمثّل الدخل الإثنائي 0 بـ $U(t) = a(t)$ والدخل الإثنائي 1 بـ $U(t) = -a(t)$ ؛ ويرمز للاحتمالات القَبليّة بـ p_0 و p_1 . وليكن $\{\theta_k(t); k \in \mathbb{Z}\}$ هو المنشور المتعامد المستنزّم العُقديّ الذي يُعطي منطقة الموجة القاعدية ذات الصلة، وليكن $a(t) = \sum_k a_k \theta_k(t)$. لنفرض أن $U(t) = \pm a(t)$ مُعدّلة بحامل f_c أكبر من عرض حزمة القاعدة. تكون موجة حزمة التمرير الناتجة $X(t) = \pm b(t)$ ، حيث، من الفقرة 7.8، يمكن تمثيل الشكل المعدّل لـ $a(t)$ ، المسمى $b(t)$ ، كما يلي:

$$b(t) = \sum_k b_{k,1} \psi_{k,1}(t) + b_{k,2} \psi_{k,2}(t)$$

حيث

$$\begin{aligned} b_{k,1} &= \Re(a_k); & \psi_{k,1}(t) &= \Re\{2\theta_k(t) \exp[2\pi i f_c t]\} \\ b_{k,2} &= \Im(a_k); & \psi_{k,2}(t) &= -\Im\{2\theta_k(t) \exp[2\pi i f_c t]\} \end{aligned}$$

نعلم من النظرية 6.6.1 أن مجموعة الإشارات $\{\psi_{k,j}(t); k \in \mathbb{Z}, j \in \{1,2\}\}$ مُتعامدة، ولكل منها طاقة 2. ولتكن $\{\phi_m(t); m \in \mathbb{Z}\}$ مجموعة من التوابع المتعامدة لكل منها طاقة 2 وكل منها متعامد مع كل من مركبات $\psi_{k,j}(t)$. لنفرض أن $\{\phi_m(t); m \in \mathbb{Z}\}$ مع $\psi_{k,j}(t)$ تمتد على الفضاء \mathcal{L}_2 .

يمكن تمثيل الضجيج $W(t)$ ، المفترض ضجيج غوسي أبيض، كما يلي:

$$W(t) = \sum_k (Z_{k,1}\psi_{k,1}(t) + Z_{k,2}\psi_{k,2}(t)) + \sum_m W_m\phi_m(t),$$

حيث $\{Z_{k,m}; k \in \mathbb{Z}, m \in \{1,2\}\}$ هي مجموعة التوابع الخطية المقيسة للضجيج في الفضاء الشعاعي \mathcal{L}_2 الممتدة بـ $\psi_{k,m}(t)$ ، وأن $\{W_m; m \in \mathbb{Z}\}$ هي مجموعة التوابع الخطية للضجيج في المتعمد المتعامد للفضاء. وكما سنرى بعد قليل، فإن التوزيع المشترك لـ W_m لا يُشكّل فرقاً في الاختيار بين $a(t)$ و $-a(t)$ طالما أن W_m مستقل عن $Z_{k,j}$ وعن البت الإثنائي المرسل. وتكون العملية العشوائية المشاهدة عند حزمة الترميز هي

$$Y(t) = \sum_k [Y_{k,1}\psi_{k,1}(t) + Y_{k,2}\psi_{k,2}(t)] + \sum_m W_m\phi_m(t)$$

حيث

$$Y_{k,1} = (\pm b_{k,1} + Z_{k,1}); \quad Y_{k,2} = (\pm b_{k,2} + Z_{k,2})$$

لنفرض أولاً أننا استخدمنا عدداً منتهياً n من توابع متعامدة مُستتظمة لتمثيل $a(t)$. لا يُعتبر هذا تغييراً للتعميم، إذ إن التابع لنفرض $a(t)/\|a(t)\|$ كافٍ لوحده. لنفرض أيضاً، من حيث المبدأ، أنه تمّ رصد فقط مجموعة منتهية واحدة، ولتكن W_1, \dots, W_l من توابع الضجيج المتعامدة. ولنفرض أيضاً أن المتغيرات الضجيجية $Z_{k,j}$ و W_m مُستقلة وكل منها $\mathcal{N}(0, N_0/2)$ ¹²⁶. عندها يُعطى الترجيح بالعلاقة التالية:

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(\mathbf{y} | \mathbf{b}) &= \frac{1}{(\pi N_0)^n} \exp \left[\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^2 \frac{-(y_{k,j} - b_{k,j})^2}{N_0} + \sum_{m=1}^l \frac{-W_m^2}{N_0} \right] \\ f_{Y|X}(\mathbf{y} | \mathbf{b}) &= \frac{1}{(\pi N_0)^n} \exp \left[\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^2 \frac{-(y_{k,j} + b_{k,j})^2}{N_0} + \sum_{m=1}^l \frac{-W_m^2}{N_0} \right] \end{aligned}$$

و تُعطى نسبة الترجيح اللوغارتمية بالعلاقة:

$$\begin{aligned} \text{LLR}(\mathbf{y}) &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^2 \frac{-(y_{k,j} - b_{k,j})^2 + (y_{k,j} + b_{k,j})^2}{N_0} \\ (33.8) \quad &= \frac{-\|\mathbf{y} - \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{y} + \mathbf{b}\|^2}{N_0} \end{aligned}$$

$$(34.8) \quad = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^2 \frac{4y_{k,j}b_{k,j}}{N_0} = \frac{4\langle \mathbf{y}, \mathbf{b} \rangle}{N_0}$$

واختبار قاعدة الاحتمال البُعدي الأعظمي MAP

¹²⁶ تُغَيَّر الضجيج باستعمال ذات السَلْم المستخدم لشكل موجة الإشارة. وبما أن طاقة الدخل تُقاس في الحزمة القاعدية، فإن الضجيج أيضاً يُقاس فيها. في $N_0/2$ لنذكر أن ، وبطريقة مشابهة يُرفع سَلْم الضجيج. الحزمة القاعدية، يُرفع سَلْم طاقة الإشارة بعامل

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{b} \rangle \begin{cases} \geq \bar{x}=b \\ < \bar{x}=-b \end{cases} = \frac{N_0 \ln(\eta)}{4\|\mathbf{b}\|}$$

وهذا مثل حالة الشعاع الحقيقي التي جرى تحليلها في الفقرة 3.3.8. الفرق الوحيد، في الحقيقة، هو أن الرصد هنا يتضمن ضجيجاً بمكونات متعامدة مع المدى المعني، كما تُبيّن عملية استخراج نسبة الترجيح اللوغارتمية LLR بوضوح سبب عدم ظهور هذه المتغيرات الضجيجية في العلاقة LLR. في الحقيقة، يمكن أخذ العدد l للأشعة المتغيرة W_m كبيراً على نحو كافي، كما ويمكن أن يكون للأشعة أي كثافة مشتركة. وطالما أنها مُستقلة عن $Z_{k,j}$ (وعن $X(t)$)، فإنها تُلغى في العلاقة LLR. بكلمات أخرى فإن الضجيج الغوسي الأبيض WGN هو ضجيج غوسي مُستقل وموزع بانتظام (iid) على فضاء كبير بما يكفي لتمثيل الإشارة، ومُستقل عن الإشارة والضجيج خارج ذلك.

إن البرهان السابق للوصول إلى (33.8) و(34.8) ليس كافياً رياضياً، لأنه يعتمد على تعبير مُبهم لفضاء الإشارة موضع الاهتمام، لكن هذه الخاصة بالتحديد هي ما تجعله مفيداً في التطبيق العملي، لأن مواصفات الضجيج الفيزيائية تتغير على نحو كبير بالزمن وبالتردد. إن الجداء الداخلي في (34.8) هو الجداء الداخلي لسلاسل حقيقية في الفضاء \mathcal{L}_2 . وبما أن هذه السلاسل مُعاملات في امتداد متعامد (وليس متعامد مُستنظم)، فإن التحويل إلى جداء داخلي على التوابع المقابلة (انظر الفقرة 5.8) يُعطى بالعلاقة:

$$(35.8) \quad \sum_{k,j} \psi_{k,j} b_{k,j} = \frac{1}{2} \int \psi(t) b(t) dt.$$

وهذا يُبيّن أن LLR مستقلة عن الأساس، وأن هذه المسألة تُختصر إلى مسألة وحيدة البعد إذا كان $b(t)$ مُضاعفاً لأحد التوابع الأساسية. وحتى إذا أُستخدم لفضاء الإشارة أساس منتهٍ عددياً، تبقى العلاقة (35.8) صالحة. لنرى بعد ذلك ماذا يحدث عندما يُفكّ تعديل $Y(t) = \pm b(t) + W(t)$ إلى موجة الحزمة القاعدية $V(t)$. تتمدد المركبة $\sum_m W_m(t)$ من $Y(t)$ إلى ترددات خارج حزمة الترميز، وبالتالي تُرشّح $Y(t)$ قبل عملية فك التعديل، مُجنّبة ظاهرة تشابه التعديل بين $\sum_m W_m(t)$ وجزء الإشارة من $Y(t)$ (انظر التمرين 11.6). وبفرض أن هذا الترشيح لا يؤثر على $b(t)$ ، تُرجع $b(t)$ إلى $a(t) = \sum_k a_k \theta_k(t)$ حيث $a_k = b_{k,1} + ib_{k,2}$ وبطريقة مشابهة تُرجع $W(t)$ إلى

$$Z(t) = \sum_k Z_k \theta_k(t) + Z_{\perp}(t)$$

حيث $Z_k = Z_{k,1} + iZ_{k,2}$ و $Z_{\perp}(t)$ هو نتيجة ترشيح وفك تعديل ترددي للإشارة $\sum_m W_m \phi_m(t)$. تُصبح العملية المعقّدة لحزمة القاعدة المستقبلة،

$$(36.8) \quad V(t) = \sum_k V_k \theta_k(t) + Z_{\perp}(t)$$

حيث

$$V_k = \pm a_k + Z_k$$

مع فرضية الترشيح المذكورة آنفاً، فإن توابع العيّنات من $Z_{\perp}(t)$ متعامدة مع الفراغ المرتبط بـ $\theta_k(t)$ ومن ثمّ فإن السلسلة $\{V_k; k \in \mathbb{Z}\}$ تُحدّد من $V(t)$. وبما أن $V_k = V_{k+1} + iV_{k,2}$ ، فإن قيمة العيّنة LLR(\mathbf{y}) في (34.8) تُحدّد كما يلي بقيم عيّنات $\{v_k; k \in \mathbb{Z}\}$.

$$(37.8) \quad \text{LLR}(\mathbf{y}) = \frac{4\langle \mathbf{y}, \mathbf{b} \rangle}{N_0} = \frac{4\Re\{v, \mathbf{a}\}}{N_0}$$

ومن ثمّ فإن $\{v_k; k \in \mathbb{Z}\}$ إحصائية كافية لـ $\mathbf{y}(t)$ ، وبالتالي فإن اختبار MAP المعتمد على $\mathbf{y}(t)$ يمكن إجراؤه باستخدام $v(t)$. إن الإجراء الذي يوجد أولاً تابع العينة $v(t)$ من $\mathbf{y}(t)$ ويُجرى بعدها اختبار MAP على $v(t)$ هو ببساطة نوع اختبار خاص على $\mathbf{y}(t)$ ، وبالتالي لا يمكنه تحصيل احتمال خطأ أقل من اختبار MAP على $\mathbf{y}(t)$. أخيراً وبما أن $\{v_k; k \in \mathbb{Z}\}$ إحصائية كافية لـ $\mathbf{y}(t)$ ، فهي أيضاً إحصائية كافية لـ $v(t)$ ، ومن ثمّ فإن الضجيج المتعامد $Z_{\perp}(t)$ ليس ذي علاقة.

لاحظ أن نسبة الترجيح اللوغارتمية LLR في (37.8) هي ذاتها مثل نتيجة الشعاع العُقدي في (28.8). يمكن لأحدنا أن يُكرر البرهان هناك، مُضيفاً نشر متعامد لـ $Z_{\perp}(t)$ للتحقق من أن $Z_{\perp}(t)$ ليس له علاقة. بما أن $Z_{\perp}(t)$ يمكن أن يأخذ أية صيغة، فإن البرهان المذكور آنفاً، واعتماداً على حقيقة أن $Z_{\perp}(t)$ هو تابع من $\sum_m W_m \phi_m(t)$ المستقل عن الإشارة والضجيج في فضاء الإشارة، هو أكثر تعبيراً. ولنُلخِّص هذه الفقرة، فقد جرى تحليل طريقة كشف بت مُفرد أرسل بتوليد إشارات قاعدية غير متعكسة القطبية وتعديلها إلى حزمة الترميز. وبعد إضافة الضجيج الغوسي الأبيض WGN، كُشف تعديل الموجة المستقبلية إلى الحزمة القاعدية، ثم كُشف بعدها البت المفرد. إن كاشف الاحتمال البعدي الأعظمي MAP في حزمة الترميز هو اختبار عتبة على $\int y(t) b(t) dt$. وهذا يكافئ اختبار عتبة في الحزمة القاعدية على $\Re[\int y(t) a^*(t) dt]$. يُبين هذا أن كشف التعديل إلى الحزمة القاعدية لا يسبب ضياعاً للأمثلية، كما يُبين أن الكشف يمكن أن يجري في حزمة الترميز أو في حزمة القاعدة. في حالة حزمة الترميز، تكون النتيجة هي امتداد آتي للكشف الإثنائي لأشعة حقيقية، وفي حزمة القاعدة، تكون امتداداً أنياً للكشف الإثنائي لأشعة عقدية.

يمكن الآن ترجمة نتائج هذه الفقرة بدلالة PAM و QAM، مع المحافظة على افتراض نظام "الطلقة الواحدة" حيث يُرسل فيه رقم إثنائي واحد فقط. لنتذكر أنه وفي كل من التعديلين PAM و QAM، تكون نبضة التعديل $p(t)$ متعامدة مع انزياحاتها بفواصل زمنية T إذا كانت $|\hat{p}(f)|^2$ تحقق معيار نايكويست. وبالتالي إذا مُرِّت الموجة القاعدية المستقبلية عبر مرشح توافقي (مرشح ذو استجابة نبضية $p^*(t)$) وتم أخذ العينات عند أزمان kT ، فإن العينات المستقبلية لا تحتوي على تداخلات بين الرموز. ومن أجل بت مُفرد مُرسل في أزمنة مُقطَّعة 0 ، فإن خرج المرشح التوافقي عند زمن المستقبل 0 هو

$$\int v(t) p^*(t) dt = \frac{\Re[\langle v, a \rangle]}{a}$$

وهو يُمثل نسخة مقيسة لنسبة الترجيح الأعظمي LLR. ومن ثمَّ فإن المستقبل من الفصل 6 والذي يتجنَّب التعديل البيئي يحسب أيضاً نسبة الترجيح الأعظمي LLR، والتي يؤدي اختبار العتبة فيها إلى عملية كشف الاحتمال البعدي الأعظمي MAP. تبين الفقرة التالية أن هذا الإجراء يواصل تزويد اختبارات الاحتمال البعدي الأعظمي MAP على الإشارات المتتابعة. تجب أيضاً ملاحظة أن أحد عيّنات خرج المرشح التوافقي عند الزمن 0 يؤدي إلى اختبار الاحتمال البعدي الأعظمي MAP بقطع النظر تم اختيار $p(t)$ لتجنَّب التداخل البيئي أم لا.

من المهم ملاحظة أن أداء الاتصال الإثنائي غير المتعكس في الضجيج الغوسي الأبيض WGN يعتمد فقط على طاقة الإشارة المرسلة. في عملية الكشف بالترجيح الأعظمي ML، يكون احتمال الخطأ هو العلاقة المألوفة $Q\left(\frac{2E_b}{N_0}\right)$ حيث $E_b = \int |a(t)|^2 dt$ والتغير في الضجيج في كل المركبات المتعامدة حقيقة ضمن الحقل موضوع الاهتمام هي $N_0/2$.

وهذا يتمم موضوع تحليل الكشف الإثنائي في الضجيج الغوسي الأبيض WGN، مُتضمناً العلاقة بين حالة الشعاع وحالة الإشارة وتلك التي بين الإشارات أو الأشعة العُقديّة في الحزمة القاعدية وبين الإشارات أو الأشعة الحقيقية في حزمة الترميز. تُحلّل الفقرة التالية كشف الإشارات الرقمية متعددة القيم M-ary. إن العلاقات بين الشعاع والإشارة وبين الحقيقي والعُقدي هي ذاتها كما وردت آنفاً، ومن ثمَّ فإن كل من الفقرات التالية ستفرض أي تلك الحالات هي الأكثر دلالة دون نقاشات إضافية لهذه العلاقات.

4.8 كشف الإشارات الرقمية متعددة القيم M-ary وكشف السلسلة

كان التحليل في الفقرات السابقة محدوداً بطرائق متعددة. أولاً، تمَّت دراسة مجموعات إشارات إثنائية فقط، وثانياً، تمَّت دراسة مسألة "الطلقة الواحدة" فقط بيث مُفرد بدلاً من سلسلة من البتات. في هذه الفقرة، سندرس مجموعات إشارات رقمية متعددة القيم M-ary ولأجل قيم كيفية M ، وستُستخدم بعد ذلك لدراسة إرسال سلسلة من الإشارات ودراسة مخططات تعديل كفيّة.

1.4.8 كشف الإشارات الرقمية المتعددة القيم M-ary

إن الانتقال من اختبار الفرضيات الإثنائية إلى متعددة القيم هو توسعة بسيطة. وسيجري تحليل ذلك، على نحو مُحدّد، لحالة الشعاع العشوائي العُقدي. لتكن المشاهدة n - شعاع V عشوائي عُقدي، وليكن U n - شعاع عشوائي عُقدي يجب كشفه، يأخذ قيمة من المجموعة $\{a_0, \dots, a_{M-1}\}$ باحتمالات قَبلية p_0, \dots, p_{M-1} . نُدلُّ على الاحتمالات البعدية بـ $p_{U|V}(a_m|v)$. نختار قاعدة الاحتمال البُعدي الأعظمي MAP (انظر الفقرة 1.8) بعد ذلك $\tilde{U}(v) = \arg \max_m p_{U|V}(a_m|v)$. وبفرض أنه يمكن تمثيل الترجيحات على أنها كثافات احتمال $f_{U|V}$ ، يمكن التعبير عن قاعدة الاحتمال البُعدي الأعظمي MAP على الشكل التالي:

$$\tilde{U}(v) = \arg \max_m p_m f_{U|V}(a|v_m)$$

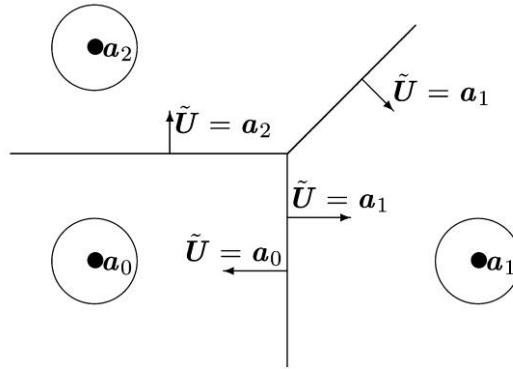
إن التوجه الأبسط لقاعدة M-ary هذه، يكون عادة باعتبارها مسائل اختبار فرضيات إثنائية متعددة. هذا يعني، أن $\tilde{U}(v)$ هي a_m بحيث

$$\Lambda_{m,m'}(v) = \frac{f_{U|V}(a|v_m)}{f_{U|V}(v|a_{m'})} \geq \frac{p_{m'}}{p_m}$$

لكل قيم m' . وفي حالة التساوي، ليس ثمة فرق أي فرضية من فرضيات تحقيق الحد الأقصى نختار. ولأجل حالة الشعاع العُقدي ذي الضجيج الغوسي الأبيض المضاف، يكون الرصد $V = U + Z$ حيث Z ضجيج غوسي عُقدي بمركبات (iid) حقيقية وتخيئية. وكما تم في (27.8)، فإن نسبة الترجيح اللوغارتمية (LLR) بين كل زوجين من الفرضيات a_m و $a_{m'}$ تُعطى بالعلاقة

$$(38.8) \quad \text{LLR}_{m,m'}(v) = \frac{-\|v - a_m\|^2 + \|v - a_{m'}\|^2}{N_0}$$

وبالتالي يفصل الاختبار الإثنائي فضاء الرصد¹²⁷ إلى منطقتين يفصلهما مُنصّف عمودي بين النقطتين. وبوجود M فرضية، يُفصل الفضاء إلى مناطق فورونوي Voronoi للنقاط الأقرب لكل من الإشارات (الفرضيات) (انظر الشكل 5.8). إن لم تكن الاحتمالات القَبلية متساوية، تُزاح هذه المنصفات العمودية، مع بقائها عمودية على المحور الذي يربط الإشارتين، لكنها لم تعد منصفات. تُعطي العلاقة (29.8) احتمال أن يحتوي الضجيج على الرصد عبر أحد هذه المنصفات المتعامدة.



الشكل 5.8: مناطق القرار لمبادئ M-ary لإشارات الأشعة (iid) في الضجيج الغوسي. وفي قاعدة الترجيح الأعظمي ML، تكون مناطق القرار هي مناطق Voronoi، هذا يعني مناطق مفصولة بمنصفات عمودية بين نقاط الإشارة.

المشكلة الجديدة الوحيدة التي تظهر في اختبار فرضيات M-ary هي أنّ احتمال الخطأ، بفرض $U = m$ ، هو اجتماع الأحداث $M - 1$ ، أي التي تقطع العمود الموافق للنقطة الأخرى. يمكن أن نجد تماماً بالمكاملة على فضاء شعاعي ذي n بُعداً، لكنّه عادة محصور في الأعلى، ويُقرَّب إلى حدّ الاجتماع، حيث يُجمع احتمال قطع كل عمود عبر الفرضيات غير الصحيحة $M - 1$. ويعتبر ذلك تقريباً جيداً (إن لم تكن M كبيرة جداً)، لأن الكثافة الغوسية تنقص كثيراً مع المسافة؛ لذا وفي حالة الترجيح الأعظمي تحدث معظم الأخطاء عندما

¹²⁷ لأجل فضاء شعاع عُقدي ذي n بُعداً، من الأبسط النظر إلى فضاء الرصد على أنه فضاء الشعاع الحقيقي المناظر ذي $2n$ بُعداً.

يُحصل الرصد تقريباً منتصف الطريق بين نقطة الإشارة المرسلَة المكشوفة.

2.4.8 الإرسالات المُتعاقبة لإشارات QAM في WGN

توسّع هذه الفقرة تحليل "الطلقة المفردة" لكشف التعديل المطالي الرباعي QAM والتعديل بمطال النبضة PAM بوجود ضجيج غوسي أبيض WGN، إلى الحالة التي تُرسل فيها n مجموعة رموز مستقلة مُتتابعة. سنجد أنه، وفي حالات متعددة، يمكن تحليل كل من قاعدة الكشف واحتمال خطأ الرمز بدراسة رمز واحد فقط في ذات اللحظة.

لندرس أولاً نظام QAM يستخدم نبضة تعديل $p(t)$. لنفرض أن لها طاقة واحدة وهي متعامدة مع انزياحاتها $\{p(t - kT); k \in \mathbb{Z}\}$ المتباعدة بمقدار T ، هذا يعني أن $\{p(t - kT); k \in \mathbb{Z}\}$ هي مجموعة من التوابع المتعامدة. ليكن $\mathcal{A} = \{a_0, \dots, a_{M-1}\}$ هو أبجدية إشارات دخل عُقدية، ولتُعَيّن موجة الدخل على n إشارة دخل مستقلة مُتتابعة كيفية كما يلي:

$$u(t) = \sum_{k=1}^n u_k p(t - kT)$$

بحيث يكون انتقاء كل قيمة ل u_k من أبجدية الدخل \mathcal{A} .

لتكن $\{\phi_k(t); k \geq 1\}$ أساساً مُتعامداً لشكل موجات عُقدية \mathcal{L}_2 بحيث تُعطي أول n موجة في ذلك الأساس بالعلاقة $\phi_k(t) = p(t - kT), \leq k \leq n$ عندها تكون إشارة حزمة القاعدة المُستقبلية:

$$(39.8) \quad V(t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k \phi_k(t) = \sum_{k=1}^n (u_k + Z_k) p(t - kT) + \sum_{k>n} Z_k \phi_k(t)$$

نحن الآن نقارن بين طريقتي كشف مختلفتين. في الأولى، يُتخذ القرار وفق قاعدة الترجيح الأعظمي ML من بين M^n فرضية لكل القيم المشتركة U_1, \dots, U_n اعتماداً على $V(t)$. وفي الطريقة الثانية، ومن أجل كل k حيث $1 \leq k \leq n$ يُتخذ قرار من بين M فرضية مُتحملة a_0, \dots, a_{M-1} لمدخل U_k اعتماداً على الرصد $V(t)$. ومن ثمّ، ففي هذه الطريقة يتمّ اتخاذ n قراراً منفصلاً، واحد لكل من الـ n دخلاً المتعاقبة.

فيما يتعلق بالبدل الأول، توافق كل فرضية لشعاع ذي n من مجموعة الدخل $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$. وكما هو الحال في الفقرة 5.3.8، يمكن أخذ قيمة العينة $v(t) = \sum_k v_k \phi_k(t)$ من موجة الدخل على اعتبارها مجموعة $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_\ell)^T$ بحيث $\ell \geq n$. يُعطي الترجيح الشرطي على \mathbf{u} بالعلاقة:

$$f_{V|\mathbf{U}}(\mathbf{v}|\mathbf{u}) = \prod_{k=1}^n f_Z(v_k - u_k) \prod_{k=n+1}^{\ell} f_Z(u_k)$$

ومن أجل أي فرضيتين، لنقل $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$ و $\mathbf{u}' = (u'_1, \dots, u'_n)^T$ ، تكون نسبة الترجيح ونسبة الترجيح اللوغارتمية:

$$(40.8) \quad \Lambda_{\mathbf{u}, \mathbf{u}'}(\mathbf{v}) = \prod_{k=1}^n \frac{f_Z(v_k - u_k)}{f_Z(v_k - u'_k)}$$

$$(41.8) \quad \text{LLR}_{\mathbf{u}, \mathbf{u}'}(\mathbf{v}) = \frac{-\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v} - \mathbf{u}'\|^2}{N_0}$$

لاحظ أنه من أجل $k > n$ فإن v_k لا تظهر في علاقة نسبة الرجيح هذه. وبالتالي تبقى هذه العلاقة صالحة¹²⁸ ضمن الحد $\ell \rightarrow \infty$ ، أما العناصر ذات الصلة بالقرار فهي v_1, \dots, v_n . ومن ثمّ فسنعتبر أن $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_\ell)^T$ فيما سيلي. نلاحظ من العلاقة (41.8)، أن نسبة الترجيح تكون موجبة فقط إذا كانت $\|\mathbf{v} - \mathbf{u}'\| < \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$. نلخص إلى أنه، ومن أجل M^n -ary عملية كشف، تمّت على نحو مشترك على u_1, \dots, u_n ، فإن قرار الترجيح الأعظمي ML هو الشعاع \mathbf{u} الذي يُصغّر المسافة $\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$ إلى الحد الأدنى.

¹²⁸ في الحقيقة، ليس من الضروري أن تكون العناصر $\ell - n$ مستقلة أو موزعة بانتظام، يكفي فقط أن تكون مستقلة عن الإشارات والضجيج من أجل $1 \leq k \leq n$.

لنرى كيف تُصغَّر $\|v - u\|$ إلى الحد الأدنى. لاحظ أنّ

$$(42.8) \quad \|v - u\|^2 = \sum_{k=1}^n (v_k - u_k)^2$$

لنفرض أنّ $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ تُصغَّر المجموع إلى الحد الأدنى. وبالتالي ولأجل كل k ، يُختزل العلاقة $(v_k - u_k)^2$ ، ضمن الخيارات M ، إلى u_k (أو يمكن استبدال \tilde{u}_k بـ $a_m \neq \tilde{u}_k$ ليقلل $(v_k - u_k)^2$)، وبالتالي يُخفّض المجموع في (42.8). ومن ثمّ فإن كاشف تسلسل الترجيح الأعظمي ML بوجود M^n فرضية، يكشف كل U_k بتصغير الحد $(v_k - u_k)^2$ على M فرضية إلى U_k . لندرس الآن الخيار الثاني. من أجل رصد عيّنة مُعطى $v = v_1, \dots, v_\ell$ وكذلك k ، حيث $1 \leq k \leq n$ فإن الترجيح لـ v شرطياً على $U_k = u_k$ يُصبح

$$f_{V|U_k}(v|u_k) = f_Z(v_k - u_k) \prod_{j \neq k, 1 \leq j \leq n} f_{V_j}(v_j) \prod_{j=n+1}^{\ell} f_Z(v_j)$$

حيث $f_{V_j}(v_j) = \sum_m p_m f_{V_j|U_j}(v_j|a_m)$ هو الاحتمال الحدّي لـ V_j . وتصبح نسبة الترجيح لـ v بين $U_k = a_m$ و $U_{k'} = a_{m'}$ هي:

$$\Lambda_{m,m'}^{(k)}(v) = \frac{f_Z(v_k - a_m)}{f_Z(v_k - a_{m'})}$$

وهذه هي مسألة كشف الإشارات غير المتعاكسة القطبية ذات التوزع الغوسي وحيدة البعد المألوفة، وعلى الترجيح الأعظمي ML أن يختار \tilde{u}_k بوصفها القيمة a_m الأقرب إلى u_k . ومن ثمّ، وبفرض أن رصد العينة هو $v(t)$ ، فإن الشعاع $(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)^T$ لكل كاشف M -ary منفصل بطريقة الترشيح الأعظمي، ولكل U_k هو ذاته كاشف M^n -ary بطريقة تسلسل الترجيح الأعظمي على السلسلة $U = (U_1, \dots, U_n)^T$. إضافة إلى أن كلاً من هذه الكواشف تكافئ شعاع قرارات ترجيح أعظمي على كل U_k اعتماداً فقط على الرصد V_k . بالنتيجة، أثبتنا صحة النظرية التالية:

نظرية 1.4.8. لتكن $U(t) = \sum_{k=1}^n U_k p(t - kT)$ هي دخل حزمة قاعدية QAM (أو PAM) إلى قناة ضجيج غوسي أبيض WGN ولنفرض أنّ $\{p(t - nT); 1 \leq k \leq n\}$ هي سلسلة متعامدة. وبالتالي فإن اتخاذ قرار M^n -ary بطريقة تسلسل الترجيح الأعظمي على السلسلة $U = (U_1, \dots, U_n)^T$ يُكافئ اتخاذ قرارات M -ary منفصلة بطريقة الترشيح الأعظمي، ولكل U_k حيث $1 \leq k \leq n$ ، حيث يُمكن أن يعتمد القرار لكل U_k إما على الرصد $v(t)$ أو على الرصد v_k .

لاحظ أنّ النظرية أوضحت أنّ القرار قد اتُّخذ لكل من الكشف المتسلسل والكشف المنفصل لكل إشارة. ولم تُقل أن احتمال الخطأ ضمن السلسلة هو ذاته لإشارة وحيدة. إذا اعتبرنا P هو احتمال الخطأ ضمن إشارة وحيدة، فإن احتمال الخطأ للسلسلة هو $1 - (1 - P)^n$.

لا تُقدّم النظرية أية مزاعم عن احتمالات المدخلات المتعاقبة، مع أنّ استخدام الكشف بطريقة الترجيح الأعظمي لا يُصغّر احتمال الخطأ إذا لم تكن المدخلات مُستقلة ومتوقعة. إذا استُخدم الترميز بين إشارات الدخل n ، فلن تكون كافة عناصر هذه المجموعة M^n مُتاحة. في هذه الحالة، يكون الكشف بطريقة الترجيح الأعظمي لسلسلة مُحتملة الترميز (على نحو مغاير لكل سلاسل M^n) مختلفاً عن الكشف المنفصل لكل إشارة. كمثال على ذلك، إذا كان المرسل يُكرّر كل إشارة على نحو مستمرّ، أي $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = \dots$ إلخ، وجب أن يعتمد كشف u_1 على كل من v_1 و v_2 . وبطريقة مماثلة، فإن كشف u_3 يجب أن يعتمد على كل من v_3 و v_4 ، وهكذا.

عند استعمال الترميز، من الممكن اتخاذ قرارات بطريقة الترجيح الأعظمي على كل إشارة لوحدها، ومن ثمّ نستخدم ضوابط الترميز لتصحيح الأخطاء في السلسلة المكشوفة. تُسمى قرارات الإشارات الإفرادية القرارات الصلبة. من الممكن أيضاً، ولكل k ، حفظ إحصائية كافية (مثل v_k) لاتخاذ القرار على U_k . وهذا يسمى القرار اللين إذ إنّها تحفظ كافة المعلومات ذات الصلة المطلوبة لاتخاذ قرار الترجيح الأعظمي بين مجموعة كلمات الترميز الممكنة. وبما أنّ قرار الترجيح الأعظمي ML بين السلاسل المرترزة يُقلّل احتمال الخطأ إلى الحد الأدنى (بفرض وجود كلمات ترميز متساوية الاحتمال)، فإنّ القرارات اللينة تسمح باحتمالات خطأ أقل من القرارات الصلبة.

يمكن توسعة النظرية 1.4.8 لتشمل الكشف بقاعدة الاحتمال البعدي الأعظمي إذا كانت إشارات الدخل مستقلة إحصائياً عن بعضها (انظر التمرين 15.8). يمكننا مشاهدة ذلك ببساطة برسم حدود القرار لحالة حقيقة ثنائية الأبعاد؛ سنرى أن حدود القرار هذه هي خطوط أفقية وعمودية.

ثمّة طريقة ذكية لتفسير النظرية 1.4.8 تتلخص في ملاحظة أن كشف كل إشارة U_k يعتمد فقط على الإشارة المستقبلية المطابقة (المناظرة) V_k ؛ جميع مركبات الشعاع المستقبل الأخرى ليست ذات علاقة باتخاذ القرار حول U_k . تُعمّم الفقرة التالية مسألة الكشف من QAM إلى نُظْم تعديل كيفية، كما تُعمّم فكرة اللاأهمية.

3.4.8 الكشف في نظم التعديل الكيفية

ركّزت الفقرات السابقة على كشف أنظمة التعديل PAM و QAM، باستخدام فرضيات حقيقية $\mathcal{A} = \{a_0, \dots, a_{M-1}\}$ للتعديل PAM وفرضيات عقدية $\mathcal{A} = a_0, \dots, a_{M-1}$ للتعديل QAM. في كل حالة، تُعدّل كل سلسلة إشارات $\{u_k; k \in \mathbb{Z}\}$ من \mathcal{A} إلى موجة قاعدية $u(t) = \sum_k u_k p(t - kT)$. بعد ذلك، إما تُرسل الموجة PAM أو تُعدّل أولاً إلى حزمة المرور. أما موجة QAM العقدية فمن الضروري تعديلها إلى موجة حزمة التمرير. سنقوم بتعميم ذلك باعتبار مجموعة \mathcal{A} وحيدة لتكون أبجدية الـ M -ary، $\{a_0, \dots, a_{M-1}\}$ لـ n مجموعة حقيقية. وبالتالي تكون كل a_m هي عنصر من \mathbb{R}^n . تُعطى مركبات شعاع الإشارة ذي التسلسل m بالعلاقة $a_m = (a_{m,1}, \dots, a_{m,n})^T$. يُعدل شعاع الإشارة المتتقي a_m إلى موجة إشارة $b_m(t) = \sum_{k=1}^n a_{m,k} \phi_k(t)$ حيث $\{\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)\}$ هي مجموعة موجات متعامدة عددها n .

يزوّدنا ما ورد آنفاً بسيناريو عام لتمثيل الرموز من 0 إلى $M-1$ بمجموعة موجات إشارة $b_{M-1}(t)$ إلى $b_0(t)$. يجب اتخاذ تدابير لإرسال سلسلة من مثل هذه الرموز الـ M -ary. إذا أردنا إرسال هذه الرموز بفواصل زمنية T ، فإن الطريقة الأكثر مباشرة لتحقيق ذلك هو اختيار أشكال الموجة المتعامدة $\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)$ بطريقة يكون فيها $\phi_k(t - \ell T)$ و $\phi_j(t - \ell' T)$ متعامدين لكل قيم j و k حيث $1 \leq j, k \leq n$ وكل القيم الصحيحة ℓ, ℓ' . في هذه الحالة، يُمكن لسلسلة من الرموز، ولتكن s_1, s_2, \dots ، أخذ كلٌّ منها من الأبجدية $0, \dots, M-1$ ، أن تُقابل إلى سلسلة من أشكال الموجة $b_{s_1}(t), b_{s_2}(t - T), \dots$ وسيكون شكل الموجة المرسل $\sum_{\ell} b_{s_{\ell}}(t - \ell T)$.

يُعدّ التعديل PAM حالة خاصة من هذا السيناريو حيث يكون البعد n يساوي 1. التابع $\phi_1(t)$ في هذه الحالة هو نبضة التعديل الحقيقية $p(t)$ لإرسال حزمة القاعدة، و $\sqrt{2}p(t)\cos(2\pi f_c t)$ لإرسال حزمة التمرير. أما QAM فهي حالة خاصة أخرى فيها n تساوي 2 في حزمة التمرير. في هذه الحالة، يُنظر إلى الإشارات العقدية a_m على أنها إشارات حقيقية. أشكال الموجات المتعامدة (بفرض $p(t)$ حقيقية) هي $\phi_1(t) = \sqrt{2}p(t)\cos(2\pi f_c t)$ و $\phi_2(t) = \sqrt{2}p(t)\sin(2\pi f_c t)$.

وعلى نحو أعمّ، ليس من الضروري أن نبدأ من حزمة قاعدة ومن ثمّ نُزيح إلى حزمة التمرير¹²⁹، وليس من الضروري إرسال الإشارات المتعاقبة مع إزاحة الزمن لمجموعة الإشارة الأساسية. على سبيل المثال، في نظم القفز الترددي، يمكن تعديل الإشارات المتعاقبة ذات n بعداً بتدرجات حامل مختلفة. المهم هو أن تكون جميع الإشارات المرسل والمتعاقبة متعامدة مع بعضها.

ليكن $X(t)$ أول إشارة في هذه السلسلة من الإشارات المتعاقبة. ومن ثمّ فإن $X(t)$ هو خيار من مجموعة مؤلفة من M إشارة، $b_0(t), \dots, b_{M-1}(t)$. يمكننا تمثيل $X(t)$ على النحو التالي:

من أجل الفرضية m يكون $X_k = a_{m,k}$ من أجل $1 \leq k \leq n$. لتكن $\phi_{n+1}(t), \phi_{n+2}(t), \dots$ مجموعة إضافية من التتابع المتعامدة بحيث تمتد المجموعة $\{\phi_k(t); k \geq 1\}$ كاملة على فضاء الموجات الحقيقية L_2 . وقد تتضمن السلسلة الجزئية $\phi_{n+1}(t), \phi_{n+2}(t), \dots$ انزياحات الزمن المتعاقبة للموجات $\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)$ للمثال آنف الذكر، ولكنها بالعموم يمكن أن تكون كيفية. فرضنا، على أية حال، أن الإشارات المتعاقبة مُتعامدة مع $\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)$ ، وبالتالي يمكن أن تُمدّد إلى السلسلة $\phi_{n+1}(t), \phi_{n+2}(t), \dots$. سنفرض أن شكل الموجة العشوائي المستقبل $Y(t)$ هو مجموع كل من $X(t)$ والضجيج الغوسي الأبيض $Z(t)$ ، وأشكال موجات غير X . قد تتضمن الموجات الأخرى هذه، إشارات مُتعاقبة من دخل القناة المعطاة، إضافة إلى إشارات من مستخدمين آخرين. يمكن للمجموع أن

قد يبدو غريباً في البدء أن حالة الشعاع الحقيقي وشكل الموجة الحقيقي هنا هما أكثر عموماً من الحالة العقدية، لكن الحالة العقدية تستخدم لتبسيط الرموز والمحتوى في 129 حزمة القاعدة، حيث سيُعدّل شكل موجة حزمة القاعدة إلى حزمة التمرير ويُحوّل إلى شكل موجة حقيقي.

يتمدد إلى رقم كفي كبير، وليكن ℓ ، من هذه التوابع المتعامدة، من مثل:

$$(43.8) \quad Y(t) = \sum_{k=1}^{\ell} Y_k \phi_k(t) = \sum_{k=1}^n (X_k + Z_k) \phi_k(t) + \sum_{k=n+1}^{\ell} Y_k \phi_k(t)$$

لاحظ أن في العلاقة (43.8) توصف العملية العشوائية $\{(t); t \in \mathbb{R}\}$ المتغيرات العشوائية Y_1, \dots, Y_ℓ . بفرض أن موجات العينة من $Y(t)$ هي L_2 ، يتبع ذلك أيضاً أن نهاية Y_1, \dots, Y_ℓ عندما $\ell \rightarrow 0$ تُحدّد $Y(t)$ ضمن مفهوم L_2 . وبالتالي فنحن نعتبر أن Y_1, \dots, Y_ℓ هي الرصد في خرج القناة. من المناسب فصل هذه المصطلحات إلى شعاعين $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ و $\mathbf{Y}' = (Y_{n+1}, \dots, Y_\ell)^T$. وبطريقة مشابهة يمكن تمثيل الضجيج الغوسي الأبيض WGN $Z(t) = \sum_k Z_k \phi_k(t)$ بالشعاعين $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)^T$ و $\mathbf{Z}' = (Z_{n+1}, \dots, Z_\ell)^T$ كما يمكن تمثيل $X(t)$ على أنها $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$. أخيراً، ليكن $V(t) = \sum_k V_k \phi_k(t)$ هو المساهمة من المستخدمين الآخرين والإشارات المتعاقبة من المستخدم المعطى. وبما أن هذه البنود متعامدة مع $\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)$ ، يمكن تمثيل $V(t)$ بالشعاع $\mathbf{V}' = (V_{n+1}, \dots, V_\ell)^T$. مع هذه التغيرات تصبح العلاقة (43.8) كما يلي:

$$(44.8) \quad \mathbf{Y}' = \mathbf{Z}' + \mathbf{V}' \quad ; \quad \mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{Z}$$

يكون الرصد هو قيمة العينة من $(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}')$ ، وعلى الكاشف أن يختار قيمة الاحتمال البعدي الأعظمي MAP لـ \mathbf{X} . بفرض أن $\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Z}'$ و \mathbf{V}' مُستقلة إحصائياً، يمكن التعبير عن الترجيح بالعلاقة:

$$f_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}'|\mathbf{X}}(\mathbf{y}\mathbf{y}'|\mathbf{a}_m) = f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{y} - \mathbf{a}_m) f_{\mathbf{Y}'}(\mathbf{y}')$$

و تُعطى نسبة الترجيح بين الفرضيتين \mathbf{a}_m و $\mathbf{a}_{m'}$ بالعلاقة:

$$(45.8) \quad \Lambda_{m,m'}(\mathbf{y}) = \frac{f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{y} - \mathbf{a}_m)}{f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{y} - \mathbf{a}_{m'})}$$

المهم هنا هو أن كل نسب الترجيح لأجل $(0 \leq m, m' \leq M - 1)$ تعتمد فقط على \mathbf{Y} وبالتالي فإن \mathbf{Y} هي الإحصائية الكافية لقرار الاحتمال البعدي الأعظمي على \mathbf{X} . أما \mathbf{Y}' فليس لها علاقة بالقرار، ومن ثمّ فكثافة الاحتمال لها ليست ذات صلة (إلا الحاجة لفرض أن \mathbf{Y}' مستقلة إحصائياً عن (\mathbf{X}, \mathbf{Z})). كما يُبيّن أن حجم ℓ ليس ذا علاقة أيضاً. النظرية التالية تُلخص هذا (و تُعمّمه على نحو بسيط بإسقاط فرضية الضجيج الغوسي).

نظرية 2.4.8 (نظرية اللاهومية): لتكن $\{\phi_k(t); k \geq 1\}$ مجموعة من التوابع الحقيقية المتعامدة. ولتكن $X(t) = \sum_{k=1}^n X_k \phi_k(t)$ و $Z(t) = \sum_{k=1}^n Z_k \phi_k(t)$ هما دخل القناة والضجيج المرافق على التوالي، حيث $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ و $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)^T$ هما شعاعان عشوائيان. وليكن $Y'(t) = \sum_{k>n} Y_k \phi_k(t)$ حيث ولأجل كل $\ell > n$ يكون $\mathbf{Y}' = (Y_{n+1}, \dots, Y_\ell)^T$ شعاعاً عشوائياً مُستقلاً إحصائياً عن الزوج \mathbf{X} و \mathbf{Z} . وليكن $\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{Z}$. ومن ثمّ فإن نسبة الترجيح اللوغارتمية LLR والاحتمال البعدي الأعظمي MAP لكشف \mathbf{X} من رصد كل من \mathbf{Y}, \mathbf{Y}' يعتمد فقط على \mathbf{Y} . أي أن قيمة عينة \mathbf{Y}' المرصودة ليست ذات صلة.

تبدو المجموعة المتعامدة $\{\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)\}$ التي تمّ اختيارها أنفاً ذات أهمية مركزية أكثر مما هي عليه. المهم هو وجود قضاء ثانوي ذي n بعداً للجزء الحقيقي من L_2 يحتوي على مجموعة الإشارة وله خاصية أن الضجيج والإشارات متعامدة مع هذا الفضاء الثانوي، وهي أيضاً مستقلة عن الإشارة والضجيج ضمن الفضاء الثانوي. في الحالة العادية، نختار هذا الفضاء الثانوي ليكون الفضاء الذي تمتد عليه مجموعة الإشارة، لكن ثمة حالات يجب أن يكون فيها الفضاء الثانوي أكبر نوعاً ما ليوفّر الاستقلالية بين الفضاء الثانوي ومُتمّمه.

لا توصف نظرية اللاهومية كيف تتخذ قراراً في قاعدة الاحتمال البعدي الأعظمي MAP اعتماداً على شكل الموجة المرصود، لكنها ترينا كيف نُقلص المسألة إلى مسألة منتهية الأبعاد. وبما أن نسبة الترجيح تُوصّف كلاً من مناطق القرار واحتمال الخطأ في الكشف بطريقة الاحتمال البعدي الأعظمي، فمن الواضح أن اختيار المجموعة المتعامدة لا يمكن أن يؤثر على احتمال الخطأ أو على مقابلة الموجات المستقبلية مع الفرضيات.

ثمّة شرط هام في التحليل الأنف الذكر، وهو أن كلاً من الضجيج والتداخل (من الإرسالات المتعاقبة ومن المستخدمين الآخرين)

جمعي. الشرط الثاني الهام هو أن التداخل عمودي على الإشارة $X(t)$ وهو أيضاً مستقلاً إحصائياً عن $X(t)$. والتعامدية هي السبب في أن $Y = X + Z$ ، دون مساهمة التداخل في ذلك. إن الاستقلال الإحصائي هو الذي يجعل Y' غير ذي علاقة.

إذا كان التداخل متعامداً ولكن ليس مستقلاً، عندها يمكن اتخاذ قرار الاحتمال البعدي الأعظمي MAP المعتمد على Y فقط. إلا أن احتمال الخطأ الناتج سيكون أكبر من أو يساوي لقرار الاحتمال البعدي الأعظمي MAP المعتمد على $\{Y, Y'\}$. وبالتالي فإن الاستقلالية تسمح عموماً بإنقاص احتمال الخطأ.

من جهة ثانية، إذا لم يكن التداخل متعامداً لكنه مستقل، يمكن لـ Y عندها أن يحتوي على ضجيج ومساهمة من التداخل، ومن ثم سيكون احتمال الخطأ أكبر، لكن ليس أصغر أبداً، من الحالة المتعامدة. وكقاعدة أساسية، يميل التداخل غير المتعامد إلى زيادة احتمال الخطأ، بينما تنزع الاستقلالية (إذا استغلها المستقبل) إلى تخفيض احتمال الخطأ.

إذا جرى تعديل الإشارات المتعاقبة X_1, X_2, \dots المستقلة إحصائياً إلى مجموعات محددة من موجات متعامدة (أي، إذا عُدلت X_1 إلى موجات متعامدة من $\phi_1(t)$ إلى $\phi_n(t)$ ، وعدلت X_2 إلى موجات من $\phi_{n+1}(t)$ إلى $\phi_{2n}(t)$ ، الخ...) يتبع ذلك، كما في الفقرة 2.4.8، أن الكشف بالترجيح الأعظمي على السلسلة X_1, \dots, X_ℓ يكافئ قرارات ترجيح أعظمي ML منفصلة على كل إشارة دخل X_j حيث $1 \leq j \leq \ell$. تم حذف التفاصيل لأن السمة الوحيدة في هذا التوسّع هو رموز أكثر تعقيداً.

إن التمثيل الأكثر تعقيداً الذي سُمح به في هذه الفقرة يُسمى أحياناً *ترميز القناة*، وأحياناً ينظر له ببساطة على أنه صيغ تعديل أكثر تعقيداً. إن حقل الترميز واسع جداً، لكن الفقرات التالية توفر مقدمة.

5.8 مجموعات الإشارات المتعامدة وترميز القناة

إن مجموعة الإشارات المتعامدة هي مجموعة $a_0(t), \dots, a_{M-1}(t)$ مؤلفة من عدد M من أشعة حقيقية متعامدة، لكل منها الطاقة E ذاتها. وبدون خسارة في التعميم، نختار أساساً لـ \mathbb{R}^M فيه الشعاع الأساس ذو الترتيب m ، هو \mathbf{a}_m/\sqrt{E} . في هذا الأساس يكون $\mathbf{a}_0 = (\sqrt{E}, 0, 0, \dots, 0)^T$ و $\mathbf{a}_1 = (0, \sqrt{E}, 0, \dots, 0)^T$ ، وهكذا. تُمثّل عملية تعديل مجموعة متعامدة $\{\phi_m(t)\}$ من الإشارات بعددٍ الفرضية \mathbf{a}_m ($0 \leq m \leq M-1$) بالإشارة $\sqrt{E}\phi_m(t)$. بعد إضافة الضجيج الغوسي الأبيض WGN، تُصبح الإحصائية الكافية للكشف هي قيمة عينة y من $Y = X + Z$ حيث تأخذ A القيم a_0, \dots, a_{M-1} باحتمالات متساوية و يكون لـ $Z = (Z_0, \dots, Z_{M-1})^T$ مركبات مستقلة وموزعة بانتظام (iid) من الشكل $\mathcal{N}(0, N_0/2)$. يمكن ملاحظة أن قرار الترجيح الأعظمي ML هو في إقرار القيمة m التي يكون عندها y_m أعظماً.

إن الحالة الأكثر أهمية في الإشارات المتعامدة هي حين يكون لـ M الأس 2، لنقل، $M = 2^b$. وبالتالي يمكن استخدام مجموعة الإشارة لإرسال b رقماً إثنائياً، وتكون الطاقة في البت $E_b = E/b$. إن عدد المركبات المتعامدة المطلوب لمجموعة الإشارة هو $M = 2^b$ ، وبالتالي يكون المردود الطيفي ρ (عدد البتات في كل زوج من المركبات المتعامدة) $\rho = b/2^{b-1}$. ومع ازدياد قيمة b تصغر ρ بمعدّل أسّي تقريباً. وسنرى، على أية حال، أنه ومن أجل قيم كبيرة لـ E_b ، وفيما b تكبّر محافظةً على E_b ثابتة، ينتهي احتمال الخطأ ML إلى 0. وعلى نحو خاص، ولأجل أي $0.693 = \ln 2 < E_b/N_0$ ، ينتهي احتمال الخطأ إلى الصفر على نحو أسّي فيما $b \rightarrow \infty$. تذكر أن $\ln 2 = 0.693$ ، أي -1.59 dB، هو حدّ شانون للاتصال الموثوق في قناة ضجيج غوسي أبيض WGN بعرض حزمة لانهاضي. وعليه، سيرهن الاستنتاج التالي نظرية شانون لقناة ضجيج غوسي أبيض WGN بعرض حزمة لانهاضي. وقبل ذلك، سنناقش نوعين من مجموعات الإشارة ذات صلة وثيقة بذلك.

1.5.8 مجموعات الإشارة البسيطة (المفردة)

سندرس الشعاع العشوائي A الذي له قيم عينات a_0, \dots, a_{M-1} متساوية الاحتمال كما وصفنا سابقاً. عندها تكون القيمة المتوسطة لـ

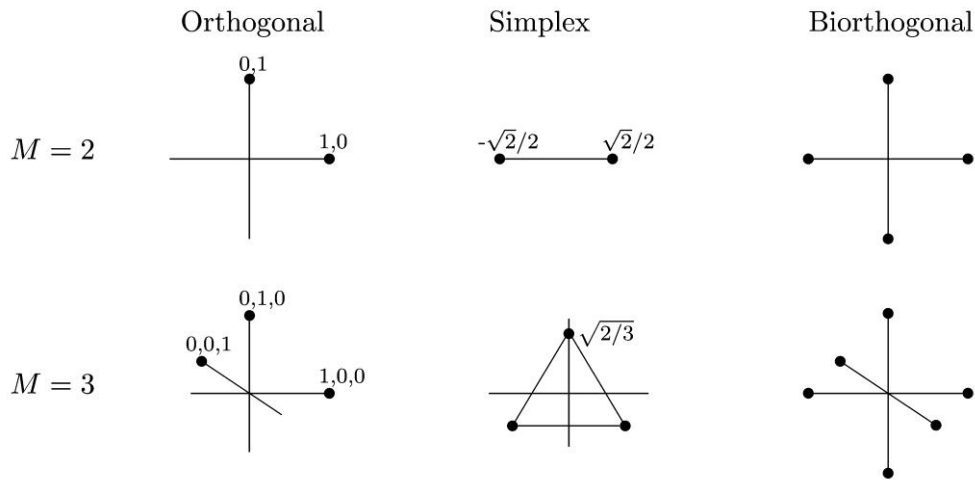
A

$$\bar{A} = \left(\frac{\sqrt{E}}{M}, \frac{\sqrt{E}}{M}, \dots, \frac{\sqrt{E}}{M} \right)^T$$

رأينا أنه إذا أزيحت مجموعة الإشارة بشعاع ثابت، فإن مناطق كشف فوريونوي (Voronoi) تُزاح أيضاً ويبقى احتمال الخطأ ذاته. لكن مثل هذا الانزياح يمكن أن يُغيّر الطاقة المتوقعة لشعاع الإشارة العشوائي. وعلى نحو خاص، إذا أزيحت الإشارات لإزالة الوسطي، تنخفض عندها طاقة الإشارة بمقدار طاقة الوسطي (مرّبع المعدّل). في هذه الحالة، تصبح طاقة الوسطي E/M . مجموعة الإشارة البسيطة هي مجموعة إشارة متعامدة حذف منها الوسطي. أي:

$$S = A - \bar{A}; \quad s_m = a_m - \bar{A}; \quad 0 \leq m \leq M - 1$$

بكلمات أخرى، تكون المركبة m من s_m هي $\sqrt{E}(1 - 1/M)$ وتكون كل مركبة بالتناوب هي \sqrt{E}/M . لكل إشارة بسيطة طاقة مقدارها $E(1 - 1/M)$ ، ومن ثمّ فإن مجموعة الإشارة نفس احتمال الخطأ للمجموعة المتعامدة ذات الصلة، لكنها تتطلب طاقة أقل بمعدّل $(1 - 1/M)$. لمجموعة الإشارة من الحجم $M, M-1$ يُعدّ، كما يُمكن ملاحظته من حقيقة أن مجموع كافة الإشارات يساوي الصفر، وبالتالي فالإشارات مستقلة خطياً. يبين الشكل 6.8 المجموعات المتعامدة والبسيطة لأجل $M = 2, 3$. من أجل قيم M صغيرة تبدي المجموعة البسيطة تحسناً كبيراً على المجموعة المتعامدة. فعلى سبيل المثال، من أجل $M = 2$ نحصل على 3 dB تحسناً في الطاقة (إنها ببساطة المجموعة المتعاكسة القطبية وحيدة البعد). كما أنها تستعمل نصف أبعاد المجموعة المتعامدة. إلا أنه ولأجل قيم M كبيرة، يصبح التحسّن مهماً.



الشكل 6.8: مجموعة إشارات متعامدة، وبسيطة، وثنائية التعامد، مُستنتظمة إلى وحدة الطاقة.

2.5.8 المجموعات ثنائية التعامد

إذا كانت a_0, \dots, a_{M-1} مجموعة إشارات متعامدة، نسمّي مجموعة الإشارات $2M$ المؤلفة من $\pm a_0, \dots, \pm a_{M-1}$ مجموعة إشارات ثنائية

التعامد. يبيّن الشكل 6.8 أمثلة عن مجموعات إشارة ثنائية التعامد ذات بعدين وذات ثلاثة أبعاد.

يمكن أن نبين وبنفس طريقة البرهان المستخدمة في مجموعات الإشارات المتعامدة، أن قاعدة الكشف بطريقة الترجيح الأعظمي ML لمثل تلك المجموعة هي أن نختار أولاً البعد m الذي من أجله تصبح $|y_m|$ أعظمياً، بعدها نختار a_m أو $-a_m$ بحسب إذا كانت y_m موجبة أم سالبة. لكل من مجموعات الإشارات المتعامدة والإشارات البسيطة خاصية أن كل إشارة متساوية البعد عن كافة الإشارات الأخرى. أما في مجموعات الإشارة ثنائية التعامد، فإن كل إشارة متساوية البعد عن كافة الإشارات الأخرى عدا واحدة. الاستثناء الوحيد للإشارة a_m

هو a_m -.

تحتوي مجموعة الإشارات ثنائية التعامد ذات البعد M على ضعفي الإشارات في المجموعة المتعامدة (وبالتالي إرسال بت إضافي واحد لكل إشارة)، لكن لها نفس المسافة الدنيا بين الإشارات. من الصعب أن نتخيّل¹³⁰ وجود حالة تُفضّل فيها مجموعة إشارات متعامدة على مجموعة إشارات ثنائية التعامد، إذ إننا نحصل على بت إضافي واحد في الإشارة دون كلفة. لكن، ولأجل البرهان المحدّد التالي، سيتمّ استخدام مجموعة متعامدة إذ إنها أسهل للمعالجة تحليلياً. مع ازدياد قيم M كثيراً، تصبح ميّزة الإشارات ثنائية التعامد أصغر، ولهذا تبدو الطريقتان، على نحو تقريبي، متكافئتين.

3.5.8 احتمال الخطأ لمجموعات الإشارة المتعامدة

بما أن الإشارات تختلف فقط بترتيب الإحداثيات، لا يعتمد احتمال الخطأ على أية إشارة أرسلت؛ إذ $\Pr(e) = \Pr(e | \mathbf{A} = \mathbf{a}_0)$. وبشرط $\mathbf{A} = \mathbf{a}_0$ ، يكون Y_0 هو $\mathcal{N}(\sqrt{E}, N_0/2)$ و Y_m هو $\mathcal{N}(0, N_0/2)$ وذلك لأجل $1 \leq m \leq M-1$. لاحظ أنه إذا كان $\mathbf{A} = \mathbf{a}_0$ وكان $Y_0 = y_0$ ، عندها يحدث الخطأ إذا كان $Y_m \geq y_0$ من أجل أي قيمة لـ m حيث $1 \leq m \leq M-1$ وبالتالي

$$(46.8) \quad \Pr(e) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_0|\mathbf{A}}(y_0 | \mathbf{a}_0) \Pr\left(\bigcup_{m=1}^{M-1} (Y_m \geq y_0 | \mathbf{A} = \mathbf{a}_0)\right) dy_0$$

يمكن تبسيط استنتاج $\Pr(e)$ ، وأدائه المقارب عندما تصبح M أكبر، إذا استنظمنا المخرجات إلى $W_m = Y_m \sqrt{2/N_0}$ عندها، وبشرط أن تكون الإشارة \mathbf{a}_0 مُرسلة، تُصبح $W_0 = \mathcal{N}(\sqrt{2E/N_0}, 1) = \mathcal{N}(\alpha, 1)$ ، حيث α هي اختصار للحد: $\sqrt{2E/N_0}$. وبشرط $\mathbf{A} = \mathbf{a}_0$ تُصبح $W_m \sim \mathcal{N}(0, 1)$ وذلك من أجل $1 \leq m \leq M-1$.

$$(47.8) \quad \Pr(e) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{W_0|\mathbf{A}}(w_0 | \mathbf{a}_0) \Pr\left(\bigcup_{m=1}^{M-1} (W_m \geq w_0 | \mathbf{A} = \mathbf{a}_0)\right) dw_0$$

باستخدام حدّ عملية الاتحاد على الاجتماع الآنف ذكره نجد:

$$(48.8) \quad \Pr\left(\bigcup_{m=1}^{M-1} (W_m \geq w_0 | \mathbf{A} = \mathbf{a}_0)\right) \leq (M-1)Q(w_0)$$

إن حدّ الاجتماع مقبّد جداً عندما يُطبّق على كميات مستقلة لها احتمال إجمالي صغير. وبالتالي سيكون هذا الحد مقبّداً جداً عندما تكون w_0 كبيرة وتكون M ليست كبيرة جداً. عندما تكون w_0 صغيرة، يصبح الحد غير مُحكّم. على سبيل المثال، من أجل $w_0 = 0$ ، $Q(w_0) = 1/2$ فإن الحدّ في العلاقة (48.8) هو $(M-1)/2$ ، أكبر بكثير من قيمة الحد 1 لأي احتمال. بالتالي، في التحليل اللاحق، سيتمّ تحديد الجانب الأيسر من العلاقة (48.8) من الأعلى بواحد لقيم صغيرة لـ w_0 ، ويمكن اختيار نقطة التقسيم γ بين الصغير والكبير كفيلاً. لقد تمّ اختيارها فيما سيلي لتتحقق:

$$(49.8) \quad \exp(-\gamma^2/2) = 1; \quad \gamma = \sqrt{2 \ln M}$$

قد يبدو طبيعياً في ضوء (48.8) أن نُبدّل γ أعلاه بـ γ_1 التي تحقق $1 = (M-1)Q(\gamma_1)$ ، والتي تغدو الخيار الطبيعي في الحد الأدنى لـ $\Pr(e)$ المستنتج في التمرين 10.8 ليس صعباً أن نرى، على أية حال، أن γ/γ_1 ينتهي إلى 1 عندما $M \rightarrow \infty$ ، لذا فالفرق ليس بذي أهمية. بفصل التكامل في (47.8) إلى $w_0 \leq \gamma$ و $w_0 > \gamma$ نجد:

$$(50.8) \quad \Pr(e) \leq \int_{-\infty}^{\gamma} f_{W_0|\mathbf{A}}(w_0 | \mathbf{a}_0) dw_0 + \int_{\gamma}^{\infty} f_{W_0|\mathbf{A}}(w_0 | \mathbf{a}_0) (M-1)Q(w_0) dw_0$$

. ومن ثم، من الضروري في الإشارات ثنائية التعامد مراقبة الطور أو استخدام $-a_m$ إلى a_m في حزمة الترميز يغيّر π أحد الاحتمالات هو أن يحدث خطأ طور مقداره 130 الطور التفاضلي.

$$(51.8) \quad \leq Q(\alpha - \gamma) + \int_{\gamma}^{\infty} f_{w_0|A}(w_0 | \mathbf{a}_0)(M - 1)Q(\gamma) \exp\left[\frac{\gamma^2}{2} - \frac{w_0^2}{2}\right] dw_0$$

$$(52.8) \quad \leq Q(\alpha - \gamma) + \int_{\gamma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(w_0 - \alpha)^2 + \gamma^2 - w_0^2}{2}\right] dw_0$$

$$(53.8) \quad = Q(\alpha - \gamma) + \int_{\gamma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-2(w_0 - \alpha/2)^2 + \gamma^2 - \alpha^2/2}{2}\right] dw_0$$

$$(54.8) \quad = Q(\alpha - \gamma) + \frac{1}{\sqrt{2}} Q\left(\sqrt{2}\left(\gamma - \frac{\alpha}{2}\right)\right) \exp\left[\frac{\gamma^2}{2} - \frac{\alpha^2}{4}\right]$$

يمثل الحد الأول في الجهة اليمنى من العلاقة (50.8) الذيل السفلي للتوزيع W_0 ، وهو احتمال أن يتجاوز الجزء السالب من تذبذبات W_0 القيمة $\gamma \rightarrow \alpha$ ، أي $Q(\alpha \rightarrow \gamma)$. في الحد الثاني، يتم تحديد $Q(w_0)$ من الأعلى في التمرين 8.7c، ليعطي العلاقة (51.8). تُبسّط هذه العلاقة باعتبار $1 = M \exp(-\gamma^2/2) \leq (M - 1)Q(\gamma)$ لتعطي العلاقة (52.8). يُعالج الأس "للتكملة إلى المربع" في العلاقة (53.8)، مؤدياً إلى تكامل الكثافة الغوسية، كما هو في العلاقة (54.8). ينقسم التحليل الآن إلى ثلاث حالات خاصة، الأولى عندما $\alpha \leq \gamma$ والثانية عندما $\alpha/2 \leq \gamma < \alpha$ ، والثالثة عندما $\gamma \leq \alpha/2$. وسنشرح أهمية هذه الحالات بعد إكمال الحدود.

الحالة (1): ($\alpha \leq \gamma$) إن المعامل الأول لـ Q في العلاقة (53.8) هو إما أقل أو يساوي 0، لذا تقع قيمته بين 1/2 و 1. يدل هذا على أن $\text{pr}(e) \leq 1/2$ ، وهي نتيجة عديمة الفائدة. وكما سنرى لاحقاً، فهذه هي الحالة التي يكون فيها المعدل أكبر من أو يساوي السعة. كما يُبين أيضاً في التمرين 10.8 أن احتمال الخطأ يجب أن يكون كبيراً في هذه الحالة.

الحالة (2): ($\alpha/2 \leq \gamma < \alpha$) كل تابع Q في العلاقة (53.8) له معامل غير سالب، لذا يُطبّق الحد $Q(x) \leq \frac{1}{2} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$ (انظر

التمرين 8.7b).

$$(55.8) \quad \text{Pr}(e) \leq \frac{1}{2} \exp\left[\frac{-(\alpha - \gamma)^2}{2}\right] + \frac{1}{2\sqrt{2}} \exp\left(\frac{-\alpha^2}{4} + \frac{\gamma^2}{2} - (\gamma - \alpha/2)^2\right)$$

$$(56.8) \quad \leq \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right] \exp\left(\frac{-(\alpha - \gamma)^2}{2}\right) \leq \exp\left(\frac{-(\alpha - \gamma)^2}{2}\right)$$

لاحظ أن العلاقة (56.8) تتبع العلاقة (55.8) من جمع الحدّين في أسّ الحدّ الثاني. حقيقة أن الأسّين متساويان ليست مُفاجئة، إذ إن γ اختيرت لتُساوي التكاملية في العلاقة (50.8) عند $w_0 = \gamma$.

الحالة (3): ($\gamma \leq \alpha/2$) إن معامل تابع Q الثاني في العلاقة (53.8) أقل من أو يساوي 0، ومن ثمّ تقع قيمته بين 1/2 و 1 ومُحدداً من

الأعلى بـ 1. مما يُعطي:

$$(57.8) \quad \text{Pr}(e) \leq \frac{1}{2} \exp\left[\frac{-(\alpha - \gamma)^2}{2}\right] + \frac{1}{2\sqrt{2}} \exp\left[\frac{-\alpha^2}{4} + \frac{\gamma^2}{2}\right]$$

$$(58.8) \quad \leq \exp\left(\frac{-\alpha^2}{4} + \frac{\gamma^2}{2}\right)$$

بما أن الأسّين في العلاقة (55.8) متساويان، وجب أن يكون الأسّ الأول في العلاقة (57.8) أصغر من الثاني، مُعطياً (58.8). هذا هو بشكل رئيس حدّ الاجتماع المستنتج في التمرين 8.8.

يُظهر الحد الأدنى في التمرين 10.8 أن هذه الحدود مُحكمة جداً، لكن المفهوم الذي هي فيه مُقيّده سيجري شرحه لاحقاً.

سنستعرض الآن ماذا تُمثّل α و γ في كلمات الترميز M والطاقة في البت، E_b . لتتذكر أنّ $\alpha = \sqrt{2E/N_0}$ و $\log_2 M = b$ حيث

هو عدد البتات في الإشارة الواحدة. وبالتالي $\alpha = \sqrt{2bE_b/N_0}$ من العلاقة (49.8) نجد $\gamma^2 = 2 \ln M = 2b \ln(2)$ بالتالي:

$$\alpha - \gamma = \sqrt{2b} \left[\sqrt{E_b/N_0} - \sqrt{\ln 2} \right]$$

بتعويض هذه القيم بالعلاقتين (56.8) و(58.8) نحصل على:

$$(59.8) \quad \Pr(e) \leq \exp \left[-b \left(\sqrt{E_b/N_0} - \sqrt{\ln 2} \right)^2 \right] \quad \text{for } \frac{E_b}{4N_0} \leq \ln 2 \leq \frac{E_b}{N_0}$$

$$(60.8) \quad \Pr(e) \leq \exp \left[-b \left(\frac{E_b}{2N_0} - \ln 2 \right)^2 \right] \quad \text{for } \ln 2 \leq \frac{E_b}{4N_0}$$

نرى من هذا إنه إذا كانت $E_b/N_0 > \ln 2$ فإن احتمال الخطأ ينتهي إلى الصفر إذا انتهت b إلى اللانهاية مع المحافظة على E_b ثابت أي $\Pr(e) \rightarrow 0$ عندما $b \rightarrow \infty$ مع E_b ثابت.

تذكر أنه في العلاقة (86.8)، ذكرنا أن سعة قناة الضجيج الغوسي الأبيض WGN ذات عرض قناة W (معبراً عنها بالبت في الثانية)، والكثافة الطيفية للضجيج $N_0/2$ ، والقوة P هي:

$$(61.8) \quad C = W \log \left(1 + \frac{P}{WN_0} \right)$$

وبدون ضوابط لعرض الحزمة، أي في الحد $W \rightarrow \infty$ ، تكون السعة القصوى $C = \frac{P}{N_0 \ln 2}$. هذا يعني، إنه وبحسب نظرية شانون، ولأجل أي مُعدّل $R < C = \frac{P}{N_0 \ln 2}$ ، يوجد رمازات ذات معدل R بت بالثانية يكون احتمال الخطأ فيها على نحو كفي قريباً من الصفر. بما أن $P/R = E_b$ ، فإن شانون يقول: إذا كان $\frac{E_b}{N_0 \ln 2} > 1$ ، فإنه توجد رمازات بخطأ كفي صغير.

توفر الرمازات المتعامدة برهاناً متيناً لنتيجة السعة القصوى هذه، إذ تُبين العلاقة (59.8) أنه يمكن جعل $\Pr(e)$ صغيراً على نحو كفي وذلك (بزيادة b) طالما أن $\frac{E_b}{N_0 \ln 2} > 1$. تقول نظرية شانون أيضاً إنه لا يمكن جعل احتمال الخطأ صغيراً إذا كانت $\frac{E_b}{N_0 \ln 2} < 1$. نحن لم نثبت ذلك هنا، مع أن التمرين 10.8 يُبين أنه لا يمكن جعل احتمال الخطأ صغيراً على نحو كفي لرماز مُتعامد¹³¹ إذا كانت $\frac{E_b}{N_0 \ln 2} < 1$. إن العملية المقيّدة هنا غير تقليدية. فعند زيادة b تبقى E_b ثابتة. هذا يعني أن الطاقة E في الإشارة تزداد خطياً مع b ، بينما يزداد حجم المجموعة أسياً مع b . ومن ثمّ فإن عرض الحزمة المطلوب لهذه الطريقة لانهاية الحد، وهو يذهب إلى اللانهاية بسرعة. هذا يعني أن هذه الطريقة ليست مخطئاً عملياً لمقاربة السعة، مع أن ثمة مجموعات مؤلفة من 64 أو حتى 256 إشارة ثنائية التعماد تُستخدم في التطبيق العملي.

هدف التحليل إذاً، هو أن نبيّن أولاً أنه يمكن الوصول إلى سعة عرض القناة اللانهائي هذه، وثانياً لُبيّن أيضاً إن استخدام مجموعات كبيرة من الموجات المتعامدة (أو ثنائية التعماد) يُقلّل احتمال الخطأ من أجل نسبة إشارة إلى ضجيج ثابتة، ويُقلّلها بقدر ما نرغب (لمعدلات أقل من السعة) إذا استُخدم عرض حزمة كافٍ.

إن صيغ الحل المختلفة في العلاقتين (59.8) و(60.8) مثيرة للاهتمام وليست ببساطة نتيجة للحدود العليا المستخدمة. في الحالة (2)، التي تؤدي إلى (59.8)، الطريقة النموذجية لحدوث الأخطاء هي عندما تكون $\gamma \approx w_0$. في هذه الحالة، يكون حدّ الاجتماع من رتبة الواحد، مما يدلّ على أنه، وبشرط $\gamma \approx w_0$ ، من المحتمل جداً حدوث خطأ. بكلمات أخرى، تتضمن حالة الخطأ النموذجية قيمة سالبة كبيرة وغير اعتيادية لـ w_0 وليس أي قيم غير اعتيادية لعناصر الضجيج الأخرى. في الحالة (3)، التي تقود إلى (60.8)، الطريقة النموذجية لحدوث الأخطاء هي عندما تكون $w_0 \approx \alpha/2$ وعند وجود عناصر ضجيج أخرى قريبة من $\alpha/2$ أيضاً. في هذه الحالة، نحتاج إلى حدث غير اعتيادي في كل من جهة الإشارة وجهات أخرى أيضاً.

ثمة طريقة أخرى أكثر حدسيّة للنظر إلى هذا التميّز تتمثل في رؤية ما يحدث عند تثبيت قيمة E/N_0 وتغيير M . ترتبط الحالة (3) بقيمة صغيرة لـ M ، والحالة (2) بقيمة M كبيرة، والحالة (1) بقيمة M كبيرة جداً. يمكن لأجل قيم M صغيرة أن نشاهد منطقة فuronوي بمحيط نقطة الإشارة المرسله. يحدث الخطأ عندما يدفع الضجيج نقطة الإشارة خارج منطقة فuronوي، وهذا أكثر احتمالاً في النقاط على سطح فuronوي

¹³¹ بما أن للرماز البسيط نفس احتمال الخطأ الذي للرماز المتعامد المُقابل لكنّه يختلف بالطاقة عن الرماز المُتعامد بقيمة صغيرة مُهملة عندما $M \rightarrow \infty$ ، فإنه لا يمكن جعل احتمال الخطأ للرمازات البسيطة صغيراً على نحو كفي من أجل أي قيمة معطاة لـ $\frac{E_b}{N_0 \ln 2}$ تكون أقل من 1. كما ويُعتقد على نحو واسع، ولكن بدون إثبات، أن الرمازات البسيطة مثالية من حيث حساب احتمال الخطأ بطريقة الترجيح الأعظمي ML عندما يكون احتمال الخطأ صغيراً. ثمة مثال معروف، [30]، لكل قيم $M \geq 7$ ، حيث يكون الرماز البسيط ليس أمثلماً، ولكن في هذا المثال، نسبة الإشارة إلى الضجيج صغيرة جداً واحتمال الخطأ كبير جداً.

القريب من الإشارة المرسله، أي، في النقاط التي تقع في منتصف المسافة بين النقطة المرسله ونقاط بعض الإشارات الأخرى. ومع زيادة M ، يزداد عدد نقاط الوسط هذه إلى أن يصبح مؤكداً أن إحداها ستحدث خطأً عندما يصبح الضجيج كبيراً جداً في اتجاه الإشارة.

6.8 الترميز اللبني

توفّر هذه الفقرة مقدمة مختصرة لموضوع الترميز بهدف تصحيح الأخطاء في الألفية الضجيجية. يُعد الترميز عنواناً رئيساً في الاتصالات الرقمية الحديثة، ومن المؤكد أنه رئيس أكثر مما يقترحه طول هذه المقدمة. في الحقيقة، يستحق الترميز كتاباً خاصاً به وموضوعاً أكاديمياً خاصاً به في أي مُقرّر اتصالات جديّ. من الكتب المقترحة [6] و[15]. غايتنا هنا أن نعطي خلفية كافية وأمثلة لفهم دور الترميز في الاتصالات الرقمية، وليس لتحضير الطالب لأبحاث الترميز. سنبدأ باستعراض الرمّازات المتعامدة بوصفها رمّازات لبنيّة باستخدام أبجدية إثنائية. يتبع ذلك رمّازات ريد-مولر Reed-Muller، والتي توفر نظرة معمقة في الترميز لقناة الضجيج الغوسي الأبيض WGN. يُفضي ذلك إلى نظرية شانون في ترميز القناة الضجيجية.

الرمّاز اللبنيّ هو رمّاز بُجْزاً فيه سلسلة الأرقام الإثنائية الواردة إلى لبّينات ذات طول مُعطى m وبعدها تُمثّل هذه المجموعات الإثنائية بكلمات رمّاز. وبالتالي فهناك 2^m كلمة رمّاز في الرّماز، يمكن لهذه الكلمات أن تكون مجموعات إثنائية عددها n من طول لبّنة $n > m$ ، أو قد تكون أشعة لإشارات، أو قد تكون إشارات. ليس ثمة فرق أساسي بين الترميز والتعديل؛ على سبيل المثال تُمكن رؤية الرمّاز المتعامد المبين آنفاً والذي فيه $M = 2^m$ كلمة رمّاز إما بوصفه تعديلاً بمجموعة إشارة كبيرة أو ترميزاً يستخدم n مجموعة إثنائية كمدخل.

1.6.8 الرمّازات المتعامدة الإثنائية ومصفوفات هادامارد

عند استخدام كلمات رمّاز متعامدة في قناة ضجيج غوسي أبيض، تصبح أي مجموعة متعامدة جيدة من وجهة نظر احتمال الخطأ. يتمثّل أحد الخيارات الممكنة باستخدام موجات جيبية متعامدة. أما من وجهة نظر التنفيذ، فثمة خيارات أبسط من الموجات الجيبية المتعامدة. كما أنه من المفيد، من حيث المفهوم، أن نرى إمكانية تشكيل كلمات الرمّاز المتعامدة من كلمات الرمّاز الإثنائية. ستغدو هذه المقاربة الرقمية مهمة من حيث التصرّور في دراسة ألفية الخفوت والتباين في الفصل القادم. كما أنّها تساعد في التنفيذ، إذ إنّها تُرجع النقطة التي تتجاوز فيها الموجات التماثلية العتاديات الرقمية.

تنطوي إحدى الطرائق الرقمية لتوليد مجموعة كبيرة من الإشارات المتعامدة أولاً على توليد مجموعة مؤلفة من M كلمة رمّاز إثنائية، طول كل منها M ، ويختلف كل زوج متباين منها بـ $M/2$ موقعاً تماماً. بعدئذ يمكن تمثيل الرقمين الإثنائين بإشارتين مُتعاكستيّ القطبية، أي: $0 \rightarrow +a$ و $1 \rightarrow -a$. ويؤدي هذا إلى مجموعة مكونة من M إشارة حقيقية متعاكسة القطبية s_1, \dots, s_M . ثم تُمثّل تلك الإشارات بالإشارة $\sum_j s_j \phi_j(t)$ ، حيث $\{\phi_j(t); 1 \leq j \leq M\}$ وهي مجموعة متعامدة (من قبيل توابع السنك Sinc أو نبضات نايكويست). ونظراً إلى أن كل كلمتي رمّاز إثنائيي تختلفان بـ $M/2$ موقعاً، فإن الموجتين الموافقتين لهما تكونان متعامدتين، وتحمل كل منهما نفس الطاقة. ويُسمى الرمّاز الإثنائي ذو الخصائص المبينة آنفاً بالرمّاز الإثنائي المتعامد.

ثمة طرائق كثيرة لتوليد رمّازات إثنائية متعامدة. ربما يأتي أبسطها من مصفوفة هادامارد. من أجل كل عدد صحيح $m \geq 1$ يوجد مصفوفة هادامارد $2^m \times 2^m$ هي H_m . يختلف كل صفين متباينين في مصفوفة هادامارد H_m بـ 2^{m-1} موقعاً، ومن ثمّ يُشكّل كل 2^m سطراً في المصفوفة H_m رمّازاً إثنائياً متعامداً مع 2^m كلمة رمّاز.

فيما يبدو، هناك حوارية بسيطة لتوليد مصفوفات هادامارد. تُعرّف مصفوفة هادامارد H_1 بأن فيها سطرين 00 و 01 ببساطة يستوفيان الشرط بأن كل سطرين متباينين يختلفان بنصف المواقع. ومن أجل أي عدد صحيح $m > 1$ يمكن التعبير عن مصفوفة هادامارد H_{m+1} من الرتبة 2^{m+1} بوصفها أربع مصفوفات جزئية كل منها $2^m \times 2^m$. كل من المصفوفتين الجزئيتين العلويتين هي H_m ، والمصفوفتان الجزئيتان السفليتان هما H_m و \bar{H}_m ، حيث \bar{H}_m هي مُتممة H_m . الشكل 7.8 يوضّح ذلك.

0	0
0	1

$m = 1$

0	0	0	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	1	1	0

$m = 2$

0000	0000
0101	0101
0011	0011
0110	0110
0000	1111
0101	1010
0011	1100
0110	1001

$m = 3$

الشكل 7.8: مصفوفات هادامارد

في الشكل 7.8، نلاحظ أن كل سطر من كل مصفوفة، عدا السطر الذي يحتوي على أصفار فقط، يحتوي نصف العدد من الأصفار ونصفه من الواحدات. ولرؤية أن هذا يبقى صحيحاً لكل قيم m الكبيرة، يمكننا استخدام الاستقراء. لذا سنفرض، ولأجل m مُعطاة، أن H_m تحتوي على سطر مفرد كُله أصفار، وعلى $2^m - 1$ سطراً، فيه نصف العدد تماماً واحداً. ولنثبت ذلك من أجل المصفوفة H_{m+1} ، لندرس أولاً الصفوف 2^m الأولى من H_{m+1} . لكل سطر ضعفيّ الطول وضعفيّ عدد الواحدات عما هي عليه في السطر الموافق من H_m . بعد ذلك سندرس الصفوف 2^m الأخيرة. لاحظ أن أول سطر من المصفوفة \bar{H}_m كُله واحداً و 2^{m-1} واحداً في كل الصفوف المتبقية. وبالتالي فإن السطر الأول في المجموعة الثانية من الأسطر 2^m في المصفوفة \bar{H}_{m+1} ليس فيه واحداً في المواقع 2^m الأولى وفيه 2^m واحداً في المواقع 2^m الأخيرة، مُعطياً 2^m واحداً في المواقع 2^{m+1} . ويحتوي كل سطر مُتبقٍ على 2^{m-1} واحداً في المواقع 2^m الأولى وعلى 2^{m-1} واحداً في المواقع النهائية، بمجموع 2^m واحداً كما هو مطلوب.

وبطريقة استقرائية مشابهة (انظر التمرين 18.8) فإن الجمع¹³² وفق المقاس -2 لأي سطرين من H_m هو سطر آخر من H_m . بما أن الجمع وفق المقاس -2 لسطرين يعطي الوضعيات التي يختلف فيها السطران، و فقط يعطي الجمع وفق المقاس -2 لكلمة رماز مع ذاتها، كلمة رماز كلها أصفار، فهذا يعني أن مجموعة الأسطر هي مجموعة إثنائية متعامدة.

إن حقيقة أن يكون ناتج الجمع وفق المقاس -2 لأي سطرين هو سطر آخر تجعل الرماز الموافق نوعاً خاصاً من الرماز الإثنائي يُسمى الرماز الخطي، أو رماز تدقيق الندية، أو رماز المجموعة (وهذه جميعها مترادفات). يمكن اعتبار المجموعات الإثنائية المؤلفة من M عنصراً أشعة في فضاء شعاعي عبر الحقل الإثنائي السلمي. ليس من الضروري هنا أن نكون دقيقين في تعريف الحقل؛ مازال إلى الآن كافياً للدراسة الفضاءات الشعاعية المعرّفة على الحقول الحقيقية أو العُقدية. لكن الأرقام الإثنائية، باستخدام الجمع وفق المقاس -2 والجداء العادي، تُشكّل حقلاً يمكن أن تُطبّق فيه الخصائص المعروفة في الفضاءات الشعاعية.

بما أن مجموعة كلمات الرماز في الرماز الخطي مُغلقة تحت الجمع وفق المقاس -2 (ومغلقة أيضاً تحت الجداء السلمي بـ 1 أو 0)، فإن الرماز الخطي هو فضاء شعاع إثنائي جزئي من فضاء الشعاع الإثنائي لمجموعات إثنائية عددها M . ثمة خاصية هامة لمثل هذا الفضاء الجزئي، ومن ثمّ للرماز الخطي، وهي أن مجموعة الوضعيات التي تختلف فيها كلمتا رماز هي مجموعة الوضعيات التي يحتوي فيها ناتج جمع تلك الكلمات وفق المقاس -2 على واحداً. هذا بدوره يعني، أنه من أجل الرماز الخطي، فإن المسافة الدنيا d_{\min} ، مأخوذة بين كل الأزواج المتباينة لكلمات الرماز، تساوي إلى التثليل الأدنى (العدد الأدنى من الواحدات) لأي كلمة رماز لا تساوي الصفر.

ثمة خاصية هامة أخرى للرماز الخطي (غير الرماز البسيط المؤلف من كل المجموعات M الإثنائية) هي أن بعض المركبات x_k لكل كلمة رماز $x = (x_1, \dots, x_M)^T$ يمكن تمثيلها بوصفها مجاميع لمركبات أخرى وفق المقاس -2. على سبيل المثال، في حالة $m = 3$ في الشكل 7.8، $x_1 = 0$ و $x_4 = x_2 \oplus x_3$ ، $x_6 = x_2 \oplus x_5$ ، $x_7 = x_3 \oplus x_5$ ، $x_8 = x_4 \oplus x_5$ ، وممن ثمّ يمكن فقط اختيار ثلاثة من المركبات باستقلالية، مُعطية فضاءً جزئياً إثنائياً ثلاثي الأبعاد. وبما أن كل مركبة هي إثنائية، فإن مثل هذا الفضاء الجزئي يحتوي على $2^3 = 8$ شعاعاً. تُسمى المركبات التي هي مجموعات، وفق المقاس -2، للمركبات السابقة "تدقيق الندية" وهي عادة تلعب دوراً هاماً في فك الترميز. يمكن النظر إلى المركبة الأولى x_1 بوصفها تدقيقاً للندية إذ لا يمكن اختيارها على نحو مستقل، لكن دورها الوحيد في الرماز هو المساعدة في تحقيق خاصية

¹³² يُعرّف مجموع الموديول -2 لرقمين إثنائيين على أنه $0 \oplus 0 = 0$ ، $0 \oplus 1 = 1$ ، $1 \oplus 0 = 1$ ، $1 \oplus 1 = 0$. إن مجموع الموديول -2 لسطرين (أو شعاعين) أو رقمين إثنائيين هو السطر (أو الشعاع) الناتج عن جمع كافة العناصر وفق مجاميع الموديول -2.

التعامدية. وليس لها علاقة في فك الترميز.

من السهل تعديل الرمز الإثنائي المتعامد لتوليد رمز إثنائي بسيط، أي رمز إثنائي يُشكّل، بعد تمثيل $a \rightarrow 0$ و $a \rightarrow 1$ ، رمزاً بسيطاً في الفضاء الإقليدي. تُسقط أول مركبة من كل كلمة رمز إثنائية، مُحوّلة الرمز إلى M كلمة رمز على $M - 1$ بُعداً. لاحظ أنه باعتبار الإشارات المتعكسة القطبية المولدة بالأرقام الإثنائية، يحوّل استبعاد المركبة الأولى الإشارة $+a$ (الموافقة لأول مركبة إثنائية 0) إلى الإشارة 0 (والتي لا توافق أيّاً من الإثنائين 0 أو 1). يُعدّ توليد الرمز الإثنائي ثنائي القطبية سهلاً أيضاً؛ تُعطي أسطر المصفوفة H_m نصف كلمات الرمز، وتعطي أسطر \bar{H}_m النصف الآخر. يُعدّ كل من الرمز البسيط والرمز ثنائي التعامدية، كما عبّر عنهما هنا بصيغة إثنائية، رمازات لبنية إثنائية خطية.

ثمّ، في هذا العرض للرمازات المتعامدة، إنجاز أمرين. الأول، يمكن توليد الرمازات المتعامدة من سلسلة إثنائية تُمثّل بسلسلة متعكسة القطبية، وثانياً، أعط مثلاً حيث يمكن النظر إلى التعديل عبر أبجدية كبيرة على أنه رمز لبني إثنائي يتبعه تعديل عبر أبجدية إثنائية أو صغيرة جداً.

2.6.8 رمازات ريد - مولر

تستخدم الرمازات المتعامدة (والرمازات البسيطة وثنائية التعامد الموافقة) عرض حزمة هائل لأجل قيم M كبيرة. تُشكّل رمازات ريد-مولر صنفاً من الرمازات الإثنائية اللبنيّة الخطية التي تتضمّن امتداد عرض حزمة كبير (في الحقيقة هي تشمل الرمازات الإثنائية ثنائية التعامد) لكنها في الوقت نفسه تسمح بامتداد عرض حزمة أصغر بكثير، أي أنها تسمح بالرمازات الإثنائية ذات M كلمة رمز، حيث $\log M$ قريب جداً من الأبعاد التي يستخدمها الرمز.

توصّف رمازات ريد-مولر بموسطين صحيحين $m \geq 1$ و $0 \leq m$ ؛ ولأجل هذا الخيار، يوجد رمز لبني خطي، يُرمز له بـ $RM(r, m)$. يوصّف المتوسط m طول اللبنة على أنه $n = 2^m$. وتُعطى المسافة الدنيا $d_{\min}(r, m)$ للرمز وعدد أرقام المعلومات الإثنائية $k(r, m)$ المطلوبة لتوصيف كلمة الرمز بالعلاقة التالية:

$$(62.8) \quad d_{\min}(r, m) = 2^{m-r} \quad k(r, m) = \sum_{j=0}^r \binom{m}{j}$$

حيث $\binom{m}{j} = \frac{m!}{j!(m-j)!}$. وبالتالي فإن هذه الرمازات، مثلها مثل الرمازات المتعامدة، توجد فقط عند طول لبنة مساوٍ لـ 2. وفيما يوجد رمز إثنائي متعامد وحيد (كما هو معرّف من خلال H_m) لكل m ، ثمة طيف من رمازات RM لكل m تتراوح من قيم كبيرة لـ d_{\min} وصغيرة لـ k إلى قيم صغيرة لـ d_{\min} وكبيرة لـ k مع ازدياد r .

ولكلّ m ، تُعدّ هذه الرمازات بسيطة من أجل $r = 0$ و $r = m$. فمن أجل $r = 0$ يتألف الرمز من كلمتي رمز يختارها بت واحد، أي $k(r, m) = 1$ ؛ إحدى كلمتي الرمز كلها أصفار والثانية كلها واحداً، مما يؤدي إلى $d_{\min}(0, m) = 2^m$. ومن أجل $r = m$ يتألف الرمز من مجموعة كافة المجموعات 2^m الإثنائية، مما يؤدي إلى $d_{\min}(m, m) = 1$ و $k(m, m) = 2^m$. ومن ثمّ، فمن أجل $m = 1$ يوجد رمازان RM . يتألف الرمز الأول $RM(0, 1)$ من كلمتي رمز $(0, 0)$ و $(1, 1)$ ، ويتألف الرمز الثاني $RM(1, 1)$ من أربع كلمات رمز $(0, 0)$ ، و $(0, 1)$ ، و $(1, 0)$ ، و $(1, 1)$.

من أجل $m > 1$ وقيم متوسطة لـ r ، ثمة خوارزمية بسيطة، قريبة جداً من خوارزمية مصفوفات هادامارد، توصّف مجموعة كلمات الرمز. هذه الخوارزمية تكرارية، ومن أجل كل $m > 1$ و $0 < r < m$ ، توصّف $RM(r, m)$ باعتبارها $RM(r, m-1)$ و $RM(r-1, m-1)$. وعلى نحو محدّد، $x \in RM(r, m)$ إذا كانت x متعاقبة مع u و $u \oplus v$ ، معرّفة بـ $x = (u, u \oplus v)$ من أجل $u \in RM(r, m-1)$ و $v \in RM(r-1, m-1)$ ، ولأجل $0 < r < m$ ،

$$(63.8) \quad RM(r, m) = \{(u, u \oplus v) \mid u \in RM(r, m-1), v \in RM(r-1, m-1)\}$$

يُكمن التشابه مع مصفوفات هادامارد في أن x هي سطر من H_m إذا كانت u سطرًا من H_{m-1} و v إما كلها واحداً أو أصفار.

أول ما نلاحظه في هذا التعريف هو أنه إذا كان $RM(r, m-1)$ و $RM(r-1, m-1)$ رمازان خطيّان، فإن $RM(r, m)$ خطيّ أيضاً. لنرى ذلك، لنفرض $x = (u, u \oplus v)$ و $x' = (u', u' \oplus v')$ عندها

$$x \oplus x' = (u, u', u \oplus u' \oplus v \oplus v') = (u'', u'' \oplus v'')$$

حيث $u'' = u \oplus u' \in RM(r, m-1)$ و $v'' = v \oplus v' \in RM(r-1, m-1)$. هذا يبيّن أن: $x \oplus x' \in RM(r, m)$ ، ومن ثمّ فإن $RM(r, m)$ رماز خطيّ إذا كان $RM(r, m-1)$ و $RM(r-1, m-1)$ خطيّان. وحيث إن $RM(0, m)$ و $RM(m, m)$ خطيّان لأجل $m \geq 1$ ، فإن رمازات ريد-مولر، وبالاستدلال من قيم m ، خطيّة.

ثمّة ملاحظة أخرى تتمثل في أن اختيار قيم مختلفة للثنائي u و v لا يمكن أن يؤدي إلى نفس القيمة لـ $x = (u, u \oplus v)$. لرؤية ذلك، نفرض أن $x' = (u', v')$. فإذا كان $u \neq u'$ ، فإن النصف الأول من x يختلف عما هو عليه في x' . وبشكل مشابه، إذا كان $u = u'$ و $v \neq v'$ ، فإن النصف الثاني من x يختلف عما هو عليه في x' . وبالتالي فإن $x = x'$ فقط إذا كان $u = u'$ و $v = v'$. ونتيجة لذلك، فإن عدد بتات المعلومات المطلوب لتوصيف كلمة رماز في الرماز $RM(r, m)$ والمعروف بـ $k(r, m)$ يساوي الرقم المطلوب لتوصيف كلمة رماز في الرماز $RM(r, m-1)$ إضافة إلى العدد المطلوب لتوصيف الرماز $RM(r-1, m-1)$ ، أي، من أجل $0 \leq r \leq m$ يكون:

$$k(r, m) = k(r, m-1) + k(r-1, m-1)$$

يبيّن التمرين 19.8 أن هذه العلاقة تتضمن الصيغة الصريحة لـ $k(r, m)$ المعطاة في (62.8). أخيراً، يؤكّد التمرين 20.8 الصيغة الصريحة لـ $d_{\min}(r, m)$ في (62.8).

إن رمازات $RM(0, 1)$ هي رمازات إثنائية متعامدة ويمكن ملاحظة أن الهيكلية في (63.8) تشابه خوارزمية مصفوفة هادامارد إذا بدّلنا المصفوفة $M \times M \times H_m$ في الخوارزمية هادامارد بالمصفوفة $\begin{bmatrix} H_m \\ G_m \end{bmatrix} 2M \times M$ حيث $G_m = \bar{H}_m$.

ثمّة حالة أخرى مثيرة للاهتمام وهي الرمازات $RM(m-2, m)$. لهذه الرمازات $d_{\min}(m-2, m) = 4$ ، وعدد بتات المعلومات فيها هو $k(m-2, m) = 2^m - m - 1$. بكلمات أخرى، إن لها $m+1$ تدقيقاً للندية. وكما سيجري شرحه لاحقاً، تُسمى هذه الرمازات رمازات هامينغ الموسّعة. إحدى خصائص رمازات ريد-مولر هي أن كافة كلمات الرماز لها عدد زوجي¹³³ من الواحدات وبالتالي يمكن النظر إلى آخر عنصر في كلمة الرماز بوصفه تدقيقاً شاملاً للندية حيث اختيار ليؤكد أن كلمة المرور تحتوي على عدد زوجي من الواحدات. إذا استبعد تدقيق الندية النهائي من $RM(m-2, m)$ ولأي قيمة لـ m ، يبقى الرماز الناتج خطياً وله مسافة صغرى 3 على الأقل، إذ إن عنصراً واحداً فقط قد استبعد. يُسمى هذا الرماز رماز هامينغ بطول لبنة $1 - 2^m$ و m مُدقق ندية. وله ميزة هامة جداً في أن كل مجموعة إثنائية بطول $1 - 2^m$ هي إما كلمة رماز أو تبعد 1 عن كلمة الرماز¹³⁴.

إن رمازات هامينغ ليست مفيدة على نحو خاص في التطبيق العملي للأسباب التالية. إذا استخدمنا رماز هامينغ في مدخل المعدّل ثمّ اتخذنا قراراً على البتات المفردة قبل فك الترميز، عندها سيحصل خطأ في فك الترميز اللبني كلما حدثت أخطاء بتين اثنتين أو أكثر. وهذا تحسّن طفيف في الموثوقية بكلفة عالية جداً في معدّل الإرسال. من جهة أخرى، إذا أخذ قرار لبين، فإن استخدام رماز هامينغ الموسّع $RM(m-2, m)$ (أي) بزيادة d_{\min} من 3 إلى 4، يُخفف كثيراً احتمال الخطأ بكلفة هامشية لإضافة بت فائض.

7.8 نظرية ترميز القناة الضجيجية

أعطت الفقرات السابقة مقدمة مختصرة للترميز. وقدمت أمثلة متعددة تبيّن إن استخدام الرمازات الإثنائية يُحقّق ذلك، مثلاً، كاستخدام مجموعات كبيرة من الإشارات المتعامدة، أو البسيطة، أو ثنائية التعامد. كان ثمّة طبيعة خاصة للتطوير، مستعرضاً عدداً من الطرائق بمواصفات مثيرة متعددة، ولكن ليس كثير من النتائج العامة. كانت النتائج المبكّرة لاحتمال الخطأ $pr(e)$ للرمازات المتعامدة أكثر أساسية، موضحة أنه يمكن جعل $pr(e)$ صغيراً على نحو اعتباطي

¹³³ يمكن التحقق من هذه الخاصة بسهولة بالاستقراء.

¹³⁴ لرؤية هذين لاحظ أنه توجد 2^{2^m-1-m} كلمة رماز، ولكل منها $2^m - 1$ جار؛ وهؤلاء الجيران مميّزون عن جيران كلمات الرماز الأخرى لأن d_{\min} هي 3 على الأقل. وبإضافة كلمات المرور والجيران نحصل على المجموعة الكاملة 2^{2^m-1} شعاعاً. وهذا يبين أيضاً أن المسافة الدنيا هي 3 بالتام.

لقناة ضجيج غوصي أبيض WGN بدون قيود على عرض القناة، إذا كانت $\frac{Eb}{N_0}$ أكبر من 2. In. شكّل هذا حالة خاصة لنظرية ترميز القناة الضجيجية، بالقول إنه يمكن تحقيق $pr(e)$ صغير على نحو اعتباطي لتلك القناة الخاصة جداً وللمجموعة القيود.

1.7.8 الألفية المقطّعة عديمة الذاكرة

تسرد هذه الفقرة نظرية ترميز القناة الضجيجية لحالة خاصة أخرى، لألفية مقطّعة من دون ذاكرة (DMC's) وتبرهن صحتها. قد يبدو هذا مُستغرباً بعد كل التأكيد على الضجيج الغوصي الأبيض في هذا الفصل وفي الفصل السابق. ثمة سببان رئيسان لهذا الخيار. الأول هو أن البرهان واضح على نحو خاص في حالة القناة المقطّعة التي من دون ذاكرة DMC، وعلى وجه الخصوص بعد دراسة AEP (احتمال التجاوز الإجمالي Aggregate Exceedance Probability) لمصادر مُقطّعة من دون ذاكرة. والثاني هو إمكانية تعميم البرهان بسهولة، كما سيُناقش لاحقاً. للقناة المقطّعة من دون ذاكرة تسلسلٌ دخل مُقطّع على النحو التالي $X = X_1, \dots, X_k, \dots$. في كل زمن محدد k ، ينتمي مُدخل القناة إلى أجدية منتهية \mathcal{X} من الرموز. على سبيل المثال، في الفقرة الأخيرة، يمكن النظر إلى أجدية الدخل على أنها الإشارات $\pm a$. سيكون السؤال الهام هنا إن كان من الممكن الاتصال بموثوقية على قناة في حال اتُّخذ القرار باعتماد الأجدية $\mathcal{X} = \{a, -a\}$. عند ذلك ستُعتبر القناة على أنها الجزء من القناة بدءاً من اختيار الإشارة إلى تسلسل الخرج التي سيجري الكشف منه. في الحالة الأكثر عموماً، يمكن أن تكون مجموعة الإشارة عبارة عن مجموعة QAM كيفية.

تُعرّف القناة المقطّعة التي من دون ذاكرة بأنها قناة لها تسلسل خرج مُقطّع $Y = Y_1, \dots, Y_k, \dots$. حيث كل مُخرَج Y_k من تسلسل الخرج هو انتقاء من أجدية منتهية \mathcal{Y} وهو تابع احتمالي للدخل والضجيج بطريقه سنصّفه قريباً. في المثال آنف الذكر، يمكن اختيار أجدية الخرج على أنها $\mathcal{Y} = \{a, -a\}$ توافق الحالة التي اتُّخذت فيها قرارات صلبة على كل إشارة في المستقبل. يمكن للقناة أن تتضمن التعديل والكشف كجزء داخلي، وسيكون السؤال الهام هو فيما إذا استطاع الترميز في الدخل وفك الترميز باعتماد القرارات الصلبة ذات الحرف الواحد في الخرج، توفير اتصال موثوق.

يتمثّل الخيار الآخر في استخدام مخارج ما قبل القرار، بعد تكميمها لثلاثي شروط الأجدية المنتهية. ثمة خيار آخر مشابه إلى حدّ كبير يتمثّل في وجود كاشف يعطي نسبة ضجيج لوجاريتمية مُكتممة بدلا من القرار. باختصار، يعتمد اختيار أجديات قناة مُقطّعة من دون ذاكرة على الجزء من مسألة الاتصال الكُلية موضوع الدراسة.

بالعموم، لا توصّف القناة بأجديات الدخل والخرج فحسب، ولكن بالوصف الاحتمالي للمخرجات باشتراط المدخلات أيضاً (يجري اختيار الوصف الاحتمالي للمدخلات من قبل مستخدم القناة). ليكن دخل القناة هو $X^n = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ ، ينظر إليه هنا على طول فترة القناة أو ضمن أي زمن أكبر من أو يساوي الفترة الزمنية ذات الصلة. وبطريقة مشابهة يُعبّر عن الخرج بـ $Y^n = (Y_1, \dots, Y_n)$. من أجل القناة DMC، يُعرّف احتمال مجموعة الخرج n شرطياً على مجموعة الدخل n ليحقق:

$$(64.8) \quad P_{Y^n|X^n}(y_1, \dots, y_n | x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n P_{Y_k|X_k}(y_k | x_k)$$

حيث $P_{Y_k|X_k}(y_k = j | x_k = i)$ ، لكل $i \in \mathcal{X}$ و $j \in \mathcal{Y}$ هي تابع فقط لـ i و j وليس للزمن k . بالتالي، وشرطياً على سلسلة دخل مُعطاة، تكون رموز الخرج مستقلة ولكل منها توزع شرطي يعتمد فقط على رمز الدخل الموافق. يرمز لهذا التوزع الشرطي بـ $P_{i,j}$ لكل قيم $i \in \mathcal{X}$ و $j \in \mathcal{Y}$ ، أي $P_{Y_k|X_k}(y_k = j | x_k = i) = P_{i,j}$. ومن ثمّ توصّف القناة على نحو كامل بأجدية الدخل، وبأجدية الخرج، وبتابع التوزع الشرطي $P_{i,j}$. يسمى تابع التوزع الشرطي عادة تابع الإرسال أو مصفوفة الإرسال.

تعدّ القناة المتناظرة الإثنائية (BSC) أكثر القنوات المقطّعة من دون ذاكرة التي دُرست على نحو مُكثّف في السنوات الـ 60 الماضية، في هذه القناة $\mathcal{X} = \{0,1\}$ ، $\mathcal{Y} = \{0,1\}$ ، وتُحقق $P_{0,1} = P_{1,0}$. وبالتالي يوصّف هذا العدد المفرد $P_{0,1}$ القناة BSC. تُعدّ قناة الضجيج الغوصي الأبيض WGN ذات المدخلات المتعكسة القطبية والقرارات الصلبة في الخرج باعتماد الترجيح الأعظمي ML مثلاً على القناة المتناظرة الإثنائية BSC. وعلى الرغم من الدراسة المكثفة لـ BSC وبساطتها المتأصلة، يبقى السؤال المتعلق بالرمازات المثلى ذات طول اللبنة الكبير (مثلى من حيث احتمال الخطأ الأدنى) بدون إجابة. وبالتالي فإنّ نظرية ترميز القناة الضجيجية، والتي تصف الخصائص المتنوعة لاحتمال

الخطأ الممكن الحصول عليه بالترميز تلعب دوراً مهماً في الترميز.

2.7.8 السعة

تُعرّف هذه الفقرة السعة C للقناة DMC. فيما تبين الفقرة التالية، بعد تعريف المعدل R الذي تدخل فيه المعلومات إلى المعدل، أن من المستحيل الحصول على اتصال موثوق على قناة إذا كان $R > C$. ويُعرف هذا بأنه العكس لنظرية ترميز القناة الضجيجية، وهو على نقيض ما ورد في الفقرة الأخيرة والتي بيّنت أنه من الممكن الحصول على اتصال موثوق على نحو اعتباطي لأي قيم $R > C$. وكما في تحليل الرمازات المتعامدة، يمكن جعل الاتصال بمعدلات أقل من السعة أكثر موثوقية بزيادة طول اللبنة، بينما لا يمكن تحقيق ذلك من أجل $R > C$.

تُعرّف السعة بدلالة عبارات انتروبي متنوعة. فمن أجل قناة DMC معطاة وطول سلسلة n ، ليكن $P_{Y^n|X^n}(y_n | x_n)$ تُعطى بالعلاقة (64.8) وليكن $p_{X^n}(x^n)$ يُمثّل تابع احتمال كفي شامل اختياره المستخدم في الدخل X_1, \dots, X_n . يؤدي هذا إلى انتروبي مشترك $H[X^n Y^n]$. من العلاقة (37.2) يمكن تجزئته إلى:

$$(65.8) \quad H[X^n Y^n] = H[X^n] + H[Y^n | X^n]$$

حيث $H[Y^n | X^n] = E[-\log P_{Y^n|X^n}(Y^n | X^n)]$. لاحظ أنه ولكون $H[Y^n | X^n]$ عُرّف على أنه التوقع على كل من X^n و Y^n ، فهو يعتمد على توزع X^n وكذلك على التوزع الشرطي لـ Y^n بفرض X^n . يمكن تجزئة الانتروبي المشترك $H[X^n Y^n]$ بطريقة معاكسة:

$$(66.8) \quad H[X^n Y^n] = H[Y^n] + H[Y^n | X^n]$$

بضمّ العلاقتين (65.8) و (66.8)، نرى أن: $H[X^n] - H[X^n | Y^n] = H[Y^n] - H[Y^n | X^n]$. يُسمى هذا الفرق في الانتروبي للمعلومات التبادلية بين X^n و Y^n ويرمز لها بـ $I(X^n; Y^n)$ ، وبالتالي:

$$(67.8) \quad I(X^n; Y^n) = H[X^n] - H[X^n | Y^n] = H[Y^n] - H[Y^n | X^n]$$

للمقدار الأول في $I(X^n; Y^n)$ ، تفسير منطقي. في ترميز المنبع، تُمثّل $H[X^n]$ عدد البتات المطلوب لتمثيل دخل القناة. إذا نظرنا إلى قيمة عينة محدّدة y^n من الخرج، يمكن تفسير $H[X^n | Y^n = y^n]$ على أنها عدد البتات المطلوب لتمثيل X^n بعد مشاهدة عينة الخرج y^n . لاحظ أن $H[Y^n | X^n]$ هي القيمة المتوقعة لذلك على Y^n . وبالتالي يمكن اعتبار $I(X^n; Y^n)$ على أنها تقليل الارتياح، أو عدد البتات المطلوب للمواصفة، بعد اجتياز القناة. ستقود هذه البديهية إلى عكس نظرية ترميز القناة الضجيجية في الفقرة الجزئية القادمة. أما المقدار الثاني في $I(X^n; Y^n)$ فهو الأسهل معالجةً. بأخذ لوغاريتم المقدار في (64.8)،

$$(68.8) \quad H[Y^n | X^n] = \sum_{k=1}^n H[Y_k | X_k]$$

وبما أن الانتروبي لسلسلة من الرموز العشوائية محدّدة من الأعلى بمجموع الحدود الموافقة (انظر التمرين 19.2) نجد:

$$(69.8) \quad H[Y^n] = \sum_{k=1}^n H[Y_k]$$

وبالتبديل في (67.8) و (68.8) يكون:

$$(70.8) \quad I[X^n; Y^n] \leq \sum_{k=1}^n H[X_k; Y_k]$$

إذا كانت المدخلات مستقلة، فإن المخرجات مستقلة أيضاً، والعلاقتان (69.8) و (70.8) مُحققتان على نحو متساوٍ. والمعلومات التبادلية $I[X^n; Y^n]$ في كل زمن k تابع فقط لتابع كتلة الاحتمال (pmf) Probability Mass Function لأجل X_k ، إذ إن احتمالات الخرج الشرطية على الدخل محدّدة بالقناة. ومن ثمّ، فإن حدّ المعلومات التبادلية في العلاقة (70.8) مُحدّد من الأعلى بالقيمة العظمى للمعلومات التبادلية على توزع الدخل. تُعرّف هذه القيمة العظمى بأنها سعة القناة.

$$(71.8) \quad C = \max_p \sum_{i \in X} \sum_{j \in Y} p_i P_{i,j} \log \frac{P_{i,j}}{\sum_{t \in X} p_t P_{t,j}}$$

حيث $p = (p_0, p_1, \dots, p_{X-1})$ هي مجموعة احتمالات الدخل (مأخوذة من الأبجدية X). إن القيمة العظمى من مجموعة احتمالات الدخل هذه، مُرتبة — $p_i \geq 0$ ولكل من $i \in X$ و $\sum_{i \in X} p_i = 1$. إن التابع السابق مُحدَّب في p ، ومن ثم فإن تحقيق الحد الأقصى عملية مباشرة؛ ففي BSC، على سبيل المثال، تكون القيمة العظمى عند: $p_0 = p_1 = 1/2$ و $C = 1 + P_{0,1} \log P_{0,1} + P_{0,0} \log P_{0,0}$. بما أن حدود C العليا $I(X_k; Y_k)$ لكل k ، وعلى نحو متساوٍ إذا كان التوزيع على X_k هو التوزيع الذي يحقق الحد الأقصى، فإن:

$$(72.8) \quad I(X^n; Y^n) \leq nC$$

وعلى نحو متساوٍ إذا كانت جميع المدخلات مُستقلة ومُختارة بالاحتمالات العظمى في (71.8).

3.7.8 عكس نظرية ترميز القناة الضجيجية

نُعرف المعدل R لأجل القناة DMC الميَّنة أنفاً على أنه عدد أرقام المنبع الإثنائية المتساوية الاحتمال (iid) التي تدخل القناة كلما استخدمنا القناة. لنفرض أن nR بتاً دخلت المنبع وأُرسلت عبر n مرة استخدام للقناة تحت الدراسة. لنفرض أيضاً أن هذه البتات مُثلَّت بمُدخلات القناة X^n بطريقة واحد لواحد. بالتالي فإن $H[X^n] = nR$ وتأخذ X^n القيم متساوية الاحتمال $M = 2^{nR}$. تُحدَّد النظرية التالية قيم $\Pr(e)$ بعيداً عن الصفر إذا كان $R > C$.

نظرية 1.7.8 لندرس قناة DMC بسعة C . لنفرض أن المعدل R يحقق الشرط $R > C$. فمن أجل أي طول لينة n ، يكون احتمال الخطأ وفق قاعدة الترجيح الأعظمي ML، أي الاحتمال بأن تكون المجموعة \tilde{X}^n لا تساوي المجموعة X^n ، مُحدَّداً من الأسفل بـ

$$(73.8) \quad R - C \leq H_b(\Pr(e)) + R \Pr(e)$$

حيث $H_b(\alpha) = -\alpha \log \alpha - (1 - \alpha) \log(1 - \alpha)$ ، الإنتروبي الإثنائي.

ملاحظة: الجانب الأيمن من العلاقة (73.8) يساوي الصفر عندما $\Pr(e) = 0$ ويزداد طالما $\Pr(e) \leq 1/2$ ، وبالتالي تعطي العلاقة (73.8) الحد الأدنى لـ $\Pr(e)$ الذي يعتمد فقط على C و R .

البرهان: لاحظ أن $H[X^n] = nR$ ، ومن العلاقتين (70.8) و (67.8)، $H(X^n) - H(X^n|Y^n) \leq nC$ ، بالتالي:

$$(74.8) \quad H(X^n|Y^n) > nR - nC$$

من أجل كل قيمة عينة y^n من Y^n ، يكون $H(X^n | Y^n = y^n)$ إنتروبي عادي. يُفك ترميز العينة المستقبلة y^n إلى \tilde{x}^n ويكون احتمال الخطأ الموافق هو $\Pr(X^n \neq \tilde{x}^n | Y^n = y^n)$.

وكما في التمرين 20.2، يمكن تحديد الإنتروبي $H(X^n | Y^n = y^n)$ من الأعلى على أنه مجموع طرفين، أولاً الإنتروبي الإثنائي فيما إذا كان $X^n = \tilde{x}^n$ أم لا، وثانياً إنتروبي كافة الأخطاء $M - 1$ الممكنة في حال $X^n \neq \tilde{x}^n$ ، أي،

$$H(X|Y^n = y^n) \leq H_b(\Pr(e|y^n)) + \Pr(e|y^n) \log(M - 1)$$

مُحدَّداً $\log(M - 1)$ من الأعلى بالحد $\log M = nR$ ومُعدَّلاً على Y^n

$$(74.8) \quad H(X^n|Y^n) \leq H_b(\Pr(e)) + nR \Pr(e)$$

بدمج العلاقتين (74.8) و (75.8) نجد:

$$R - C \leq \frac{H_b(\Pr(e))}{n} + R \Pr(e)$$

وبتحديد $1/n$ من الأعلى بـ 1 نحصل على العلاقة (73.8).

إن النظرية السابقة ليست كافية تماماً، إذ إنها تبيّن أن الأخطاء اللّينية لا يمكن إهمالها عند معدلات أعلى من السعة، إلا أنها لا تستبعد أن يتسبب كل خطأ لبني بخطأ بت وحيد، وبالتالي يمكن لاحتمال خطأ البت أن ينتهي إلى الصفر فيما $n \rightarrow \infty$. وكما تُبيّن النظرية 4.3.4 من [7]، أن ذلك لا يمكن أن يحصل، لكن البرهان لا يضيف رؤية جديدة وسوف نلغيه هنا.

4.7.8 نظرية ترميز القناة الضجيجية، جزء مُتقدّم

ثمّة فكرتان خرجتان في الجزء المُتقدّم من نظرية الترميز. الأولى هي استخدام (AEP) على الأجزاء المنسجمة المشتركة $X^n Y^n$. والثانية، هي التي تُبيّن العبقرية الحقيقية لشانون. فطريقته كانت ببساطة اختيار كل كلمة رماز عشوائياً، واختيار كل حرف في كلمة الرماز ليكون مستقلاً وموزعاً بانتظام (iid) مع توزيع الدخل المُتّيد بالقناة.

قد يظن أحدنا في البدء أن كلمات الرماز يجب أن تُختار مختلفة على نحو كبير بشيء ما، لكنّ حدس شانون يقول إن الاستقلالية تكفي. يأتي بعض الحدس الأولي بكون هذا الحدس صحيحاً من ملاحظة الرمازات الإثنائية المتعامدة. هنا تختلف كل كلمة رماز بطول n عن كل كلمة أخرى بـ $n/2$ موقعاً، وهو ما يساوي عدد الفروقات المتوسط بخيار عشوائي. يأتي الحدس الأولي الآخر من حقيقة أن المعلومات التبادلية بين مجموعات الدخل والخرج ذات العدد n قد جعلت مجدها الأقصى بمُدخلات (iid). لا تسمح المدخلات المستقلّة حقيقةً بقيود ترميز، لكن اختيار عدد محدود من كلمات الرماز باستخدام توزيع (iid) يعتبر مقارنة منطقية. وعلى أية حال، تثبت النظرية التالية أن هذه المقاربة تعمل.

ليس من المنطق أن يختار المرزّ كلمات رماز على نحو عشوائي إن لم يُعرف مُفكك الترميز ماهي هذه الكلمات، لذا فإننا نتصوّر أن مُصمّم المودم يختار هذه الكلمات ويدخلها في كل من المرسل والمستقبل. من المفترض أن المصمّم يختار رمازة قبل توزيع ملايين النسخ حول العالم، لكننا لا نهتم لذلك. نحن ببساطة نأخذ معدّل الأداء العام على كل الخيارات العشوائية. وبالتالي يتألف فضاء الاحتمال من M كلمة رماز (iid) مُستقلة من لينة طولها n ، متبوعة برسالة m مُختارة على نحو عشوائي حيث $0 \leq m \leq M-1$ تدخل المرزّز. تُرسل قيمة العينة الموافقة x_m^n من كلمة الرماز ذات الترتيب m المختارة عشوائياً وتُدمج مع الضجيج لتعطي سلسلة العينة المُستقبلية y^n . يُقارن مُفكك الترميز بعد ذلك y^n مع الرسائل M المُحتملة والمختارة عشوائياً (يُعلم مُفكك الترميز x_0^n, \dots, x_{M-1}^n ، لكنه لا يعرف m) ويختار الأرجح من بينها. يبدو أننا استبدلنا مسألة بسيطة بمسألة مُعقّدة، ولكن بما أنه توجد استقلالية واضحة بين كل الحدود العشوائية، فإن المسألة الجديدة، وعلى نحو مفاجئ، بسيطة.

تُحلّل كلمات الرماز المختارة ومُخرجات القناة بمساعدة (AEP). من الأسهل، وهذه المسألة على وجه الخصوص، أن نستخدم شيئاً مختلفاً قليلاً عن AEP، يُسمى AEP القوي، غير المستخدم في الفصل 2. تم تحليل الـ AEP القوي في التمرين 28.2 ونعيده هنا. ليكن $U^n = U_1, \dots, U_n$ مجموعة مكونة من n رمزاً (iid) عشوائياً مُقطّعةً ضمن أجدية \mathcal{U} واحتمالات للحرف p_j لكل $j \in \mathcal{U}$. بعدها، ومن أجل أي $\varepsilon > 0$ ، تُعرّف المجموعة النموذجية بقوة $S_\varepsilon(U^n)$ من مجموعة العينة ذات n عنصراً على النحو التالي:

$$(76.8) \quad S_\varepsilon(U^n) = \left\{ \mathbf{u}^n : p_j(1 - \varepsilon) < \frac{N_j(\mathbf{u}^n)}{n} < p_j(1 + \varepsilon); \text{ for all } j \in \mathcal{U} \right\}$$

حيث $N_j(\mathbf{u}^n)$ عدد مرات الظهور للحرف j في المجموعة \mathbf{u}^n ذات n حداً. سنُختصر المتراجحتان في العلاقة (76.8) لتُصبحا على الشكل، (76.8) $N_j(\mathbf{u}^n) = np_j(1 \pm \varepsilon)$ ، وتصبح العلاقة

$$(77.8) \quad S_\varepsilon(U^n) = \left\{ \mathbf{u}^n : N_j(\mathbf{u}^n) = np_j(1 \pm \varepsilon); \text{ for all } j \in \mathcal{U} \right\}$$

إن المجموعة النموذجية بقوة هي المجموعة ذات n عنصراً التي من أجلها يظهر كل حرف مع التردد المناسب الصحيح تقريباً. من أجل أي ε مُعطى، يبيّن قانون الأعداد الكبيرة أن $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(N_j(U^n) = np_j(1 \pm \varepsilon)) = 1$ وبالتالي (انظر التمرين 28.8)

$$(78.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(U^n \in S_\varepsilon(U^n)) = 1$$

لندرس احتمال المجموعة المؤلفة من n عنصراً في \mathbf{u}^n . لاحظ أن $p_{U^n}(\mathbf{u}^n) = \prod_j p_j^{N_j(\mathbf{u}^n)}$. وبأخذ اللوغاريتم نجد:

$$(79.8) \quad \log p_{U^n}(\mathbf{u}^n) = -nH(U)(1 \pm \varepsilon) \quad \text{for } \mathbf{u}^n \in S_\varepsilon(U^n)$$

وبالتالي فللمجموعة النموذجية بقوة نفس الخصائص الأساسية مثل المجموعة النموذجية المعروفة في الفصل 2. وبسبب ضرورة أن يكون لكل حرف عدد نمطي من مرات الظهور، فإن له خصائص إضافية مفيدة في نظرية الترميز اللاحقة.

لندرس مجموعة مؤلفة من n زوج دخل/خرج قناة، $X^n Y^n = (X_1 Y_1), (X_2 Y_2), \dots, (X_n Y_n)$ حيث الأزواج المتعاقبة هي (iid). من أجل كل زوج XY ، لنفرض أن لكل X تابع كتلة احتمال $\{p_i P_{i,j}; i \in \mathcal{X}, j \in \mathcal{Y}\}$ حيث $P_{i,j}$ احتمال عبور القناة من الدخل i إلى الخرج j . وهو pmf المشترك لكلمة الرماز المختارة عشوائياً التي تم إرسالها والسلسلة الموافقة المستقبلية. تصبح المجموعة النموذجية بقوة $S_\varepsilon(X^n Y^n)$ المعطاة في (77.8)

$$(80.8) \quad S_\varepsilon(X^n Y^n) = \{x^n y^n: N_{ij}(x^n y^n) = np_i P_{i,j}(1 \pm \varepsilon); \text{ for all } i \in \mathcal{X}, j \in \mathcal{Y}\}$$

حيث $N_{ij}(x^n y^n)$ يمثل عدد أزواج $x y$ في $((x_1 y_1), (x_2 y_2), \dots, (x_n y_n))$ والتي فيها $x = i$ و $y = j$. عندها، تُحقّق الكلمات المرسلّة X^n والمجموعة المستقبلية Y^n ما يلي:

$$(81.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr((X^n Y^n) \in S_\varepsilon(X^n Y^n)) = 1$$

$$(82.8) \quad \log p_{X^n Y^n}(x^n y^n) = -nH(XY)(1 \pm \varepsilon) \quad \text{for } (x^n y^n) \in S_\varepsilon(X^n Y^n)$$

إن الميزة الجميلة في النموذجية القويّة هي أنه إذا كان $x^n y^n$ ضمن المجموعة $S_\varepsilon(X^n Y^n)$ ، فإن x^n يجب أن تكون ضمن $S_\varepsilon(X^n)$ و y^n يجب أن تكون ضمن $S_\varepsilon(Y^n)$. لرؤية ذلك، نفرض أن $(x^n y^n) \in S_\varepsilon(X^n Y^n)$. عندها تكون

$$N_i(x^n) = \sum_j N_{ij}(x^n y^n) \\ \in \sum_j np_i P_{i,j}(1 \pm \varepsilon) = np_i(1 \pm \varepsilon) \quad \text{for all } i$$

وبالتالي $x^n \in S_\varepsilon(X^n)$ وبنفس الطريقة نجد أن $y^n \in S_\varepsilon(Y^n)$. يمكننا الآن ذكر نظرية ترميز القناة الضحيجية وُبرهانها.

النظرية 2.7.8. لندرس القناة DMC بسعة C وليكن R أي مُعدّل ثابت بحيث $R < C$. عندها ولأي $\delta > 0$ ، ولكل أطوال اللبنة ذات الطول الكافي n ، ثمة رمازات لبنة متوفرة فيها $M > 2^{nR}$ كلمة رماز باحتمالات متساوية بحيث يُحقّق احتمال الخطأ وفق طريقة الترجيح الأعظمي ML المتراجحة $\delta > \Pr(e)$.

البرهان: كما اقترح آنفاً، درسنا احتمال الخطأ مُعدّلاً على الاختيار العشوائي للرمازات المعرف آنفاً، حيث يكون، ولأجل أي طول لبنة n ومعدّل R مُعطّين، عدد كلمات الرماز $M = \lfloor 2^{nR} \rfloor$. وبما أن رمازاً واحداً على الأقل يجب أن يكون جيداً بقدر المعدّل، يمكن برهان النظرية بإثبات أن $\Pr(e) \leq \delta$.

ستختلف قاعدة فك الترميز المستخدمة عن الترجيح الأعظمي، ولكن بما أن ML مثلي، فإن برهان أن $\Pr(e) \leq \delta$ لأي قاعدة فك ترميز سيبرهن النظرية. القاعدة التي ستستخدم هي النموذجية القويّة. أي، لأجل أي ε معطاة ليحري اختيارها لاحقاً، يُحدّد مفكك الترميز، بإعطاء y^n ، وجود \tilde{m} يقع فيها الزوج $x_m^n y^n$ ضمن $S_\varepsilon(X^n Y^n)$. إذا وجد تماماً \tilde{m} تحقق هذا الاختبار، أي الرسالة المفكوكة؛ تكون تلك الرسالة المفكوكة بالتأكيد خطأ، إذا اختلفت \tilde{m} عن الرسالة المرسلّة m . إذا لم تحقق \tilde{m} أو مضاعفات \tilde{m} الاختبار آنف الذكر، يُعدّ الكشف أيضاً خطأ، ومن ثم فإن القيمة الحقيقية المفكوكة في هذه الحالات غير هامة في البرهان. يُحدّد احتمال الخطأ، لأي رسالة m مُرسلة، من الأعلى بشرطين، الأول $\Pr(X^n Y^n \notin S_\varepsilon(X^n Y^n))$ حيث $X^n Y^n$ هما الزوج المرسل/المستقبل، والثاني، احتمال أن تكون كلمة رماز أخرى نموذجية على نحو مشترك مع Y^n . إن كلمات الرماز الأخرى مُستقلّة عن Y^n واختيرت كل واحدة بـرموز (iid) باستخدام نفس ال pmf كما في كلمة الرماز المرسلّة. لنفرض \bar{X}^n إحدى هذه الكلمات. باستخدام حدود الاجتماع نجد،

$$(83.8) \quad \Pr(e) \leq \Pr((X^n Y^n) \notin S_\varepsilon(X^n Y^n)) + (M - 1)\Pr(\bar{X}^n Y^n \in S_\varepsilon(X^n Y^n))$$

من أجل قيم n كبيرة على نحو كافي، تُبيّن (81.8) أن الحد الأول يساوي بحده الأقصى $\delta/2$. كما إن $M - 1 \leq 2^{nR}$. وبالتالي:

$$(84.8) \quad \Pr(e) \leq \frac{\delta}{2} + 2^{nR} \Pr((\bar{X}^n Y^n) \in S_\varepsilon(X^n Y^n))$$

لتحليل الحد الثاني من العلاقة، نُعرّف $F(\mathbf{y}^n)$ على أنه مجموعة سلاسل الدخل x^n النموذجية على نحو مشترك مع \mathbf{y}^n المعطاة. تكون هذه المجموعة فارغة إذا كان $\mathbf{y}^n \notin S_\varepsilon(Y^n)$. لاحظ أنه من أجل $\mathbf{y}^n \in S_\varepsilon(Y^n)$ تكون،

$$p_{Y^n}(\mathbf{y}^n) \geq \sum_{x^n \in F(\mathbf{y}^n)} p_{X^n Y^n}(x^n \mathbf{y}^n) \geq \sum_{x^n \in F(\mathbf{y}^n)} 2^{-nH(XY)(1+\varepsilon)}$$

حيث تأتي اللامساواة الأخيرة من العلاقة (82.8). وبما أن $p_{Y^n}(\mathbf{y}^n) \leq 2^{-nH(Y)(1-\varepsilon)}$ وذلك من أجل $\mathbf{y}^n \in S_\varepsilon(Y^n)$ ، نستنتج أن عدد المجموعات n في $F(\mathbf{y}^n)$ لأي \mathbf{y}^n نموذجية تُحقّق

$$(85.8) \quad |F(\mathbf{y}^n)| \leq 2^{n[H(XY)(1+\varepsilon) - H(Y)(1-\varepsilon)]}$$

هذا يعني أن احتمال أن تقع \bar{X}^n ضمن $F(\mathbf{y}^n)$ هو في حدّه الأعلى $|F(\mathbf{y}^n)|$ مرةً الاحتمال الأعظمي لـ \bar{X}^n النموذجية (تذكر أن \bar{X}^n مُستقلّة عن Y^n ولكنّها لها نفس التوزيع الحايّ لـ X^n). ومن ثمّ فإنّ

$$\begin{aligned} \Pr((\bar{X}^n Y^n) \in S_\varepsilon(X^n Y^n)) &\leq 2^{-n[H(X)(1-\varepsilon) + H(Y)(1-\varepsilon) - H(XY)(1+\varepsilon)]} \\ &= 2^{-n\{C - \varepsilon[H(X) + H(Y) - H(XY)]\}} \end{aligned}$$

حيث استخدمنا حقيقة أن: $C = H(X) - H(X|Y) = H(X) + H(Y) - H(XY)$ ويتبدّل ذلك في العلاقة (84.8)، نجد

$$\Pr(e) \leq \frac{\delta}{2} + 2^{n[R - C + \varepsilon\alpha]}$$

حيث $\alpha = H(X) + H(Y) + H(XY)$. أخيراً، باختيار $\varepsilon = (C - R)/(2\alpha)$ ، ويُصبح من أجل قيم n كبيرة إلى حدّ كافٍ:

$$\Pr(e) \leq \frac{\delta}{2} + 2^{-n(C-R)/2} \leq \delta$$

إن البرهان الآنف هو البرهان الأساسي الذي قدّمه شانون، مع القليل من الشروحات والتفاصيل المضافة. من المفضّل شرح فحوى البرهان دون أي من الإيسيلون أو الدلتا. إن أزواج المجموعة n المرسلّة والمستقبلة أي $(X^n Y^n)$ نموذجية باحتمال كبير، ولأزواج النموذجية عادة الاحتمال $2^{-nH(XY)}$ (متضمنة كلاً من الاختيار العشوائي لـ X^n والضجيج العشوائي). ولكل خرج نمطيّ \mathbf{y}^n عادة احتمال حايّ $2^{-nH(Y)}$. ومن أجل كل X^n نمطيّة، يوجد بشكل رئيس $2^{nH(X|Y)}$ مُدخلاً من مجموعات n نمطيّة على نحو مشترك مع \mathbf{y}^n (وهذا هو جوهر البرهان). يحدث الخطأ إذا اختيرت إحدى هذه المجموعات لتكون كلمة رماز (غير كلمة الرماز التي أُرسلت فعلياً). وبما أن n مجموعة $2^{nH(X)}$ نمطيّة بالإجمال، فإن جزءاً منها $2^{-nI(X;Y)} = 2^{-nC}$ نمطيّ على نحو مشترك مع \mathbf{y}^n المستقبلية. تزوّدنا براهين حديثة لنظرية ترميز القناة الضجيجية بحدود عليا أفضل لاحتمال الخطأ. تتناقص هذه الحدود أُسيّاً مع n وبمعدّل تناقص يُصبح صغيراً جداً إلى حدّ مُهمَل فيما $C \rightarrow R$.

5.7.8 نظرية ترميز القناة الضجيجية في حال الضجيج الغوسي الأبيض

يمكن توسيع نظرية الترميز للأقنية DMC لتشمل الأقنية المقطّعة زمنياً بأبجدية مُدخلات ومُخرجات حقيقية أو عُقديةً كيفية، لكنّ القيام بذلك بتعميم ودقة رياضيين صعب بأدواتنا في الوقت الراهن.

قمنا بذلك هنا للقناة الغوسية المقطّعة زمنياً، والتي توضّح الشروط التي يكون التعميم سهلاً بمقتضاها. ليكن X_k و Y_k دخل وخرج القناة في الزمن k ، ولنفرض أنّ $Y_k = X_k + Z_k$ حيث $Z_k \sim \mathcal{N}(0, N_0/2)$ مُستقل عن X_k ومُستقل عن الإشارة والضجيج في كل الأوقات. ولنفرض أنّ الدخل مُقيّد في اللحظة الثانية للقيمة $E[X_k^2] \leq E$ ، ومن ثمّ يكون $E[Y_k^2] \leq E + N_0/2$. من التمرين 3.8، يُحدّد الانتروبي التفاضلي لـ Y من الأعلى بـ:

$$(86.8) \quad h(Y) \leq \frac{1}{2} \log (2\pi e(E + N_0/2))$$

تُحقَّق هذه العلاقة على نحو متساوٍ إذا كانت $Y \sim \mathcal{N}(0, E + N_0/2)$ وبالتالي إذا كانت $X \sim \mathcal{N}(0, E)$. ومن أجل أي دخل x مُعطى يكون، $h(Y|X = x) = \frac{1}{2} \log(2\pi e N_0/2)$ ، وبأخذ المعدَّل على فضاء الدخل نجد:

$$(87.8) \quad h(Y|X) = \frac{1}{2} \log(2\pi e N_0/2)$$

وعلى نحو مُماثل لحالة القناة DMC، نُعرِّف السعة C (بت لكل استخدام قناة) على أنها القيمة العظمى لـ $h(Y) - h(Y|X)$ مُرتهنة بمقيّد اللحظة الثانية E . بدمج العلاقتين (86.8) و(87.8) نجد

$$(88.8) \quad C = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{2E}{N_0} \right)$$

تُطبَّق النظرية 2.7.8 ببساطة على هذه الحالة. فمن أجل أي قيمة معطاة لـ R بالبت لكل استخدام قناة، وبحيث $R < C$ ، يُمكن تكميم فضاء دخل وخرج القناة على نحو ناعم بحيث تُصبح السعة المقطَّعة الموافقة قريبة من C وبشكل خاص أكبر من R . عندها تُطبَّق النظرية 2.7.8، ويمكن إرسال مُعدَّلات قريبة كفيماً من C بموثوقية عالية. يمكن أيضاً توسيع عكس نظرية الترميز.

أما من أجل قناة الضجيج الغوسي الأبيض WGN المقطَّعة زمنياً والتي تستخدم $2W$ مركبة متعامدة في الثانية ومُقيّدة باستطاعة P ، يُصبح التقييد لكل مُركَّب متعامد $E = P/(2W)$ ¹³⁵ وتُصبح السعة C_t المقاسة بالبت في الثانية هي صيغة شانون الشهيرة

$$(88.8) \quad C_t = W \log \left(1 + \frac{P}{W N_0} \right)$$

هذه هي إذاً سعة قناة الضجيج الغوسي الأبيض WGN مع تقييد في استطاعة الدخل لـ P وتقييد للمركبات المتعامدة في الثانية لـ $2W$. وباستقراء هذه النتيجة بعناية، نجد أنها أيضاً تُمثِّل سعة قناة مستمرة زمنياً ومُقيّدة بعرض حزمة W باستطاعة P . تكمن المشكلة هنا في أنه إذا كان الدخل مُقيّداً جداً بعرض الحزمة، فلا يمكن إرسال معلومات البتّة. أي، إذا أُدخل بت واحد إلى القناة عند الزمن 0 ، فإن الفرق في الموجة المشكَّلة بالرمز 1 والموجة المشكَّلة بالرمز 0 يجب أن يكون 0 قبل الزمن 0 ، وبالتالي، وبحسب نظرية باي - فاينر، لا يمكن أن يكون غير صفر ومُحدَّد بصرامة في عرض الحزمة. لا يبدو هذا الأمر ذا معنى من وجهة نظر هندسية، إذ إنّ للموجات المستخدمة في كافة النظم الهندسية استطاعة مُهملة ولكنها لا تساوي الصفر خارج عرض الحزمة الاسمي.

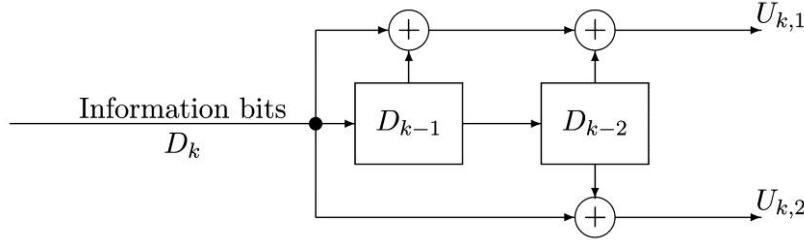
بالتالي، لاستخدام العلاقة (89.8) لدخل محدود الحزمة، من الضروري البدء بالتقييد الذي يحدد أنه لأجل أي $\eta > 0$ ، فإن جزء $(\eta - 1)$ من الطاقة على الأقل يجب أن يقع ضمن عرض الحزمة W . عندها يصبح الاتصال الموثوق ممكناً عند أي مُعدَّل R_t مُعطى بالبت في الثانية وأقل من C_t المعطاة في العلاقة (89.8). وبما أن هذا صحيح لأجل كل قيم $\eta > 0$ ، مهما كانت صغيرة، فمن المنطق أن ندعوها سعة قناة الضجيج الغوسي الأبيض WGN المحدودة الحزمة. ولا يعتبر هذا الأمر قضية في تصميم نظام الاتصال، لأنه لا بدّ من استخدام المرشحات المعروفة على نحو واسع بأنها لا يمكن أن تكون محدودة الحزمة تماماً.

8.8 الرمازات العودِيَّة (التلافِيَّة)

تُرَكِّز نظرية الترميز، وعلى وجه الخصوص مُبرهنات الترميز، على الرمازات اللَّبْنِيَّة، لكنَّ الرمازات العودِيَّة تُستخدم أيضاً على نحو واسع وليس لها بشكلٍ أساسي هيكليَّة لبنيَّة. يمكن استخدام هذه الرمازات سواء كان عرض الحزمة مُقيّداً أم لا. سنُعطي مثالاً فيما يلي حيث لكل بت دخل هناك بتان خرج. يقال عن مثل هذا الرماز إن له مُعدَّل $1/2$ (مُعطي بعدد بتات الدخل لكل بت قناة). وعلى نحو أعمّ، تُعطي مثل هذه الرمازات مجموعة مؤلفة من m عنصراً من بتات الخرج لكل مجموعة مؤلفة من b عنصراً من بتات الدخل ولأي عدد صحيح كفي يحقّق $0 < b < m$. يقال عن مثل هذه الرمازات أن لها مُعدَّل b/m .

¹³⁵ كنا متهاونين في عدم توصيف إذا كان القيد مُحققاً لكل مركب متعامد أو كلياً كمعدَّل زمني. ليس من الصعب أن نبين، على أية حال، أن المعلومات المتبادلة تكون بعدها الأقصى عند استخدام نفس الطاقة في كل مركب متعامد.

يشبه الرمز العودي إلى حد كبير المرشح المقطع. ولكن بدلاً من أن يكون لدينا تسلسل دخل واحد وتسلسل خرج واحد، لدينا هنا b تسلسل دخلاً و m تسلسل خرج. وللمثال المعطى هنا فإن عدد تسلسلات الدخل $b = 1$ وعدد تسلسلات الخرج $m = 2$ ، وبالتالي يُعطي بيّي خرج لكل بت دخل. ثمة اختلاف آخر بين الرمز العودي والمرشح المقطع؛ المدخلات والمخرجات في الرمز العودي إثنائية ويجري الجمع وفق المقاس 2. لندرس المثال أدناه في الشكل 8.8.



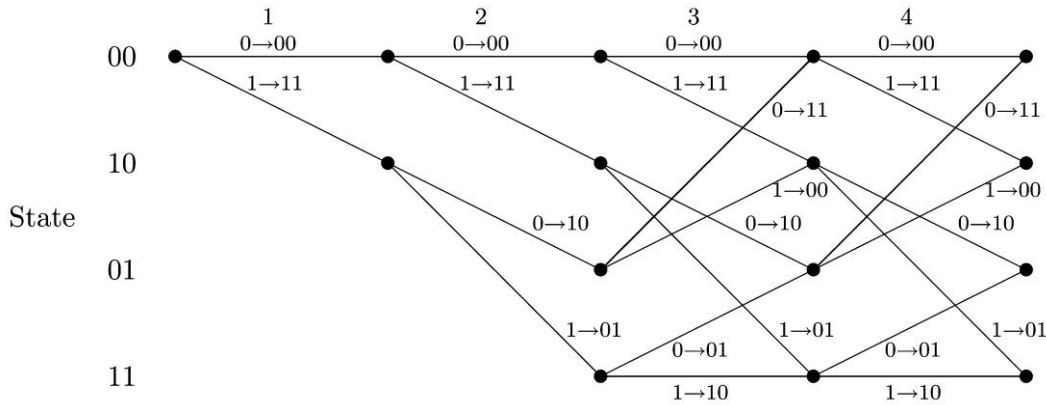
الشكل 8.8: مثال عن الرمز العودي

إن معادلات المخرجات للمثال الآنف هي

$$U_{k,1} = D_k \oplus D_{k-1} \oplus D_{k-2}$$

$$U_{k,2} = D_k \oplus D_{k-2}$$

ومن ثمّ فإن تيارَي الخرج هما عوديان خطيّان مقاس 2 لتيار الدخل. يُمكن تمثيل هذا الزوج المرّمز من تيارين إثنائيين بزواج من تيار إشارة من مثل الإشارات المتعاكسة القطبية $\pm a$. يمكن لهذا الزوج من تسلسل الإشارة أن يُحشر ويُعدّل بتيار إشارة من نبضات نايكويست بضعف المعدّل. يُمكن بعدها تعديل إشارة الحزمة القاعدية هذه إلى حزمة الترميز وإرسالها. يمكن بسهولة رؤية بنية هذا الرمز على أنّها مخطط "عريشة تشابكية" كما هو مُبيّن في الشكل 9.8.



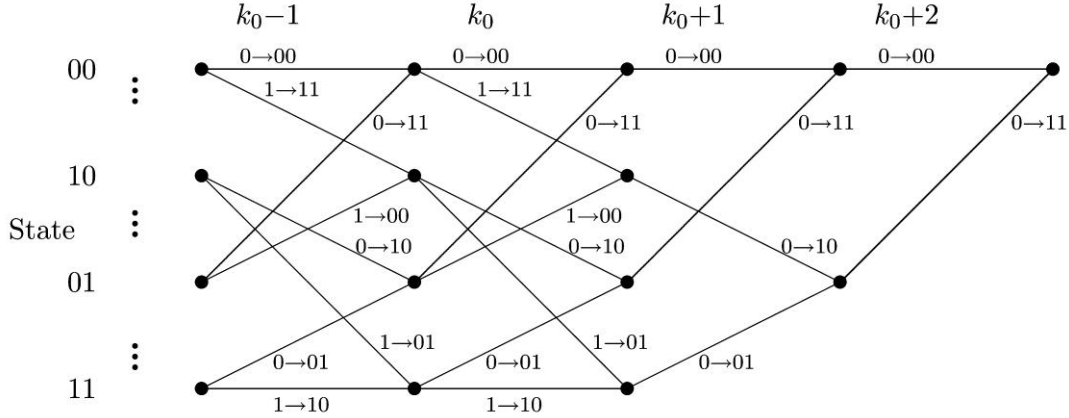
الشكل 9.8: مخطط العريشة المتشابكة: جرى عَنونة كل عملية انتقالية بالدخل والخرج الموافق.

ولفهم مخطط العريشة التشابكية هذا، لنلاحظ من الشكل 8.8 أنه جرى توصيف المرّمز عند كل فترة k بالأرقام الإثنائية السابقة، D_{k-1} و D_{k-2} . لذا فإن للمرّمز أربع حالات مُحتملة، موافقة لأربع قيم مُحتملة من الزوج D_{k-1}, D_{k-2} . وبإعطاء أي من هذه الحالات الأربع، فإن خرج المرّمز والحالة التي تلي تعتمدان على الدخل الإثنائي الحالي. يُبيّن الشكل 9.8 هذه الحالات الأربع مرتبة عمودياً ويظهر الزمن أفقياً. نفرض أن المرّمز ابتداءً عند الفترة 0 ب $D_{-1} = D_{-2} = 0$.

في الترميز العودي للمثال السابق، يعتمد الخرج في اللحظة k على الدخل الحالي وعلى المدخلين السابقين. في هذه الحالة يكون طول قيد الرمز 2. في العموم، يمكن أن يعتمد الخرج على الدخل وعلى المدخلات n السابقة، ويُعرّف طول القيد عندها على أنه n . إذا كان طول القيد n (ودخل المرّمز رقم إثنائي مُفرد عند كل فترة k)، عندها يكون هناك 2^n حالة مُحتملة، ويحتوي مخطط العريشة المتشابكة على 2^n عقدة في كل لحظة زمنية بدلاً من أربع عقدة.

وكما شرحنا الرمازات العوديّة آنفاً، يبدأ الترميز عند الزمن 1 ويتابع باستمرار. عملياً، وبسبب رزم المعطيات وأسباب أخرى متنوعة،

يتوقف المرز بعد ترميز عدد كبير، لنُقل k_0 ، من الأرقام الإثنائية. بعد أن تدخل D_{k_0} إلى المرز، يدخله صفران أخيران، في الفترتين $(k_0 + 1)$ و $(k_0 + 2)$ ، ويخرج من المرز أربعة أرقام مُرمّزة أخيرة. وهذا يعيد المرز إلى الحالة 0، والتي كما سنرى لاحقاً، مهمة جداً لفك الترميز. ومن أجل الحالة العامة بطول قيد n ، نحتاج إلى n صفرًا أخيراً لإعادة المرز إلى الحالة 0. إجمالاً، يؤدي k_0 مُدخلًا إلى $2(k_0 + n)$ مُخرجًا، بمعدّل ترميز $k_0/[2(k_0 + n)]$. وحيث إن k_0 عادة كبيرة مقارنة مع n ، سنظل ندعو هذا الرمز رمزاً ذا معدّل 1/2. يبيّن الشكل 10.8 الجزء من مخطط العريشة المتشابكة الموافق لهذه النهاية.



الشكل 10.8: توصيل النهاية في ترميز العريشة المتشابكة.

1.8.8 فك ترميز الرمازات العودية

إن طريقة فك ترميز الرماز العودي هي بشكل رئيس نفس طريقة استخدام نظرية الكشف للاختيار بين كل زوج من كلمات الرماز، وبعدها اختيار أفضل الكلمات (نفس الذي تم للرماز المتعامد). ثمة فرق بسيط في المعنى يتمثل، من حيث المبدأ، في أن الترميز يستمر على نحو دائم. عند إنهاء الرماز، لا يبقى وجود لهذه المشكلة، ومن حيث المبدأ نأخذ الترجيح الأعظمي لكل كلمات الرماز المتاحة (ذات الطول المحدود).

وكما هي العادة، نفرض أن الأرقام الإثنائية الداخلة هي (iid) ومتساوية الاحتمالات. يبدو هذا معقولاً إذا كان تسلسل البتات قد جرى ترميزه مُصدرياً. هذا يعني أن كلمات الرماز لأي طول مُعطى متساوية، مما يبرر فك الترميز بطريقة الترجيح الأعظمي ML. تُستخدم قاعدة الترجيح الأعظمي ML بحيث إن الرمازات المستخدمة لتصحيح الخطأ يمكن تصميمها على نحو مستقل عن معطيات المصدر التي سُرسِل.

في كافة الرمازات قيد النقاش، يكون احتمال الخطأ باستخدام فك الترميز وفق قاعدة الترجيح الأعظمي ML مستقل عن كلمة الرماز المرسل. ولهذا تُعتبر طريقة الترجيح الأعظمي متينة من حيث إن احتمال الخطأ مستقل عن احتمال توزع البتات الداخلة. القضية الأخرى، بوجود مُدخلات (iid)، هي تحديد ماذا نعني باحتمال الخطأ. في كل الأمثلة آنفة الذكر، وبإعطاء تسلسل رموز مُستقبل، حاولنا اختيار كلمة الرماز التي تجعل احتمال الخطأ أصغر ما يمكن لكافة كلمات الرماز. الحل البديل هو في جعل احتمال الخطأ، وعلى نحو منفصل، لكل رقم معلومات إثنائي أقل ما يمكن. وقد تبين أن الأسهل هو جعل احتمال خطأ التسلسل أصغر ما يمكن وليس احتمال خطأ البت. وهذا في الحقيقة ما يحدث عند استخدامنا قاعدة الترجيح الأعظمي ML بين كلمات الرماز، كما اقترح آنفاً. عند فك الترميز بهدف تصحيح الخطأ، لا يختلف الهدف كثيراً عن جعل احتمال خطأ التسلسل أصغر ما يمكن. وإضافة إلى السهولة المقترحة آنفاً، ثمة سبب رئيس يتمثل في أن الدخل الإثنائي عادة ما يكون نسخة مُرمّزة المصدر لتسلسل مُصدري آخر أو إشارة أخرى، وبالتالي فإن خطأ واحداً في الخرج خطير بقدر خطر عدة أخطاء ضمن كلمة الرماز. سنفترض استخدام قاعدة الترجيح الأعظمي ML فيما يلي.

2.8.8 خوارزمية فيتري

تعتبر خوارزمية فيتري خوارزمية لتنفيذ كشف الرمازات العودية وفق قاعدة الترجيح الأعظمي ML. لنفرض حالياً أن الرماز قد أنهى وفق الشكل 10.8. وسنرى قريباً أن لا فرق إن أنهى الرماز أم لم يُنه. سنقوم الآن بشرح الخوارزمية للمثال السابق وبافتراض ضجيج غوصي أبيض؛ سيكون التوسع نحو الرمازات العودية الكيفية واضحاً، فيما عدا تعقيد الرموز في الحالة العامة. من أجل أي دخل مُعطى d_1, \dots, d_{k_0} ، ليكن التسلسل المرّمز $v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,2}, \dots, v_{k_0+2,2}$. هناك 2^{k_0} كلمة رماز مُحتملة، موافقة لـ 2^{k_0} مجموعة إثنائية مؤلفة من k_0 عنصراً d_1, \dots, d_{k_0} ، ومن غير المعقول لفك الترميز أن نقارن الترجيح لكل من كلمات الرماز هذه. فمن أجل قيم كبيرة لـ k_0 ، وحتى باستخدام التقنيات الحديثة، ستكون هذه المقاربة مكلفة. وقد تبين، على أية حال، أن استخدام بنية العريشة المتشابكة التي في الشكل 9.8 يمكنه تبسيط فك هذا الترميز على نحو كبير.

يوافق كل مُدخل d_1, \dots, d_{k_0} (أي كل كلمة رماز) مساراً معيناً عبر العريشة للفترة من 1 وحتى $k_0 + 2$ ، وكل مسار، في كل فترة k ، يوافق حالة عريشة خاصة. لندرس المسارين d_1, \dots, d_{k_0} و d'_1, \dots, d'_{k_0} عبر العريشة والذين يُمزّان بنفس الحالة في الزمن k^+ (أي الزمن المباشر بعد تعيّر الدخل والحالة في الفترة k) ويبقيان معاً من ذلك الحين فصاعداً. وبما أن المسارين في نفس الحالة عند الزمن k^+ ، ولهما نفس المدخلات بعد هذا الزمن، فإن لهما نفس مُخرجات الترميز بعد هذا الزمن. بالتالي $u_{k+1,i}, \dots, u_{k_0+2,i} = u'_{k+1,i}, \dots, u'_{k_0+2,i}$ من أجل $i = 1, 2$.

بما أن كل خرج قناة (شعاع عشوائي) $V_{k,i}$ يُعطى بالعلاقة $V_{k,i} = U_{k,i} + Z_{k,i}$ وبما أن متغيرات الضجيج الغوصي $Z_{k,i}$ مُستقلة، هذا يعني أنه من أجل أي خرج قناة $v_{1,1}, \dots, v_{k_0+2,2}$ يكون:

$$\frac{f(v_{1,1}, \dots, v_{k_0+2,2} | d_1, \dots, d_{k_0})}{f(v_{1,1}, \dots, v_{k_0+2,2} | d'_1, \dots, d'_{k_0})} = \frac{f(v_{1,1}, \dots, v_{k_2} | d_1, \dots, d_{k_0})}{f(v_{1,1}, \dots, v_{k_2} | d'_1, \dots, d'_{k_0})}$$

بكلمات صريحة، إذا اندمج مساران في الزمن k^+ وبقياً معاً من ذلك الحين، فإن نسبة الترجيح تعتمد فقط على زوج الخرج k الأول. وبالتالي إذا تجاوز الجانب الأيمن الـ 1، يكون عندها d_1, \dots, d_{k_0} أكثر ترجيحاً من d'_1, \dots, d'_{k_0} . يبقى هذه الاستنتاج صحيحاً بقطع النظر عن الطريقة التي اختيرت فيها المدخلات الأخيرة d_{k+1}, \dots, d_{k_0} .

سنرى بعد ذلك أنه عندما يندمج مساران عند عقدة، بقطع النظر عن ماهية باقي المسار، فإن المسار الأكثر ترجيحاً من بين المسارات هو المسار الأكثر ترجيحاً عند نقطة الاندماج. وبالتالي فكلما اندمج مساران، يمكننا استبعاد المسار الأقل ترجيحاً عند تلك النقطة. إن إجراء هذا الاستبعاد على نحو متتابعي بدءاً من قيم k الصغرى التي تندمج عندها المسارات (3 للمثال المدروس) يبقى فقط مسار واحد لكل حالة عند كل فترة.

ولنكون أكثر تحديداً، لنفرض $h(d_1, \dots, d_k)$ هي الحالة في الزمن k^+ بدخل d_1, \dots, d_k . وللمثال تكون $h(d_1, \dots, d_k) = (d_1, \dots, d_k)$ ، ولنفرض أن:

$$f_{\max}(k, s) = \max_{h(d_1, \dots, d_k) = s} f(v_{1,1}, \dots, v_{k,2} | d_1, \dots, d_k)$$

يمكن بعد ذلك حساب هذه الكميات على نحو تكراري لكل حالة ولكل زمن k بالتكرار:

$$(90.8) \quad f_{\max}(k+1, s) = \max_{r: r \rightarrow s} f_{\max}(k, r) \cdot f(v_{k,1} | u_1(r \rightarrow s)) \cdot f(v_{k,2} | u_2(r \rightarrow s))$$

حيث يجري تحقيق الحد الأقصى على مجموعة الحالات r التي لها انتقال إلى s في العريشة وتمثل $u_1(r \rightarrow s)$ و $u_2(r \rightarrow s)$ مُخرجي المرّمز الموافقين للانتقال من r إلى s .

يمكن تبسيط العلاقة (للضجيج الغوصي الأبيض WGN) بأخذ اللوغاريتم، والمتناسب مع مربع المسافة السالبة بين v و u . ومن أجل حالة الإشارة المتعكسة القطبية في المثال، يمكن ببساطة تبسيطها أكثر بأخذ الجداء التّقطي بين v و u . ليكن $L(k, s)$ هو الجداء التّقطي.

$$(91.8) \quad L(k+1, s) = \max_{r: r \rightarrow s} L(k, r) \cdot f(v_{k,1} | u_1(r \rightarrow s)) + v_{k,2} u_2(r \rightarrow s)$$

هذا يعني أنه من الضروري في كل فترة $(k + 1)$ ، أن نحسب الجداء الداخلي في العلاقة (91.8) لكل رابط في العريشة بين k و $k + 1$. كما يجب جعلها بالحد الأقصى على r لكل حالة s في الفترة $k + 1$. يجب تخزين القيمة العظمى على الشكل $L(k + 1, s)$ لكل s . يجب أيضاً تخزين المسارات التي أتت للوصول إلى كل نقطة اندماج.

سيُميز الخبراء في البرمجة الديناميكية (الفعالة) هذه الطريقة بوصفها مثلاً لمبدأ البرمجة الفعالة. إن الحساب الكلي لفك ترميز لينة مؤلفة من k_0 بت معلومات يتناسب مع $4(k_0 + 1)$. في الحالة الأكثر عموماً عندما يكون طول قيّد المرمز العودي n بدلاً من 2، فإن هناك 2^n حالة ويصبح الحساب متناسباً مع $2^n(k_0 + 1)$. تُستعمل خوارزمية فيتربي عادة في حالات يكون فيها طول القيد معتدلاً، لنقل من 6 إلى 12، وفي هذه الحالات يكون الحساب معتدلاً خاصة بالمقارنة مع 2^{k_0} .

لا ينتظر أحدنا عادة نهاية اللينة ليبدأ فك الترميز. عندما يتم الحساب الآنف عند الفترة k ، فإن كافة المسارات لغاية k' قد دُججت ل k' الأقل ببضعة أطوال قيّد من k . في هذه الحالة يمكننا فك الترميز دون قيد على k_0 ، وينظر إلى احتمال الخطأ بوصفه "أحداث خطأ" وليس خطأ لينة.

9.8 الخلاصة

حلَّ هذا الفصل آخر مقطع رئيس من نظام اتصال عام نقطة إلى نقطة بوجود ضجيج، أي كيف نكشف إشارات الدخل من النسخة الضجيجية الموجودة في الخرج. كان التركيز بشكل رئيس على الكشف لوحده، أي كان الافتراض بأن باقي النظام مُصمَّم وأن المسألة المتبقية هي كيف نستخلص الإشارات.

في العموم، تُعتبر مسألة الكشف ضمن هذا المفهوم بديهية. أي، بافتراض أن إحصائيات الدخل والضجيج معروفة، فإن المسألة المنطقية هي فك ترميز وفق الاحتمال البعدي الأعظمي: أوجد الاحتمال البعدي لكافة الفرضيات واختَر الأكبر. تبدو هذه الطريقة معقدة إلى حدِّ ما بأسئلة من قبيل هل نجري كشف تسلسل أم كشف بت، لكن هذه الأسئلة هي تفاصيل إلى حدِّ ما.

عند مستوى أكثر تحديداً، أدت مسألة الكشف إلى كثير من الرؤى وعمليات التبسيط المثيرة للاهتمام، خاصة بالنسبة إلى قنوات الضجيج الغوسي الأبيض WGN. إن أهم عملية تبسيط على وجه الخصوص هي مبدأ اللاأهمية، والذي ينص على أنه يمكن إهمال مُركبات الموجة المستقبلية المتعامدة التي لا تحمل الإشارة موضوع الاهتمام (أو الإشارات ذات الصلة إحصائياً)، وذلك في أثناء كشف هذه الإشارات. بكلمات أخرى، يمكن استعمال المرشحات التوافقية لاستخلاص المركبات المتعامدة المعنية.

قدَّم الجزء الأخير من الفصل الترميز وفك الترميز. تغيَّر التركيز هنا من فك ترميز/كشف إلى مسألة كيف يمكن للترميز أن يُغيَّر شكل إشارات الدخل بحيث يجعل فك الترميز أكثر فاعلية. بكلمات أخرى، يمكن تصميم كاشف احتمال بعدي أعظمي MAP لأي بنية إشارة، لكن المسألة الحقيقية هي في تصميم كل من بنية الإشارة والكشف لأداء فعَّال.

عند هذه النقطة، برزت نظرية ترميز القناة الضجيجية. فإذا كان $R < C$ ، يمكن عندها تخفيض احتمال الخطأ على نحو كافيّ بزيادة طول اللَّبنة (أو طول القيد في حالة الرمazes العودية). هذا يعني عدم وجود حل "أمثلي" للمسألة المشتركة باختيار بنية الإشارة والكشف، ولكن ثمة مقايضة بين احتمال الخطأ، والتأخير، والتعقيد.

ولهذا فإن المسألة يجب أن تتضمن ليس فقط التغلُّب على الضجيج، وإنما إجراء ذلك مع القليل من التأخير والتعقيد. يدرس الفصل التالي بعض هذه المسائل في سياق الاتصال اللاسلكي.

A8 ملحق: اختبارات العتبة لنيمان بيرسون Neyman-Pearson

رأينا سابقاً أن أي اختبار اثنائي وفق الاحتمال البعدي الأعظمي MAP يمكن صياغته على أنه مقارنة لنسبة الترجيح بوجود عتبة. وقد وجد أنه يمكن النظر إلى كثير من قواعد الكشف الأخرى على أنها اختبارات عتبة على نسب الترجيح. إن أحد أهم مسائل الكشف الإثنائي الذي يغدو فيها اختبار العتبة أمثلياً على نحو رئيس هو اختبار نيمان بيرسون. ويستخدم عادة في الحالات التي لا توجد فيها طريقة مقبولة لاختيار الاحتمالات القبلية. في اختبار نيمان بيرسون، توضع قيمة مقبولة α لاحتمال $\{e|U = 1\}$ ، مُرتبطة بالقيود $\Pr\{e|U = 1\} \leq \alpha$ واختبار نيمان بيرسون هو اختبار يجعل قيمة $\Pr\{e|U = 0\}$ بحددها الأدنى. وسنُبيّن فيما يلي أن مثل هذا الاختبار هو بشكل رئيس اختبار عتبة. وقبل أن نعرض هذا، نحتاج إلى بعض المصطلحات والتعريفات.

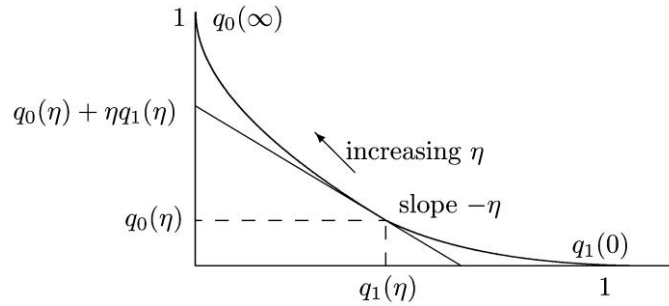
سنعرّف $q_0(\eta)$ على أنها $\Pr\{e|U = 0\}$ من أجل اختبار عتبة ذي عتبة η حيث $0 < \eta < \infty$. وبطريقة مماثلة نُعرّف $q_1(\eta)$ على أنها $\Pr\{e|U = 1\}$. إذا فمّن أجل $0 < \eta < \infty$.

$$(92.8) \quad q_0(\eta) = \Pr\{\Lambda(V) < \eta | U = 0\}; \quad q_1(\eta) = \Pr\{\Lambda(V) < \eta | U = 1\}$$

نُعرّف $q_0(0)$ على أنها $\lim_{\eta \rightarrow 0} q_0(\eta)$ ونُعرّف $q_1(0)$ على أنها $\lim_{\eta \rightarrow 0} q_1(\eta)$. من الواضح أن $q_0(0) = 0$ وفي الحالات النمطية $q_1(0) = 1$. وعلى نحو أعم $q_1(0) = \Pr\{\Lambda(V) > 0 | U = 1\}$. بكلمات أخرى تكون $q_1(0)$ أقل من الواحد إذا كان ثمة مجموعة من المشاهدات المستحيلة ضمن $U = 0$ لكن لها احتمالاً موجباً ضمن $U = 1$. بطريقة مماثلة نُعرّف $q_0(\infty)$ على أنها $\lim_{\eta \rightarrow \infty} q_0(\eta)$ و نُعرّف $q_1(\infty)$ على أنها $\lim_{\eta \rightarrow \infty} q_1(\eta)$. لدينا $q_1(\infty) = 0$ و $q_0(\infty) = \Pr\{\Lambda(V) < \infty\}$.

أخيراً، من أجل أي اختبار كيفي A ، بعتبة أو بدون، ندلّ على $\Pr\{e|U = 0\}$ بأنها $q_0(A)$ ، و $\Pr\{e|U = 1\}$ بأنها $q_1(A)$.

باستخدام العلاقة (92.8)، يمكننا أن نرسم بيانياً $q_0(\eta)$ و $q_1(\eta)$ بوصفها توابع برامترية لـ η ؛ ونسمّي هذا الرسم منحنى الخطأ.¹³⁶ يبيّن الشكل 11.8 منحنى الخطأ هذا لمسألة كشف نمطية مثل التي في (17.8) و (18.8) لإشارات إثنائية متعكسة القطبية. لقد شاهدنا أنه، ومع زيادة η ، تتناقص مجموعة القيم v الممتثلة في $\bar{U} = 0$ وبالتالي زيادة $q_0(\eta)$ وإنقاص $q_1(\eta)$. لذا، ومع زيادة η من 0 إلى ∞ ، ينتقل المنحنى في الشكل 11.8 من اليمين الأخفض إلى اليسار الأعلى.



الشكل 11.8: منحنى الخطأ؛ $q_0(\eta)$ و $q_1(\eta)$ كتوابع برامترية لـ η

يبيّن الشكل 11.8 أيضاً خط مستقيم يُمثّل الميل $-\eta$ عند النقطة $(q_1(\eta), q_0(\eta))$ على منحنى الخطأ. تُبين الفرضية المساعدة التالية أهمية هذا الخط.

الفرضية 1: من أجل كل η ، حيث $0 < \eta < \infty$ ، فإن خط الميل $-\eta$ عند النقطة $(q_1(\eta), q_0(\eta))$ إما أنه يمرّ بكافة النقاط $(q_1(\eta'), q_0(\eta'))$ على منحنى الخطأ أو يقع تحتها، كما أنه يقع تحت $(q_1(A), q_0(A))$ من أجل كافة الاختبارات A . قبل برهان هذه الفرضية، سنعطي مثلاً عن منحنى الخطأ لفضاء رصد مُقطّع.

مثال عن الرصد المُقطّع: يبيّن الشكل 12.8 منحنى الخطأ لمثالٍ مُثلّت فيه الفرضيتان 0 و 1 كما يلي: $0 \rightarrow +a$ و $-a \rightarrow 1$. لنفرض أن الرصد V يأخذ فقط أربع قيم مُقطّعة هي: $+3$ ، $+1$ ، -1 ، و -3 . يُعطي الشكل الاحتمالات لكل قيمة من هذه القيم شرطية على

¹³⁶ في مجال الرادار، نرسم بيانياً $1 - q_0(\eta)$ كتابع لـ $q_1(\eta)$. يسمى هذا خصائص تشغيل المستقبل (ROC) إذا قلبنا منحنى الخطأ عمودياً حول النقطة $1/2$ ، نحصل على (ROC).

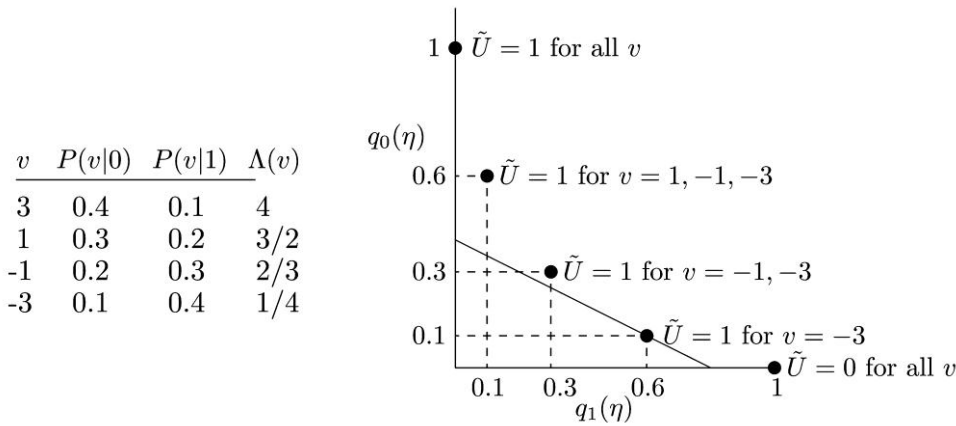
$U = 1$ و $U = 0$. وكما تمت الإشارة له في الشكل فإن نسبة الترجيح $\Lambda(V)$ تأخذ عندئذ القيم 4، و $3/2$ ، و $2/3$ ، و $1/4$. تتوافق على التوالي مع $v = 3, 1, -1, -3$.

يُقرَّر اختبار العتبة عند η أن $\bar{U} = 0$ إذاً فقط إذا كانت $\Lambda(V) \geq \eta$ وبالتالي، وعلى سبيل المثال، من أجل أي $\eta \leq 1/4$ ، فإن كل قيم v المحتملة تُمثَّل ضمن $\bar{U} = 0$. في هذا المجال، تكون $q_1(\eta) = 1$ لأن $U = 1$ تسبب دوماً خطأً. وكذلك $q_0(\eta) = 0$ لأن $U = 0$ لا تُسبب خطأً أبداً. أما في المجال $1/4 \leq \eta \leq 2/3$ ، وبما أن $\Lambda(-3) = 1/4$ ، تُمثَّل القيمة -3 ضمن $\bar{U} = 1$ وكافة القيم الأخرى ضمن $\bar{U} = 0$. في هذا المجال، تكون $q_1(\eta) = 0.6$ لأنه، وعندما $U = 1$ ، يحدث خطأً إلا إذا كان $V = -3$.
وبنفس الطريقة، تؤدي كافة اختبارات العتبة ضمن $2/3 \leq \eta \leq 3/2$ ، إلى قرار يُمثَّل القيمتين -1 و -3 ضمن $\bar{U} = 1$ والقيمتين 1 و 3 ضمن $\bar{U} = 0$. في هذا المجال، تكون $q_1(\eta) = q_0(\eta) = 0.3$. وكما هو مُبيَّن، فثمة قاعدة اتخاذ قرار أخرى لأجل $3/2 \leq \eta \leq 4$ وقاعدة قرار أخيرة لأجل $\eta > 4$.

يبيِّن هذا المثال أن فضاء رصد مُنتهٍ يؤدي إلى منحنى خطأً هو ببساطة مجموعة نقاط منتهية. ومن الممكن لمجموعة مُخرجات متغيرة باستمرار أن تؤدي إلى مثل منحنى الخطأ هذا عندما يكون هناك كثير من نسب ترجيح محتملة ومحدودة. يوضح الشكل ماذا تعني الفرضية لمنحنيات خطأً مؤلفة من مجموعة نقاط محدودة.

برهان الفرضية: لندرس خط الميل $-\eta$ عند النقطة $(q_1(\eta), q_0(\eta))$. هندسياً نرى، كما هو موضح بالشكل 11.8، أن تقاطع المحور العمودي مع هذا الخط هو $q_0(\eta) + \eta q_1(\eta)$. ولشرح هذا الخط، دعنا نُعرِّف p_1 و p_0 على أنها الاحتمالات القبلية بحيث $\eta = p_1/p_0$. فيكون احتمال الخطأ الإجمالي لاختبار الاحتمال البعدي الأعظمي MAP عندئذ

$$\begin{aligned} q_0(\eta) &= p_0 q_0(\eta) + p_1 q_1(\eta) \\ &= p_0 [q_0(\eta) + \eta q_1(\eta)]; \quad \eta = p_1/p_0 \end{aligned} \quad (93.8)$$



الشكل 12.8: منحنى الخطأ لفضاء رصد مُقطَّع. يوجد فقط خمس نقاط تُشكِّل "المنحنى" كل منها يتوافق مع واحدة من قواعد العتبة الخمسة. فقاعدة العتبة $\bar{U} = 1$ على سبيل المثال هي فقط لأجل $v = -3$ وتؤدي إلى أن تكون $(q_1(\eta), q_0(\eta)) = (0.6, 0.1)$ لكل قيم η في المجال $1/4$ إلى $2/3$. يبين الشكل أيضاً خط مستقيم بميل $-\eta$ عند تلك النقطة من أجل $\eta = 1/2$. تؤكد الفرضية أن هذا الخط يقع إما على أو تحت كل نقطة من منحنى الخطأ وكل نقطة $(q_1(A), q_0(A))$ لأي اختبار آخر. لاحظ أنه مع زيادة η أو نقصانها يدور هذا الخط حول النقطة $(0.6, 0.1)$ إلى أن تصبح η أكبر من $2/3$ أو أصغر من $1/4$ ، عندها يبدأ بالدوران حول النقطة التالية في منحنى الخطأ.

وبطريقة مشابهة، نجد أن احتمال الخطأ الإجمالي لاختبار كفيي A له نفس الاحتمالات القبلية هو:

$$q(A) = p_0 [q_0(A) + \eta q_1(A)] \quad (94.8)$$

من النظرية 11.8، $q(\eta) \leq q(A)$ ، وبالتالي، من العلاقات (93.8) و (94.8) نحصل على:

$$(95.8) \quad q_0(\eta) + \eta q_1(\eta) \leq q_0(A) + \eta q_1(A)$$

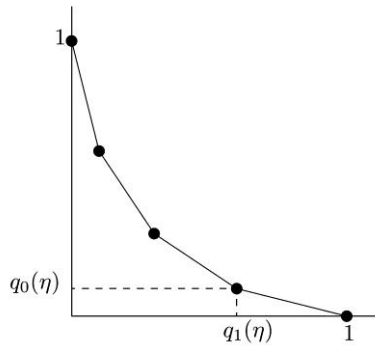
رأينا أن الجانب الأيسر من العلاقة (95.8) هو تقاطع المحور العمودي مع خط الميل η - عند النقطة $(q_1(\eta), q_0(\eta))$. وبطريقة مشابهة، فإن الجانب الأيمن من العلاقة هو تقاطع المحور العمودي مع خط الميل η - عند النقطة $(q_1(A), q_0(A))$. هذا يدل على أن النقطة $(q_1(A), q_0(A))$ تقع إما على خط الميل η - أو فوقه عند النقطة $(q_1(\eta), q_0(\eta))$. وهذا ينطبق على كل اختبار A ، بما في ذلك كل اختبار عتبة.

تُبيّن الفرضية أنه إذا أعطى منحنى الخطأ $q_0(\eta)$ على أنها تابع لـ $q_1(\eta)$ قابل للتفاضل (كما في الحالة المبينة في الشكل 11.8)، يكون خط الميل η - عبر النقطة $(q_1(\eta), q_0(\eta))$ مماساً لمنحنى الخطأ في النقطة $(q_1(\eta), q_0(\eta))$. وبالتالي سنشير فيما يلي إلى هذا الخط بوصفه ظل η لمنحنى الخطأ، لاحظ أن منحنى الخطأ في الشكل 12.8 ليس منحنياً حقيقياً أبداً، لكن خط ظل η ، كما هو معرّف آنفاً ومبيّن في الشكل من أجل $\eta = 2/3$ ، مازال يقع على أو تحت كافة نقاط منحنى الخطأ وكافة النقاط الممكنة $(q_1(A), q_0(A))$ كما يُرهن آنفاً.

وبما أنه، ومن أجل كل اختبار A ، تقع النقطة $(q_1(A), q_0(A))$ على أو فوق كل خط ظل η ، فإنها تقع أيضاً على أو فوق أصغر حد أعلى لهذه الخطوط ضمن المجال $0 \leq \eta \leq \infty$. يتبع ذلك أيضاً، أنه من أجل كل η' حيث $0 \leq \eta' \leq \infty$ فإن النقطة $(q_1(\eta'), q_0(\eta'))$ تقع على أو فوق هذا الحد وحيث إن $(q_1(\eta'), q_0(\eta'))$ تقع أيضاً على خط ظل η' ، فإنها تقع على أو تحت أصغر حد أعلى، وبالتالي يجب أن تقع على هذا الحد. نستنتج أخيراً أن كل نقطة من منحنى الخطأ تقع على أصغر حد أعلى لخط ظل η . ومع أن كافة نقاط منحنى الخطأ تقع على أصغر حد أعلى لخط ظل η ، فليس من الضروري أن تكون كافة نقاط هذا الحد نقاطاً من منحنى الخطأ، كما نلاحظ من الشكل 12.8. وسنرى عما قريب، أن كافة النقاط على هذا الحد يمكن تحصيلها بتوسيع اختبارات العتبة. لذا ندعو هذا الخط الحد منحنى الخطأ الموسّع.

من أجل المثال في الشكل 11.8 فإن منحنى الخطأ الموسّع هو نفسه منحنى الخطأ. أما من أجل المثال المقطّع في الشكل 12.8، فإن الشكل 13.8 يبيّن منحنى الخطأ الموسّع له.

لفهم الحالة المقطّعة على نحو أفضل، نفرض أن جزءاً من تابع الخطأ الموسّع هو خط مستقيم ذو ميل $-\eta^*$ وامتداد أفقي γ . هذا يوحي بأن تابع التورّع لـ $\Lambda(V)$ بفرض $U = 1$ فيه عدم استمرارية بقيمة γ عند η^* . ولهذا توجد مجموعة V^* ذات v أو أكثر بحيث $\Lambda(v) = \eta^*$ ، و $\Pr\{V^*|U=1\} = \gamma$ ، و $\Pr\{V^*|U=1\} = \eta^*\gamma$. من أجل اختبار الاحتمال البعدي الأعظمي MAP بعتبة η^* ، فإن احتمال الخطأ الإجمالي لا يتأثر إذا كُشفت $v \in V^*$ على أنها $\bar{U} = 0$ أو $\bar{U} = 1$. هدفنا هو كشف $v \in V^*$ بوصفها $\bar{U} = 0$ ، وهو ما يتوافق مع خفض نقطة يمينية على الجزء المستقيم من منحنى الخطأ الموسّع. الهدف المعاكس، كشف $v \in V^*$ بوصفها $\bar{U} = 1$ يخفض احتمال الخطأ بإعطاء $U = 1$ بمقدار γ ويزيد احتمال الخطأ بإعطاء $U = 1$ بمقدار $\eta^*\gamma$ ، أي يتوافق مع النقطة اليسارية العليا على الجزء المستقيم من منحنى الخطأ الموسّع.



الشكل 13.8: منحنى الخطأ الموسّع لمثال الرصد المقطّع موضوع بالشكل 12.8. من الفرضية 1، ولكل ميل η -، فإن خط ظل η يلمس منحنى الخطأ. وبالتالي فالخط الواصل بين نقطتين متجاورتين على منحنى الخطأ يجب أن يكون خط ظل η لميله الخاص، ومن ثم يجب أن يقع على منحنى الخطأ الموسّع.

لاحظ أنه عندما كنا مهتمين بالكشف وفق الاحتمال البعدي الأعظمي MAP، لم يغيّر من الأمر كيف كُشفت $v \in \mathcal{V}^*$ من أجل العتبة η^* . أما من أجل اختبار نيمان - بيرسون، فإن ذلك يُشكّل فرقاً كبيراً إذ تغيرت $q_0(\eta^*)$ و $q_1(\eta^*)$. في الحقيقة، يُمكن الحصول على أي نقطة على الخط المستقيم المعني بكشف $v \in \mathcal{V}^*$ على نحو عشوائي. وبما أن احتمال اختيار $\bar{U} = 0$ يزداد من 0 إلى 1 (بإعطاء $v \in \mathcal{V}^*$)، تتحرك النقطة $(q_1(\eta), q_0(\eta))$ من اليسار الأعلى إلى النهاية اليمنى الأدنى من مقطع الخط المعطى. بكلمات أخرى، إن منحنى الخطّ الموسّع هو المنحني الذي يربط بين q_0 و q_1 باستخدام اختبار عتبة جرى اختياره عشوائياً. ومن أجل η^* معينة، بالطبع، فإن تلك القيم $v \in \mathcal{V}^*$ فقط تُكشف عشوائياً.

بالنتيجة، فإن اختبار نيمان - بيرسون هو اختبار عتبة عشوائي. ومن أجل القيد α على $\{e|U = 1\}$ ، نختار النقطة α على المحور الأفقي لمنحنى الخطّ الموسّع ونستنتج القيم الموافقة على المحور العمودي بوصفها القيم الأدنى لـ $\{e|U = 1\}$. إذا وقعت تلك النقطة من منحنى الخطّ الموسّع ضمن مقطع الخط المستقيم من الميل η^* ، يُستخدم اختبار عشوائي للملاحظات ذات نسبة الترجيح η^* . بما أن منحنى الخطّ الموسّع هو أقلّ حدّ أعلى للخطوط المستقيمة، فهو تابع مُقعر. وبما أن لكل الخطوط المستقيمة ميلاً سالباً، فهي توابع رتيبة¹³⁷ متناقصة. ولهذا، تُمثّل الأشكال من 11.8 ولغاية 13.8 الأداء العام لمنحنيات الخطّ الموسّع، مع استثناء بسيط ذكر آنفاً بأنه ليس من الضروري أن يكون في نقاط النهاية أحد احتمالات الخطّ المساوية لـ 1. تُلخّص النظرية التالية اختبارات نيمان - بيرسون.

النظرية 1.A8. منحنى الخطّ الموسّع مُقعر ومتناقص فعلاً بين النقاط $(q_1(\infty), q_0(\infty))$ و $(q_1(0), q_0(0))$. وبوجود قيد α على $\{e|U = 1\}$ ، تُعطى أدنى قيمة لـ $\{e|U = 0\}$ بإحداثية منحنى الخطّ الموسّع الموافقة لقيمة α على المحور الأفقي ويمكن تحصيلها من اختبار العتبة العشوائي.

ثمّة تباين مهمّ آخر في موضوع اختبارات العتبة. إذا كانت الاحتمالات القبّلية غير معروفة، فرمّا نحتاج لتخفيض الاحتمال الأعظمي للخطّ. أي، نتصوّر انتقاء اختبار متبوعاً باختيار طبيعي لاحتمالات قبّلية لجعل احتمال الخطّ في حدّه الأقصى. إن هدفنا هو جعل احتمال الخطّ بحده الأدنى تحت هذه الفرضية للحالة الأكثر سوءاً. يُسمى الاختبار الناتج اختبار الأصغر/أكبر (ميني ماكس) minimax. وهندسياً يمكن أن نرى في الشكل 11.8 أو 13.8 أن اختبار الميني ماكس هو اختبار العتبة العشوائي عند تقاطع منحنى الخطّ الموسّع مع خط 45 المنطلق من مبدأ الإحداثيات.

إذا كان ثمّة تناظر بين $U = 0$ و $U = 1$ (كما في الحالة الغوصية) فإن منحنى الخطّ الموسّع سيكون متناظراً حول خط 45، وتكون العتبة عند $\eta = 1$ (أي أن اختبار الترجيح الأعظمي هو أيضاً اختبار ميني ماكس). وتعتبر هذه نتيجة هامة لمسائل الاتصال الغوصي، إذ إنّها تبيّن أن القرار وفق قاعدة الترجيح الأعظمي ML، أي كشف المسافة الدنيا، متين بمعنى أنه لا يعتمد على احتمالات الدخل. إذا علمنا الاحتمالات القبّلية، يمكننا أن نحصل على نتائج أفضل من اختبار الترجيح الأعظمي ولكن ليس أسوأ.

¹³⁷ ولنكون أكثر دقة، فهو يتناقص فعلياً بين نقاط النهاية $(q_1(\infty), q_0(\infty))$ و $(q_1(0), q_0(0))$.

8.E تمارين

1.8 (الكشف الإثنائي الأقل تكلفة) (a) ادرس مسألة اختبار فرضية إثنائية باحتمالات قَبْلِيَّة p_1, p_0 و ترجيحات $f_{V|U}(v|i)$ حيث $i = 0, 1$. لتكن C_{ij} كلفة إقرار الفرضية j عندما يكون i صحيحاً. وباشتراط الرصد $V = v$ أوجد الكلفة المتوقعة (على $U = 0, 1$) لإقرار $\bar{U} = j$ من أجل $j = 0, 1$.

بيّن أن قرار الكلفة المتوقعة الدنيا يعطى بالعلاقة:

$$\bar{U}_{mincost} = \arg \min_j [C_{0j}p_{U|V}(0|v) + C_{1j}p_{U|V}(1|v)]$$

(b) بيّن أنه يمكن التعبير عن قرار الكلفة الأدنى المذكور آنفاً على أنه اختبار العتبة التالي:

$$\Lambda(v) = \frac{f_{V|U}(v|0) \geq \bar{U}_{=0} \frac{p_1(C_{10} - C_{11})}{f_{V|U}(v|1) < \bar{U}_{=1} \frac{p_0(C_{101} - C_{00})}{= \eta$$

(c) فسّر النتائج الآتية لتبيّن أن الفرق الوحيد بين اختبار الاحتمال البعدي الأعظمي MAP واختبار الكلفة الأدنى هو مُعايرة العتبة لتأخذ الكلفة بالحسبان. أي أن كلفة خطأ كبيرة من نوع ما تكافئ وجود احتمال قَبْلِي كبير لتلك الفرضية.

2.8 ادرس الفرضيتين التاليتين متساويتي الاحتمال:

$$\begin{aligned} U = 0 & : V_1 = a \cos \Theta + Z_1, & V_2 = a \sin \Theta + Z_2, \\ U = 1 & : V_1 = -a \cos \Theta + Z_1, & V_2 = -a \sin \Theta + Z_2, \end{aligned}$$

Z_1 و Z_2 هما $(iid) \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ ، و Θ تأخذ القيم $\{-\pi/4, 0, \pi/4\}$ وكل منها باحتمال $1/3$.

أوجد قاعدة الترجيح الأعظمي ML عند رصد كل من V_1 و V_2 .

تلميح: ارسم مخططاً لقيم V_1 و V_2 من أجل $Z = 0$ ولكل فرضية. بعد ذلك، ودون أي إجراء أية حسابات حاول أن توجد قاعدة اتخاذ قرار منطقية. ثم حاول أن تبرهن إنها مثلى.

3.8 ليكن:

$$V_j = S_j X_j + Z_j \quad \text{من أجل } 1 \leq j \leq 4$$

حيث $\{X_j; 1 \leq j \leq 4\}$ هي $iid \mathcal{N}(0, 1)$ و $\{Z_j; 1 \leq j \leq 4\}$ هي $iid \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ ومستقلة عن $\{X_j; 1 \leq j \leq 4\}$. تمّ رصد $\{V_j; 1 \leq j \leq 4\}$ في خرج نظام اتصال وكان الدخل متحول عشوائي إثنائي مفرد U مستقل عن $\{Z_j; 1 \leq j \leq 4\}$ و $\{X_j; 1 \leq j \leq 4\}$.

إذا كان $U = 0$ فإن $S_1 = S_2 = 1$ و $S_3 = S_4 = 0$ وإذا كان $U = 1$ فإن $S_1 = S_2 = 0$ و $S_3 = S_4 = 1$.

(a) أوجد نسبة الترجيح اللوغاريتمية

$$LLR(v) = \ln \left(\frac{f_{V|U}(v|0)}{f_{V|U}(v|1)} \right)$$

(b) بفرض $\varepsilon_a = |V_1|^2 + |V_2|^2$ و $\varepsilon_b = |V_3|^2 + |V_4|^2$. اشرح لماذا تُشكّل $\{\varepsilon_a, \varepsilon_b\}$ إحصائية كافية لهذه المسألة وعبر عن نسبة

الترجح اللوغاريتمية بدلالة قيم العينات ل $\{\varepsilon_a, \varepsilon_b\}$.

(c) أوجد العتبة للكشف وفق الترجيح الأعظمي ML.

(d) أوجد احتمال الخطأ. تلميح: راجع التمرين 6.1. ملاحظة: سنرى لاحقاً أن هذا يتطابق مع الكشف الإثنائي في خفوت رايلي.

4.8 ادرس الكشف الإثنائي المتعكس القطبية بطريقة الاحتمال البعدي الأعظمي MAP لحالة الشعاع الحقيقي. عدّل الصورة والمعادلة في

الشكل 4.8 لتبرهن العلاقة الجبرية بين فرق مربع الطاقة والجداء الداخلي في العلاقة (21.8).

5.8 استخرج العلاقة (35.8)، أي $\sum_{k,j} \psi_{k,j} b_{k,j} = \frac{1}{2} \int \psi(t) b(t) dt$ و اشرح المعامل $1/2$.

6.8 في هذه المسألة سوف نستخرج المتراجحة التالية:

$$(96.8) \quad \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \leq Q(x) \leq \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}; \quad \text{for } x > 0$$

حيث $Q(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_x^\infty \exp(-z^2/2) dz$ هي "ذيل" التوزيع العادي. يهدف هذا إلى بيان، أنه إذا كانت x كبيرة، فإن الجانب الأيمن من هذه اللامساواة يمثل حداً أعلى مُحكماً على $Q(x)$.
(a) باستخدام تعديل بسيط في المتغيرات، بيّن أن:

$$Q(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-x^2/2} \int_0^\infty \exp(-y^2/2 - xy) dy$$

(b) بيّن أن:

$$1 - y^2/2 \leq \exp(-y^2/2) \leq 1$$

استخدم النتيجةين من (a) و (b) لتستنتج (96.8).

7.8 (حدود أخرى على $Q(x)$) (a) بين أن الحدّ التالي يبقى من أجل γ و η بحيث $0 \leq \eta \leq \gamma$:

$$Q(\gamma + \eta) \leq Q(\gamma) \exp[-\eta\gamma - \eta^2/2]$$

تلميح: ابدأ ب $Q(\gamma + \eta) = \int_{\gamma+\eta}^\infty \exp[-x^2/2] dx$ واستخدم تبديل المتغير $y = x - \eta$.

(b) استخدم السؤال (a) لتبيّن أنه من أجل كل قيم $\eta \geq 0$

$$Q(\eta) \leq \frac{1}{2} \exp[\eta^2/2]$$

(c) استخدم (a) لتبيّن أنه من أجل كل قيم $0 \leq \eta \leq w$

$$\frac{Q(w)}{\exp[-w^2/2]} \leq \frac{Q(\gamma)}{\exp[-\gamma^2/2]}$$

ملاحظة: تبيّن العلاقة (96.8) أن $Q(w)$ تنتهي إلى الصفر مع زيادة w زمن مُعامل يتغير ببطء $\exp[-w^2/2]$. هذا يبيّن أن المعامل يتناقص من أجل $w \geq 0$.

8.8 (مجموعات الإشارة المتعامدة) إن مجموعة الإشارة المتعامدة هي مجموعة $\mathcal{A} = \{a_m, 0 \leq m \leq M-1\}$ المؤلفة من M شعاعاً متعامداً

في \mathbb{R}^M بطاقةً متساوية E ؛ أي، $\langle a_m, a_j \rangle = E \delta_{mj}$.

(a) احسب المعدّل المستنظم p من \mathcal{A} بالبت لكل بُعدين. احسب الطاقة المتوسطة E_b لكل بت معلومات.

(b) احسب مربع المسافة الدنيا $d_{\min}^2(\mathcal{A})$ بين نقاط الإشارة هذه. وبيّن أن لكل إشارة $M-1$ مجاور قريب.

(c) ليكن متغير الضجيج $N_0/2$ لكل بُعد. صِف كاشف الترجيح الأعظمي ML على هذه المجموعة من الإشارات ذات العدد M .

تلميح: مثّل مجموعة الإشارة ضمن تمدد متعامد بحيث يكون كل شعاع متسامت (متوازي) مع إحداثية واحدة. بعدها تصوّر اتخاذ قرارات إثنائية بين كل زوج من الإشارات المحتملة.

9.8 (مجموعات الإشارة المتعامدة؛ تنمة التمرين 8.8) ادرس المجموعة $\mathcal{A} = \{a_m, 0 \leq m \leq M-1\}$ المؤلفة من M شعاعاً مُتعامداً في

\mathbb{R}^M بطاقةً متساوية E .

(a) استخدم حدّ الاجتماع لتبيّن أن $\Pr\{e\}$ ، باستخدام الكشف وفق الترجيح الأعظمي ML، محدودة بـ

$$\Pr\{e\} \leq (M-1)Q\left(\sqrt{E/N_0}\right)$$

(b) دع $M \rightarrow \infty$ مع بقاء $E_b = E/\log M$ ثابتة. باستخدام الحدّ الأعلى لـ $Q(x)$ في التمرين 8.7b، بيّن أنه إذا كانت

$E_b/N_0 > 2 \ln 2$ فإن $\lim_{M \rightarrow \infty} \Pr\{e\} = 0$. كم يبدو هذا قريباً من حدّ شانون على E_b/N_0 ؟ ما هو حدّ المعدّل المستنظم ρ ؟

10.8 (الحد الأدنى لـ $\Pr\{e\}$ للإشارات المتعامدة) (a) تدكّر التعبير الدقيق لاحتمال الخطأ للإشارات المتعامدة في الضجيج الغوسي الأبيض

WGN من العلاقة (47.8).

$$\Pr(e) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{W_0|A}(w_0|\mathbf{a}_0) P_r \left(\bigcup_{m=1}^{M-1} (W_m \geq w_0 | A = \mathbf{a}_0) \right) dw_0$$

اشرح سبب كون الأحداث $W_m \geq w_0$ من أجل $1 \leq m \leq M-1$ مُستقلة وموزعة بانتظام (iid) وشرطيّة على $A = \mathbf{a}_0$ و $W_0 = w_0$.
(b) أثبت العلاقاتين التاليتين من أجل أي w_0 ،

$$\Pr \left(\bigcup_{m=1}^{M-1} (W_m \geq w_0 | A = \mathbf{a}_0) \right) = 1 - [1 - Q(w_0)]^{M-1}$$

$$\geq (M-1)Q(w_0) - \frac{[(M-1)Q(w_0)]^2}{2}$$

(c) عرّف γ_1 بـ $Q(\gamma_1) = \frac{1}{2(M-1)}$. أثبت ما يلي:

$$\Pr \left(\bigcup_{m=1}^{M-1} (W_m \geq w_0 | A = \mathbf{a}_0) \right) \geq \begin{cases} \frac{(M-1)Q(w_0)}{2} & \text{for } w_0 > \gamma_1 \\ \frac{1}{2} & \text{for } w_0 \leq \gamma_1 \end{cases}$$

(d) بيّن أنّ:

$$\Pr(e) \geq \frac{1}{2} Q(\alpha - \gamma_1)$$

(e) بيّن أنّ $\lim_{M \rightarrow \infty} \gamma_1/\gamma = 1$ حيث $\gamma = \sqrt{2 \ln M}$ واستخدمها لتُقارن بين الحد الأدنى في الجزء (d) مع الحدود العليا للحالتين 1 و 2 في الفقرة الفرعية 3.5.8. وعلى وجه الخصوص، بيّن أنّ $\Pr(e) \geq \frac{1}{4}$ وذلك من أجل $\gamma_1 > \alpha$ (الحالة التي يتم فيها تجاوز السعة).
(f) استخرج حداً أدنى لـ $\Pr(e)$ أضيق من الذي في (d) للحالة حيث $\gamma_1 \leq \alpha$. بيّن أنّ نسبة لوغاريتم الحد الأدنى الذي أوجدته إلى لوغاريتم الحد الأعلى في الفقرة الفرعية 3.5.8 يقترب من الواحد فيما $M \rightarrow \infty$. ملاحظة: إن هذه الحدود أكثر لخبطة من الحدود الآتية.

11.8 ناقشت الفقرة 4.3.8 الكشف للأشعة العقدية الإثنائية في الضجيج الغوسي الأبيض WGN بالنظر إلى الأشعة العقدية ذات n بُعداً بوصفها أشعة حقيقية ذات $2n$ بُعداً. هنا سنعالج الأشعة مباشرة على أنّها أشعة عقدية ذات n بُعداً. ليكن $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)^T$ شعاعاً من أشعة (iid) عشوائية غوسية عقدية لها مركبات حقيقية وتخييلية، كل منها $\mathcal{N}(0, N_0/2)$. الدخل U إثنائي متعاكس القطبية، يأخذ القيمتين a أو $-a$. والرصد V هو $U + \mathbf{Z}$ ،
(a) يعطى احتمال \mathbf{Z} بالعلاقة:

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = \frac{1}{(\pi N_0)^n} \exp \sum_{j=1}^n \frac{-|z_j|^2}{N_0} = \frac{1}{(\pi N_0)^n} \exp \frac{-\|\mathbf{z}\|^2}{N_0}$$

اشرح ماذا تُمثّل كثافة الاحتمال هذه (أي احتمال من أجل أي وحدة؟).

(b) أعطِ علاقات لكل من $f_{V|U}(\mathbf{v}|\mathbf{a})$ و $f_{V|U}(\mathbf{v}|-\mathbf{a})$.

(c) بيّن أنّ لوغاريتم نسبة الترجيح للرصد \mathbf{v} يُعطى بالعلاقة:

$$\text{LLR}(\mathbf{v}) = \frac{-\|\mathbf{v} - \mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{v} + \mathbf{a}\|^2}{N_0}$$

(d) اشرح لماذا يقتضي هذا أن الكشف وفق الترجيح الأعظمي ML هو كشف المسافة الدنيا (عرّف المسافة بين شعاعين عقديين بوصفها متوسط الفرق بينهما).

(e) بيّن أنّه يُمكن كتابة $\text{LLR}(\mathbf{v})$ على الشكل $\frac{4\Re(\mathbf{v}\mathbf{a})}{N_0}$

(f) يبدو شكل الجزء الحقيقي الآنف، $4\Re((\mathbf{v}, \mathbf{a}))$ ، مفاجئاً. أشر لماذا يجب أن يكون لوغاريتم نسب الترجيح حقيقياً. اشرح أيضاً لماذا سيعطي تبديل $\Re((\mathbf{v}, \mathbf{a}))$ بـ $|\mathbf{v}, \mathbf{a}|$ في العلاقة الآنفه نتيجة بلا معنى في اختبار ML.
(g) هل تُشكّل مجموعة النقاط $\{\mathbf{v}: \text{LLR}(\mathbf{v}) = 0\}$ فضاء شعاع عقدي؟

12.8 لنفرض D تابع يُقابل الأشعة في C^n بالأشعة \mathcal{R}^{2n} على الشكل:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \rightarrow (\Re a_1, \Re a_2, \dots, \Re a_n, \Im a_1, \Im a_2, \dots, \Im a_n) = D(\mathbf{a})$$

(a) اشرح لماذا $a \in C^n$ و $ia (i = \sqrt{-1})$ محتواة في الفضاء الجزئي العقدي وحيد البعد من C^n ممتد عبر \mathbf{a} .

(b) بيّن أن $D(\mathbf{a})$ و $D(i\mathbf{a})$ هي أشعة متعامدة في \mathcal{R}^{2n} .

(c) من أجل $\mathbf{v}, \mathbf{a} \in C^n$ فإن إسقاط \mathbf{v} على \mathbf{a} يُعطى بالعلاقة $\mathbf{v}_{|\mathbf{a}} = \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{a})}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}$. بيّن أن $D(\mathbf{v}_{|\mathbf{a}})$ هو مسقط $D(\mathbf{v})$ على الفضاء الجزئي \mathcal{R}^{2n} ممتد بـ $D(\mathbf{a})$ و $D(i\mathbf{a})$.

(d) بيّن أن $D\left(\frac{\Re((\mathbf{v}, \mathbf{a}))}{\|\mathbf{a}\|} \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}\right)$ هو الإسقاط الإضافي لـ $D(\mathbf{v})$ على $D(\mathbf{a})$.

13.8 ادرس 4-QAM بأربع نقاط إشارة $u = \pm a \pm ia$. افرض وجود ضجيج غوسي بكثافة طيفية $N_0/2$ لكل بُعد.

(a) ارسم مجموعة الإشارات ومناطق قرار الترجيح الأعظمي ML لقيمة العينة العقدية المستقبلية y . أوجد احتمال الخطأ الدقيق (بدلالة التابع Q) لمجموعة الإشارة هذه مُستخدماً كشف الترجيح الأعظمي ML.

(b) ادرس نظام 4-QAM بوصفها نظامي 2-PAM على التوازي. أي أن قراراً بحسب الترجيح الأعظمي قد تُتخذ على $\Re(u)$ من $\Re(v)$ وأن قراراً قد تُتخذ على $\Im(u)$ من $\Im(v)$. أوجد احتمال الخطأ (بدلالة التابع Q) لقرار الترجيح الأعظمي ML على $\Re(u)$ وبطريقة مشابهة للقرار على $\Im(u)$.

(c) اشرح الفرق بين ما سُمي خطأً في الجزء (a) وما سُمي خطأً في الجزء (b).

(d) استنتج احتمال الخطأ في النظام QAM مباشرة من احتمال الخطأ في النظام PAM.

14.8 ادرس نظامي 4-QAM مع نفس المجموعة 4-QAM،

$$s_3 = 1 - i \text{ و } s_2 = -1 - i \text{ و } s_1 = -1 + i \text{ و } s_0 = 1 + i$$

وفي كل نظام يمثّل زوج من البتات بإشارة، لكن التمثيلين مختلفان:

$$\text{التمثيل 1: } 11 \rightarrow s_3 \quad 10 \rightarrow s_2 \quad 01 \rightarrow s_1 \quad 00 \rightarrow s_0$$

$$\text{التمثيل 2: } 10 \rightarrow s_3 \quad 11 \rightarrow s_2 \quad 01 \rightarrow s_1 \quad 00 \rightarrow s_0$$

البتات مُستقلة والوحدات والأصفار متساوية الاحتمال، وبالتالي فنقاط المجموعة مُرجّحة بالتساوي في النظامين. افرض أن الإشارات قد تمّ فك ترميزها وفق قاعدة المسافة الدنيا، ثمّ جرى تمثيل الإشارة بعد ذلك بالرقمين الإثنائيين. أوجد احتمال الخطأ (بدلالة التابع Q) لكل بت في كلا النظامين.

15.8 أعد صياغة النظرية 1.4.8 للكشف وفق قاعدة الاحتمال البعدي الأعظمي MAP. افرض أن المدخلات U_1, \dots, U_n مُستقلة ولكل

$$\text{منها توزيع قبلي } p_0, \dots, p_{M-1}$$

تلميح: ابدأ بالعلاقتين (41.8) و (42.8) واللتان مازالتا صالحتين هنا.

16.8 تتعلّق المسألة التالية بنظام اتصال رقمي يُعرف بالتعديل (التبديل) بالإزاحة الصغرى (MSK). ليكن:

$$s_0(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(2\pi f_0 t) & \text{if } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$s_1(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(2\pi f_1 t) & \text{if } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

- (a) احسب طاقة الإشارتين $s_0(t)$ و $s_1(t)$. يمكنك أن تفترض أن $f_0 T \gg 1$ و $f_1 T \gg 1$.
- (b) أوجد شروطاً على كل من f_0 و f_1 والفترة T لضمان أن تكون الإشارتان $s_0(t)$ و $s_1(t)$ متعامدتين وأن تكون $s_0(0) = s_0(T) = s_1(0) = s_1(T)$. لماذا برأيك أن مثل هذا النظام يُدعى تعديلاً بالإزاحة الصغرى؟
- (c) اعتبر أن المعاملات اختيرت كما في (b). وافرض أن الإشارة $s_0(t)$ أرسلت ضمن $U = 0$ ، وأن الإشارة $s_1(t)$ أرسلت ضمن $U = 1$. اعتبر أيضاً أن الفرضيتين ذات ترجيح متساوٍ. دع الإشارة المرصودة مساوية لمجموع الإشارة المرسله والضجيج الغوسي الأبيض ذي الكثافة الطيفية $N_0/2$. أوجد الكاشف الأمثل لجعل احتمال الخطأ بحده الأدنى. ارسم مخططاً كتابياً لتطبيق مُحتمل.
- (d) احسب احتمال خطأ للكاشف الذي أوجدته في الجزء (c).

17.8 ادرس اتصال اثنائي إلى مستقبل يضم هوائيات k_0 . الإشارة المرسله من الشكل $\pm a$. ولكل هوائي كاشف تعديله الخاص، وتُعطى الإشارة المستقبلية من الهوائي k حيث $1 \leq k \leq k_0$ بعد فك تعديلهما، بالعلاقة:

$$V_k = U g_k + Z_k$$

- حيث U هي $+a$ لأجل $U = 0$ وهي $-a$ لأجل $U = 1$. كما أن Z_k هي ربح الهوائي و $Z_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ هي الضجيج عند الهوائي، كل القيم حقيقية، و $U, Z_1, Z_2, \dots, Z_{k_0}$ مُستقلة. بالصيغة الشعاعية، $\mathbf{V} = U \mathbf{g} + \mathbf{Z}$ حيث $\mathbf{V} = (v_1, \dots, v_{k_0})^T$ الخ.
- (a) اعتبر أن الإشارة عند كل هوائي استقبال k تُنقل برقم كيفي q_k وتُضمّ الإشارات على الشكل $\langle \mathbf{V}, \mathbf{q} \rangle = Y$. ما هو الكاشف وفق قاعدة الترجيح الأعظمي ML ل U بإعطاء الرصد V ؟
- (b) ما هو احتمال الخطأ $\text{pr}(e)$ لهذا الكاشف؟
- (c) ليكن $\beta = \frac{\langle \mathbf{g}, \mathbf{q} \rangle}{\|\mathbf{g}\| \|\mathbf{q}\|}$. عبّر عن $\text{pr}(e)$ بصيغة لا تظهر فيها q إلا في تأثيرها على β .
- (d) أعط تفسيراً حدسياً لماذا لا يُغيّر تبديل q إلى cq بمقيس c لا يساوي الصفر، احتمال الخطأ $\text{pr}(e)$.
- (e) اجعل $\text{pr}(e)$ بالقيمة الدنيا لكل خيارات q (أو β) آنفاً.
- (f) هل من الممكن تخفيض $\text{pr}(e)$ أكثر بإجراء كشف الترجيح الأعظمي ML على V_1, \dots, V_{k_0} بدلاً من تقييد أنفسنا إلى التركيبة الخطية لتلك المتغيرات؟
- (g) أعد الجزء (b) باعتبار أن متغيرات الضجيج لها تباينات مختلفة، أي، $Z_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_k^2)$. وكما في السابق $U, Z_1, Z_2, \dots, Z_{k_0}$ مُستقلة.
- (h) اجعل $\text{pr}(e)$ بالقيمة الدنيا في الجزء (g) لكل خيارات q .

- 18.8** (a) لمصفوفة هادامارد H_1 الصقّان 00 و 01. إن النظر إليهما على أنهما كلمات رماز إثنائية أمر سخيف حيث إن أول رقم إثنائي هو دائماً 0 ومن ثمّ لا يحمل أية معلومات على الإطلاق. مثل الرموز 0 و 1 بإشارات a و $-a$ على التوالي، حيث $a > 0$ وارسم بيانياً هاتين الإشارتين على مستوٍ ذي بُعدين. اشرح دور البت الأول بدلالة توليد إشارات متعامدة.
- (b) اعتبر أن المجموع وفق المقاس 2 لكل زوج من صفوف H_b هو صف آخر من H_b لأي عدد b صحيح معطى حيث $b \geq 1$. واستخدم هذا لإثبات نفس النتيجة من أجل H_{b+1} .
- تلميح: انظر على نحو منفصل إلى المجموع وفق المقاس 2 لصقّين في النصف الأول من الصفوف، وصقّين في النصف الثاني، وصقّين في نصفين مختلفين.

19.8 (رمازات RM) (a) برهن المساواة التجميعية التالية من أجل $0 < r < m$

$$\sum_{j=0}^r \binom{m}{j} = \sum_{j=0}^{r-1} \binom{m-1}{j} + \sum_{j=0}^r \binom{m-1}{j}$$

تلميح: لاحظ أن الحد الأول آنفاً يمثّل عدد المجموعات m الإثنائية التي تحتوي على r أو أقل من الواحدات. ادرس على نحو منفصل عدد تلك المجموعات التي تنتهي بـ 1 وتلك التي تنتهي بـ 0.

(b) استخدم الاستدلال على m لتبيّن أن $k(r, m) = \sum_{j=0}^r \binom{m}{j}$. انتبه لكيفية التعامل مع $r = m$ و $r = 0$.

20.8 (رمازات RM) يبيّن هذا التمرين أولاً أن: $RM(r, m) \subset RM(r+1, m)$ من أجل $0 \leq r < m$. ثم يبيّن أن $d_{\min}(r, m) = 2^{m-r}$.

(a) بيّن أنه إذا كان $RM(r-1, m-1) \subset RM(r, m-1)$ من أجل كل قيم r ، حيث $0 \leq r < m$ ، فإن:

$$RM(r-1, m) \subset RM(r, m) \quad \text{وذلك من أجل كل قيم } r, \text{ حيث } 0 \leq r < m.$$

ملاحظة: انتبه لقيم $r = m$ و $r = 0$.

(b) لتكن $x = (u, u \oplus v)$ حيث $u \in RM(r, m-1)$ و $v \in RM(r-1, m-1)$. اعتبر أن $d_{\min}(r, m-1) \leq 2^{m-1-r}$.

وأن $d_{\min}(r-1, m-1) \leq 2^{m-r}$. بيّن أنه إذا كانت x لا تساوي الصفر، فإن فيها على الأقل 2^{m-r} واحداً.

تلميح 1: في الرماز الخطي، d_{\min} تساوي التثقيل (عدد الواحدات) في كلمة الرماز غير الصفرية ذات التثقيل الأدنى.

تلميح 2: ادرس أولاً الحالة عندما $v = 0$ ، بعدها الحالة عندما $u = 0$ أخيراً استخدم الجزء (a) في دراسة الحالة عندما $u \neq 0$ و $v \neq 0$

تحت الحالات الجزئية $u = v$ و $u \neq v$.

(c) استخدم الاستدلال على m لتبيّن أن $d_{\min} = 2^{m-r}$ وذلك من أجل $0 \leq r < m$.

9. الاتصالات اللاسلكية الرقمية

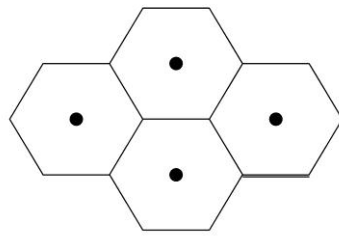
1.9 مقدمة

يقدم هذا الفصل معالجة موجزة لنظم الاتصالات اللاسلكية الرقمية، كما تحوي العديد من المراجع معالجة أكثر اتساعاً لهذه الموضوع الهام، نُحَصِّ منها بالذكر المرجعين [23] و [9]. وكما يوحي اسمها، تعمل الأنظمة اللاسلكية من خلال الإرسال عبر الفضاء وليس من خلال الأسلاك. وتعد هذه ميزة هامة للمستخدمين كونها تتيح إجراء وتلقي الاتصالات في أي مكان تقريباً، بما يتضمن الحركة والتنقل. يطلق على الاتصالات اللاسلكية في بعض الأحيان اسم الاتصالات المتنقلة لأن العديد من المشاكل التقنية الحديثة تنجم عن حركة المرسل أو المستقبل.

تعاني النظم اللاسلكية من إشكاليتين جديدتين لا تظهران في النظم السلكية مما يحتم التعامل معهما ومعالجتهما. تتجلى أولى الإشكاليات غالباً في التغير الذي يطرأ على قناة الاتصال مع مرور الزمن. أما الإشكال الثاني فهو عادة التداخل الذي يقع فيما بين المستخدمين. نظرنا في الفصول السابقة إلى تقنيات التعديل والترميز كوسائل للتغلب على الضجيج في قنوات الاتصال، وعلى النقيض من ذلك يترتب على هذه التقنيات في الأنظمة اللاسلكية أن تقوم أيضاً بالتغلب على كل من التغيرات الزمنية والتداخل. يؤدي ذلك إلى حدوث تغييرات رئيسة سواء في نمذجة القناة أو في نوع التعديل والترميز المستخدمين.

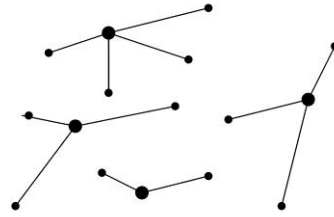
بزغ حقل الاتصالات اللاسلكية على الرغم من الضجيج الذي تقوم به الصحافة الشعبية، منذ نحو مئة سنة وذلك بدءاً من العام 1897 حين أجرى ماركوني تجاربه الناجحة في الإرسال البرقي اللاسلكي. دُشِّن في العام 1901 استقبال الراديو عبر المحيط الأطلسي، مما أثبت تناغم ذلك مع التقدم السريع في التكنولوجيا خلال تلك الفترة. ويجدر بالذكر ظهور العديد من الأنظمة اللاسلكية في السنوات اللاحقة والتي غالباً ما اختفت في وقت لاحق. نذكر على سبيل المثال، توظيف أجهزة البث الإذاعي اللاسلكي للقيام بالبث التلفزيوني في مراحل المبكرة، والتي يجري استبدالها بالكابلات Cable TV أو الإرسال الفضائي. وبالمثل، يجري استبدال الوصلات الميكروية التي تعمل من نقطة إلى نقطة والتي كانت تشكل في السابق العمود الفقري لشبكة الهاتف، بالألياف الضوئية. أصبحت التكنولوجيا اللاسلكية في المثال الأول قديمة عندما جرى تركيب شبكة توزيع سلكية؛ وحلت في المثال الثاني تقانة سلكية جديدة (أي الألياف الضوئية) محل التكنولوجيا اللاسلكية الأقدم. وبشكل معاكس عما يحدث حالياً فإن الهواتف الخلوية تستبدل جزئياً الاتصالات الهاتفية السلكية، لاسيما في أجزاء من العالم التي لا تطور شبكاتها السلكية على نحو مرضٍ. تهدف هذه الأمثلة إلى توضيح فكرة توافر خيارين لاعتماد تقانة تقوم على الاتصال السلكي أو اللاسلكي، حيث يعتمد في الغالب تبني أحد الخيارات على توافر تقنيات جديدة.

سيتم التركيز على الشبكات الخلوية في هذا الفصل لأنها تحظى باهتمام شديد حالياً من جهة، ولأنها تنطوي على بنية بسيطة نسبياً يمكن من خلالها دراسة معظم جوانب طبقة الاتصالات الفيزيائية في الأنظمة اللاسلكية من جهة ثانية. تتكون الشبكة الخلوية من عدد كبير من المشتركين ذوي الهواتف الخلوية (cell phones) التي يمكن استخدامها في السيارات والمباني والشوارع وما إلى ذلك. كما يتوافر أيضاً عدد من المحطات الثابتة التي تستخدم لتوفير الاتصال اللاسلكي الكهرومغناطيسي مع الهواتف الخلوية المنتشرة بشكل اعتباطي. تُسمى المنطقة التي تغطيها المحطة القاعدية والتي يمكن خلالها وصول الاتصالات الواردة إلى تلك المحطة بالخلية (cell). يمكن للواحد منا في كثير من الأحيان تصور الخلية كمنطقة سداسية تقع المحطة الأساسية في وسطها. كما يمكن تصور مدينة أو منطقة على أنها مقسمة إلى شبكة مكونة من خلايا سداسية (انظر الشكل a.1.9). تتوضع المحطات القاعدية في مواقع غير منتظمة إلى حد ما اعتماداً على الأماكن المتاحة التي لديها تغطية اتصالات جيدة مثل أسطح المباني أو قمم التلال والتي يمكن استخراجها أو شراؤها (انظر الشكل b.19). وبالمثل، يتم تحديد المحطة القاعدية التي يستخدمها هاتف خلوي معين بشكل أكبر على جودة الاتصال عوضاً عن المسافة الجغرافية.



(a)

منظور مبسط جداً تكون فيه كافة الخلايا ذات شكل سداسي



(b)

منظور أكثر واقعية تتموضع فيه المحطات القاعدية على نحو غير منتظم تختار فيه الهوائيات الخليوية المحطة أفضل

الشكل 1.9: الخلايا والمحطات القاعدية لشبكة خلوية.

عندما يجري هاتف خلوي مكاملة، فإنه يوصل من خلال الهوائي الخاص به والإشعاع الكهرومغناطيسي إلى المحطة القاعدية وفق أفضل مسار اتصال متاح. توصل المحطات القاعدية في منطقة معينة إلى مكتب إقتال الهاتف النقال *mobile telephone switching office* (MTSO) بوساطة أسلاك ذات سرعات نقل عالية، أو بوساطة الألياف الضوئية، أو عن طريق الوصلات الميكروية. توصل MTSO إلى شبكة الهاتف السلكية العامة، وهكذا فإن مكاملة واردة من هاتف خلوي توصل أولاً إلى محطة قاعدية موصولة مع MTSO والتي ترتبط بدورها مع شبكة سلكية. تُسير المكاملة إلى وجهتها، والتي قد تكون هاتفاً خلوياً آخر، أو خط هاتفي سلكي، أو اتصالاً مع حاسوب ما. يقودنا ذلك إلى النظر إلى الشبكة الخلوية على أنها ليست شبكة مستقلة بحد ذاتها، وإنما كشبكة إضافية ملحقمة بشبكة سلكية. تلعب MTSO أيضاً دوراً رئيساً في تنسيق اختيار المحطة القاعدية التي سوف تتعامل مع اتصال ناجم عن هاتف خلوي أو قادم إليه من هاتف آخر، وتحديد توقيت تسليم *hand-off* مكاملة خلوية من محطة قاعدية إلى أخرى.

عندما يقوم هاتف آخر سلكي أو لاسلكي بالاتصال بهاتف خلوي معين، فإن عملية الاتصال السابقة تصبح معكوسة. يحدد أولاً موقع الهاتف الخلوي ومن ثم تحدد كل من MTSO والمحطة القاعدة الأقرب، ويجري الاتصال أخيراً من خلالهما (أي MTSO والمحطة القاعدية). يطلق على الوصلة اللاسلكية من المحطة القاعدية إلى الهاتف الخلوي اسم الوصلة الهابطة *downlink* (أو الأمامية)، كما تُسمى الوصلة فيما بين الهاتف الخلوي والمحطة القاعدية اسم الوصلة الصاعدة *uplink* (أو العائدة). يوصل في أغلب الأحيان العديد من أجهزة الهواتف المحمولة إلى محطة قاعدية واحدة. يحتم ذلك قيام تلك المحطة بتجميع *multiplexing* إشارات الوصلة الهابطة المزمع وصولها إلى كل من الهواتف المحمولة الموصولة مع المحطة. تقوم الأخيرة ببث الإشارة الموجية الوحيدة التي جرى تجميعها حيث يمكن لكل هاتف خلوي انتزاع إشارته منها. تدعى مجموعة الأقتية الهابطة من المحطة القاعدية إلى الهواتف المحمولة المتعددة بقناة البث *Broadcast Channel*. يقوم كل هاتف خلوي بإرسال الموجة الخاصة به إلى المحطة القاعدية فيما يطلق عليه اسم الوصلة الصاعدة كما بيّنا سابقاً. تتلقى المحطة القاعدية مجموع الإشارات الموجية الناجمة عن كل هاتف خلوي مضافاً إليها الضجيج بأنواعه المختلفة. يترتب على المحطة القاعدية عندئذ فصل الإشارة التي جرى كشفها والناجمة عن إشارات الهواتف الخلوية وتمرير تيارات التناثية إلى MTSO. تُسمى مجموعة أقتية الوصلة الصاعدة إلى محطة قاعدية محددة بقناة متعددة النفاذ *multi-access channel*.

كانت الأنظمة الخلوية في وقت مبكر تماثلية، حيث إنها كانت تقوم وبشكل مباشر بتعديل حامل ذي تردد عال بالإشارة الصوتية ومن ثم إرسال الإشارة الناجمة. يسند لكل هاتف محمول يقع ضمن خلية محددة إشارات تعديل مختلفة وتستخدم الخلايا المتجاورة مجموعات مختلفة من الترددات. ويمكن إعادة استخدام المجموعة نفسها من الترددات للخلايا البعيدة عن بعضها بعضاً بشكل كاف يقلل من خطر التداخل *interference*.

تتصف كافة الأنظمة الخلوية الأكثر حداثة بكونها رقمية (أي أنها تستخدم واجهة ثنائية)، وبالتالي يمكن من حيث المبدأ، أن تستخدم لنقل الصوت أو المعطيات. وبما أن هذه الأنظمة الخلوية ومعاييرها ارتكزت في الأساس على الاتصالات الهاتفية، فإن تحديد معدلات المعطيات الحالية والتأخير في الأنظمة الخلوية، يتم من خلال المتطلبات الهاتفية التقليدية. لا تزال هذه النظم تستخدم على الأغلب في الاتصالات الهاتفية، إلا أن كل القدرة على إرسال المعطيات وتطبيقها تتزايد بشكل متسارع. كما يجري العمل وبشكل متسارع على زيادة إمكانات معدلات نقل بيانات الأنظمة الخلوية بالمقارنة مع معدلات النقل في الاتصالات الهاتفية.

وكما ذكر أعلاه، هناك أنواع أخرى كثيرة من الأنظمة اللاسلكية بالمقارنة مع الخلوية منها. أولاً هناك أنظمة البث مثل راديو AM و FM والتلفزيون وأنظمة الترحيل. تماثل هذه النظم الجزء المتعلق بالبث في الشبكات الخلوية، على الرغم من أن معدلات النقل، وحجم المناطق التي تغطيها كل عقدة اتصال، والنطاقات الترددية مختلفة جداً.

وبالإضافة إلى ذلك، هناك الشبكات المحلية اللاسلكية LANS التي صمّمت لتعمل بمعدلات نقل أعلى بكثير من الأنظمة الخلوية، وبخلاف ذلك فإنها تشبه إلى حد ما خلوية واحدة من نظام الهاتف الخليوي. كما أنها تقوم (أي الشبكات المحلية) بربط الحواسيب الشخصية، والمشاركة في الأجهزة المحيطية والربط مع المخدمات الكبيرة... الخ، وذلك ضمن مبنى مخصص للمكاتب أو أي بيئة محلية مماثلة. يتوقع من هذه النظم توفير مرونة قليلة حيث إن وظيفتها الرئيسية هي تجنب توصيل متاهة من الكابلات في المباني التي تتوضع فيها المكاتب. المعايير الرئيسية لهذه الشبكات هي عائلة 802.11 من المعيار IEEE. هناك معيار مماثل وعلى نطاق أصغر يدعى Bluetooth يهدف إلى الحدّ من الكابلات وتبسيط إجراءات الانتقال بين المكاتب والتعامل مع الأجهزة المحمولة.

أخيراً، هناك نوع آخر من الشبكات المحلية تدعى الشبكات المخصصة النقالة *ad hoc network*. تعامل في هذا النوع من الشبكات كافة العقد على حدّ سواء وذلك عوضاً عن العقدة المركزية (المحطة القاعدية) التي تتدفق من خلالها كامل حركة المعطيات. تنظم هذه الشبكات نفسها على شكل روابط فيما بين أزواج العقد وتطور جداول توجيه مبنية على هذه الروابط. تعد قضايا طبقة الشبكة التي تتعلق ببروتوكولات التوجيه والتحكم المشترك، الشاغل الرئيس للشبكات المخصصة؛ إلا أن ذلك يشكل ابتعاداً عما يجري التركيز عليه في دراستنا هذه التي تتمحور حول اتصالات الطبقة الفيزيائية.

تعدّ المعيرة standardization أحد أهم الإشكالات لدى جميع هذه الأنظمة اللاسلكية. فقد فرض بعض هذه المعايير من قبل الهيئة الفيدرالية للاتصالات (FCC) في الولايات المتحدة الأمريكية والوكالات المقابلة لها في بلدان أخرى. أدى ذلك إلى الحد من عرض النطاق الترددي المتاح للاتصالات الخلوية التقليدية إلى ثلاثة نطاقات ترددية تعمل في المجالات الترددية 0.9 GHz، 1.9 GHz و 5.8 GHz. ظهرت حاجة ملحة لأنواع أخرى من المعيرة نتيجة رغبة مستخدمي أجهزة الهواتف النقالة في استخدام تجهيزاتهم في مناطق محلية وأخرى عالمية. هناك ثلاثة أنواع رئيسية راسخة من الأنظمة الخلوية الرقمية غير المتوافقة مع بعضها بعضاً. أول هذه النظم هو نظام Global Systems for Mobile Communication (GSM)¹³⁸، الذي كان معياراً أوروبياً وأصبح يستخدم حالياً على المستوى العالمي، والنظام الآخر هو معيار Code Division Multiple Access (CDMA) Time Division Multiplexing (TDM) المطور في الولايات المتحدة الأمريكية، والثالث هو Code Division Multiple Access (CDMA). يجري باستمرار تطوير هذه النظم وأنظمة أخرى أكثر حداثة من خلال تزويدها بمجموعة مذهلة من الميزات الجديدة. تستطيع العديد من أجهزة الهاتف الخلوية المحمولة التبديل بين أنماط عمل متعددة وذلك كحل جزئي لإشكاليات عدم التوافق.

سوف يركز هذا الفصل بشكل رئيس على CDMA، حيث يرجع ذلك جزئياً إلى أن كثيراً من أحدث النظم تستخدم هذا النهج، وعلى أنه أيضاً يوفر وسيلة ممتازة لمناقشة مبادئ الاتصال. سوف نناقش GSM و TDM بشكل مختصر، إلا أن إشكاليات المعيرة تتركز على قضايا غير تكنولوجية متغيرة بشكل متسارع مما أدى إلى التوقف عن التوسع بدراستها وعدم مناقشتها بإسهاب.

يُطرح عند التفكير في الشبكات المحلية اللاسلكية والهواتف الخلوية، سؤال هام حول ما إذا كان سيتم يوماً ما دمجها معاً في شبكة واحدة. تتوافر معدلات نقل بيانات متوافقة مع معدلات نقل الصوت في الشبكة الخلوية، كما تتوافر إمكانية نقل البيانات بمعدلات أعلى بكثير مما هو معمول به حالياً في الشبكات المحلية اللاسلكية، وبالتالي فإن السؤال هو ما إذا كانت هذه المعدلات المرتفعة جداً مرغوبة تجارياً للشبكات الخلوية المعيارية. يعد وسط الاتصال اللاسلكي أكثر صعوبة للاتصال منه لوسط الشبكات السلكية. حيث إن الطيف المتاح للأنظمة الخلوية محدود للغاية، ومستوى التداخل مرتفع جداً، كما أن النمو المتسارع يزيد من مستوى التداخل. وبالتالي، فإن إضافة معدلات نقل مرتفعة سوف يفاقم مشكلة التداخل هذه حتى أكثر من ذلك. بالإضافة إلى ذلك، تحدّ شاشات الإظهار الصغيرة للأجهزة المحمولة باليد من كمية البيانات التي يمكن عرضها مما يشير إلى أن العديد من تطبيقات مثل هذه الأجهزة لا يحتاج إلى معدلات نقل بيانات مرتفعة جداً. وبالتالي فإنه من المشكوك فيه ما إذا كانت البيانات عالية السرعة ضرورية للشبكات الخلوية أو مرغوب بها في المستقبل القريب. هناك منافسة شديدة من الناحية الأخرى، فيما بين مزودي الخليوي، وكل يسعى لتمييز الخدمة التي يقدمها من خلال ميزات

¹³⁸ GSM (جي إس إم) تعني الأنظمة العالمية للاتصالات المتنقلة، وهذا الاختصار هو أكثر انتشاراً وقدرة على التعبير.

جديدة تتطلب زيادة في معدلات نقل البيانات.

تبدأ الأجزاء اللاحقة من هذا الكتاب دراسة الجوانب التكنولوجية للقنوات اللاسلكية، مع التركيز في المقام الأول على الأنظمة الخلوية. يدرس القسم 2.9 بشكل موجز الخواص الكهرومغناطيسية التي تنشر الإشارات من المرسل إلى المستقبل. يحول القسم 3.9 هذه النماذج الكهرومغناطيسية التفصيلية إلى توصيف أبسط لدخل/خروج القناة. يمكن وصف معظم نماذج الدخل والخروج بشكل أكثر بساطة كنماذج ترشيح خطية متغيرة زمنياً.

يلحظ نموذج الدخل/خروج المبين أعلاه كل من الدخل وخصائص القناة والخروج، على أنها منظومة تمرير passband. يجد القسم 4.9 مكافئ المجال القاعدي (الأساسي) Baseband للقناة وفق منظور التمرير هذا، وقد اتضح أنه يمكن نمذجة القناة على أنها مرشح مجال قاعدي خطي متغير زمنياً. وأخيراً، يستبدل نموذج المجال القاعدي المحدد deterministic في القسم 5.9، بنموذج عشوائي stochastic. يقدم ما تبقى من هذا الفصل قضايا مختلفة عن الاتصالات عبر هذه القناة القاعدية العشوائية، إلى جانب التعديل وكشف التعديل بوجود الضجيج. كما ناقش أيضاً قياس قناة والتميز والتنوع. يُنهى الفصل بدراسة موجزة عن معيار نظام CDMA الخلوي IS95.

2.9 نمذجة أقتية الاتصالات اللاسلكية

تعمل قنوات الاتصال اللاسلكية بواسطة إشعاع كهرومغناطيسي من المرسل إلى المستقبل. يمكن للمرء أن يحل من حيث المبدأ معادلات ماكسويل للإشارة المرسل لإيجاد الحقل الكهرومغناطيسي عند هوائي الاستقبال. كما يترتب أن تؤخذ بالحسبان في هذه الحسابات الانعكاسات الناجمة عن المباني المجاورة، والمركبات، والأراضي والمياه، إضافة إلى تأثيرات الأجسام الواقعة في خط النظر بين المرسل والمستقبل.

ونظراً لأن طول موجة $\Lambda(f)$ الإشعاع الكهرومغناطيسي لأي تردد f يعطى بالعلاقة $\Lambda = c/f$ ، حيث تعطى سرعة الضوء بالعلاقة $c = 3 \times 10^8$ متر في الثانية. وبالتالي يكمن الطول الموجي في النطاقات المخصصة للاتصالات الخليوية بين 0.05 و0.3 متر. يترتب أن تكون مواقع المستقبل وأية عوائق معروفة ومحددة بدقة عالية جداً كي يتم احتساب شدة الحقل الكهرومغناطيسي عند المستقبل. تبدو معادلات الحقل الكهرومغناطيسي غير معقولة للحل، خاصة من أجل المستخدمين المتنقلين. وهكذا، فإن الكهرومغناطيسية لا يمكن أن تستخدم لتوصيف الأقتية اللاسلكية بالتفصيل، إلا أنها سوف توفر فهماً حول الطبيعة الكامنة وراء هذه الأقتية.

السؤال المهم الذي يطرح نفسه هو اختيار مكان توضع المحطات القاعدية، ومجال مستويات الطاقة اللازمة للوصلات الهابطة والصاعدة. إن الإجابة على هذا السؤال هي إلى حد بعيد تجريبية، إلا أنها تساعد في التعرف على أنواع الظواهر التي ينبغي أن نتوقعها. كما أن السؤال الهام الآخر هو أنماط تقنيات الترميز والكشف التي الواعدة التي ينبغي توظيفها. إن أنواع الظواهر التي يجب أن نتوقعها أمر مهم، إلا أن المعلومات يجب أن توظف بطريقة مختلفة. ونظراً لاستخدام الهوائيات المحمولة في ظل مجموعة واسعة من الظروف المختلفة، فإنه من الأنسب النظر إلى هذه الظروف احتمالياً. إلا أنه يترتب قبل وضع نموذج عشوائي لسلوك القناة استكشاف خصائص القنوات اللاسلكية من خلال النظر في العديد من النماذج المثالية.

1.2.9 هوائيات الفضاء الحر، والإرسال والاستقبال الثابت

لدى دراسة هوائي ثابت يشع في الفضاء الحر، يتكون الحقل البعيد¹³⁹ من الحقلين الكهربائي والمغناطيسي وهما في أي نقطة d متعامدان بالنسبة إلى بعضهما بعضاً من جهة ومع اتجاه انتشار الهوائي من جهة أخرى. كما أنهما متناسبان مع بعضهما بعضاً، لذلك سنركز فقط على الحقل الكهربائي (تماماً كما نعد عادة الجهد أو التيار فقط للإشارات الإلكترونية). إن الحقل الكهربائي في نقطة d هو بشكل عام شعاع ذو مركبتين في اتجاه الإحداثيين x و y ومتعامدتين مع خط الانتشار. تكون قيمة إحدى هاتين المركبتين في كثير من الأحيان منعدمة مما يُمكن من النظر إلى الحقل الكهربائي في النقطة d على أنه تابع حقيقي للزمن، ويهدف تبسيط الدراسة فإننا نأخذ

¹³⁹ الحقل البعيد هو الحقل الذي يكون بعيداً عن الهوائي عدداً من أطوال الموجات، وتعتبر (1.9) عن النموذج الذي يقيد العدد الممكن من الزيادة في أطوال الأمواج. إن افتراض وقوع المستقبلات الخليوية في الحقل البعيد هو افتراض آمن.

بالحسبان هذه الحالة فقط. عادة ما تكون الموجة الكهربائية موجة تمرير مجال passband معدلة حول حامل، مما يجعلنا نركز على الجزء العقدي الموجب من التردد. يمكن التعبير عن استجابة الحقل البعيد في نقطة d لموجة عقدية جيبية مرسلية $\exp(2\pi if t)$ على النحو التالي:

$$(1.9) \quad E(f, t, d) = \frac{[\alpha_s(\theta, \psi, f) \exp\{2\pi if(t - r/c)\}]}{r}$$

تمثل (r, θ, ψ) النقطة d في الفراغ الذي يجري قياس الحقل الكهربائي فيه، حيث d هي المسافة من هوائي الإرسال وتمثل (θ, ψ) الزوايا الشاقولية والأفقية من الهوائي إلى النقطة d . نعبّر عن نمط إشعاع هوائي الإرسال من أجل التردد f في الاتجاه (θ, ψ) بتابع عقدي $\alpha_s(\theta, \psi, f)$. يشمل مطال α_s فقد الهوائي؛ بينما يمثل طور هذا التابع α_s تغير الطور الناجم عن الهوائي. يتغير طور الحقل أيضاً مع fr/c ، بما يتناسب مع التأخير r/c الناجم عن انتقال الإشعاع بسرعة الضوء c .

نحن لسنا معنيين هنا فعلياً في إيجاد نمط الإشعاع لأي هوائي محدد، ولكن فقط في إقرار وجود أنماط شعاعية للهوائيات، وأن الحقل البعيد يعتمد على هذا النمط وكذلك على التخميد $1/r$ وعلى التأخير r/c .

يعود سبب اضمحلال الحقل الكهربائي بالتناسب مع $1/r$ في الفراغ إلى تمثيلة ككرات spheres متزايدة في نصف القطر ومتحدة في المركز حول الهوائي. وبما أنه لا يوجد فقد في الفراغ، فإن إجمالي الطاقة المشعة من سطح كل من هذه الكرات يبقى ثابتاً. وبالنظر إلى أن المساحة تتزايد مع r^2 ، فإن الطاقة المشعة في وحدة المساحة يجب أن تتناقص بمعدل إلى $1/r^2$ ، لذلك فإن E يجب أن تنخفض قيمتها بالتناسب مع $1/r$. لا يعني هذا أن الطاقة تشع بشكل منتظم في كافة الاتجاهات - يجري تحديد نموذج الإشعاع من قبل هوائي الإرسال. هذا التخفيض للطاقة مع المسافة r^{-2} كما سنرى لاحقاً، غير صالح في بعض الأحيان خاصة عندما توجد موانع تعيق الانتشار في الفراغ. لنفترض وجود هوائي استقبال ثابت في الموقع $d = (r, \theta, \psi)$ ، تكون عندئذ الإشارة المستقبلية على نهايات الهوائي (في حالة عدم وجود ضجيج) استجابة للتابع $\exp(2\pi if t)$ هي:

$$(2.9) \quad \frac{\alpha(\theta, \psi, f) \exp\{2\pi if(t - r/c)\}}{r}$$

حيث $\alpha(\theta, \psi, f)$ هي نتاج ضرب α_s (نموذج هوائي الإرسال) بنموذج هوائي الاستقبال. وبالتالي نكون قد أخذنا بالحسبان الضياعات والتغيرات في الطور لكلا الهوائيين في $\alpha(\theta, \psi, f)$. تفسير هذه الاستجابة هو أن هوائي الاستقبال يسبب تغيرات محلية فقط في الحقل الكهربائي، وبالتالي لا يغير أي من تأخير r/c ، وتخميد $1/r$.

يمكن التعبير عن تابع النظام $\hat{h}(f)$ من أجل دخل وخرج محددين وفق يلي:

$$(3.9) \quad \hat{h}(f) = \frac{\alpha(\theta, \psi, f) \exp\{-2\pi ifr/c\}}{r}$$

بالتعويض في المعادلة (2.9)، تكون الاستجابة للتابع $\exp(2\pi if t)$ هي $\hat{h}(f) \exp(2\pi if t)$. وبالتالي فإن الاستجابة في المستقبل لتراكب من التوابع الجيبية المرسلية هي مجرد تراكب الاستجابات الناجمة عن التوابع الجيبية. إن الاستجابة لدخل عشوائي $x(t) = \int \hat{x}(f) \exp\{2\pi if t\} df$ هي:

$$(4.9) \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f) \hat{h}(f) \exp\{2\pi if t\} df$$

نلاحظ من المعادلة (4.9) أن تحويل فورييه للخروج $y(t)$ هو: $\hat{y}(f) = \hat{x}(f) \hat{h}(f)$. وباستخدام نظرية الطي فإن ذلك يعني:

$$(5.9) \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

حيث $h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(f) \exp(2\pi if t) df$ هو تحويل فورييه العكسي للتابع $\hat{h}(f)$. وبما أن الدخل والخروج يجب أن يكونا حقيقيين، فإن $\hat{x}(f) = \hat{x}^*(-f)$ و $\hat{y}(f) = \hat{y}^*(-f)$ ، ومنه يجب أن يكون $\hat{h}(f) = \hat{h}^*(-f)$ أيضاً.

إن القناة في مثال الفضاء الحر هذا هي بالتالي نظام تقليدي خطي ثابت زمنياً (LTI) لها استجابة نبضية $h(t)$ وتابع نظام $\hat{h}(f)$. من أجل الحالة الخاصة حيث نمط الهوائي $\alpha(\theta, \psi, f)$ حقيقي ومستقل عن التردد (على الأقل حول المجال الترددي المستخدم)، نجد أن

$\hat{h}(f)$ هو تابع أسّي عقدي¹⁴⁰ في f وبالتالي $h(t)$ هو $\frac{\alpha}{r} \delta(t - \frac{r}{c})$ حيث δ هو تابع ديراك. تعطى $y(t)$ باستخدام العلاقة (9.5) بالعلاقة:

$$y(t) = \frac{\alpha}{r} x\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

إذا لم يكن $\hat{h}(f)$ تابعاً أسياً عقدياً، فلا يمثل $h(t)$ الاستجابة، ويصبح $y(t)$ نسخة غير مرشحة من $x(t)$ عوضاً عن كونه ببساطة نسخة مخمدة ومؤخرة زمنياً. مع ذلك يعتمد $y(t)$ فقط على $\hat{h}(f)$ ضمن النطاق الترددي الذي لا تكون فيه $\hat{x}(f)$ منعدمة. وبالتالي فإنه من الشائع نمذجة $\hat{h}(f)$ كتابع أسّي عقدي (ويكون عندئذ $h(t)$ تابع ديراك - دلنا قياسى مزاح) كلما كان $\hat{h}(f)$ تابع أسّي عقدي على النطاق الترددي المستخدم.

سوف نجد لاحقاً أن الخطية هي افتراض جيد لجميع القنوات اللاسلكية قيد الدراسة، إلا أن عدم التغير مع الزمن لا يتحقق عندما يكون كلا الهوائي أو الأجسام العاكسة في حركة نسبية بالنسبة لبعضهما بعضاً.

2.2.9 الفراغ الحر، الهوائي المتحرك

نستمر في افتراض هوائي ثابت يث في الفراغ الحر، لكننا نفترض الآن أن هوائي الاستقبال يتحرك بسرعة ثابتة v مبتعداً عن هوائي الإرسال. أي أننا نفترض أن هوائي الاستقبال هو في موقع متحرك يمكن وصفه بالعلاقة $\mathbf{d}(t) = (r(t), \theta, \psi)$ حيث $r(t) = r_0 + vt$. يعطى الحقل الكهربائي عند النقطة المتحركة $d(t)$ في حالة عدم وجود هوائي الاستقبال كاستجابة للدخل $\exp(2\pi if t)$ بالمعادلة (9-1) وفق ما يلي:

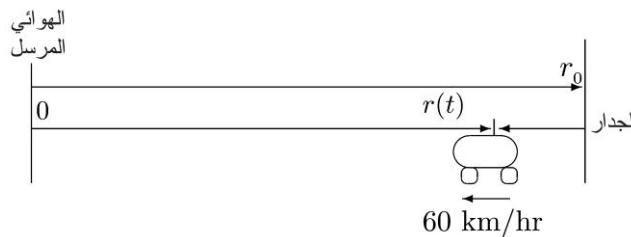
$$(6.9) \quad E(f, t, \mathbf{d}(t)) = \frac{\alpha_s(\theta, \psi, f) \exp\{2\pi if(t - r_0/c - vt/c)\}}{r_0 + vt}$$

يمكننا إعادة كتابة $f(t - r_0/c - vt/c)$ على النحو التالي: $f(1-v/c)t - f r_0/c$. وهكذا فقد جرى تحويل التابع الجيبي من التردد f إلى التردد $f(1-v/c)$. أي أنه لدينا إزاحة دوبلر بمقدار $-fv/c$ نتيجة حركة $d(t)$ ¹⁴¹. يترتب من الناحية الفيزيائية أن تنتقل القمم المتتالية في التابع الجيبي أبعد قليلاً قبل أن تلاحظ في نقطة المراقبة المتحركة. لدى وضع هوائي الاستقبال عند النقطة $d(t)$ ، فإن الاستجابة الموجية للتابع $\exp(2\pi if t)$ عند أطراف هوائي الاستقبال تعطى بالعلاقة.

$$(7.9) \quad \frac{\alpha(\theta, \psi, f) \exp\{2\pi i [f(1 - \frac{v}{c})t - \frac{fr_0}{c}]\}}{r_0 + vt}$$

حيث $\alpha(\theta, \psi, f)$ هو حاصل جداء نموذجي هوائي الإرسال وهوائي الاستقبال.

لا يمكن تمثيل هذه القناة كقناة LTI لأن الاستجابة لتابع جيبي ليست تابعاً جيبياً له التردد نفسه، ونظراً لكونها لا تزال خطية فيمكن توصيفها كقناة خطية متغيرة مع الزمن. سنقوم بدراسة الأتنية المتغيرة زمنياً في الفقرة التالية، إلا أننا سنحلل أولاً عدة نماذج بسيطة تتضمن فيها الأمواج الكهرومغناطيسية المستقبلية أيضاً انعكاسات من أجسام أخرى.



الشكل 2.9: المسار المباشر والمسار المنعكس.

¹⁴⁰ بشكل أكثر عمومية، $\hat{h}(f)$ هو تابع أسّي عقدي إذا كان $|\alpha|$ مستقلاً عن f و $\angle \alpha$ خطية في f .

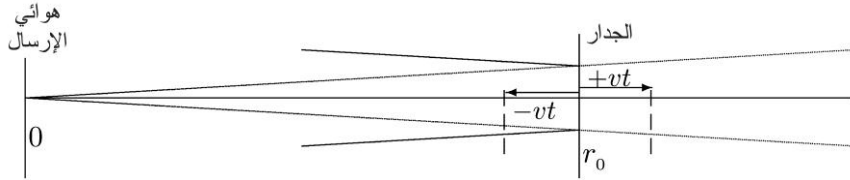
¹⁴¹ تنتج انزياحات دوبلر للأمواج الكهرومغناطيسية مبادئ دوبلر الخاصة بالأمواج الصوتية نفسها. ينخفض الضجيج الناجم عن طائرة على سبيل المثال، عندما تطير مبتعدة عن الموقع.

3.2.9 هوائي متحرك، جدار عاكس

يبيّن الشكل (2.9) أدناه هوائياً ثابتاً يرسل إشارة جيبية $\exp(2\pi if t)$. كما يبيّن الشكل جسماً عاكساً ذا ناقلية مثلى يقع على مسافة r_0 من هوائي الإرسال. تبدأ مركبة في الزمن $t = 0$ بالانتقال من الجدار باتجاه هوائي الإرسال بسرعة v . أيضاً، هناك هوائي استقبال موضّع على المركبة تُعطى مسافته من هوائي الإرسال في الوقت $t > 0$ بالعلاقة $r_0 - vt$.

إن قيمة الحقل الكهربائي في حالة عدم وجود المركبة المتحركة وهوائي الاستقبال في النقطة $r_0 - vt$ ، هي محصلة إشارتي الفراغ الحر والموجة المنعكسة عن الجدار. إذا افترضنا أن الجدار هو كبير جداً، فإن قيمة الإشارة المنعكسة عند النقطة $r_0 - vt$ لا تتغير (عدا عن التغير في الإشارة بطبيعة الحال) عن تلك الموجودة على الجانب الآخر من الجدار في حالة غيابه (انظر الشكل 3.9). وهذا يعني أن الإشارة المنعكسة على مسافة $r_0 - vt$ من هوائي الإرسال لديها شدة وتأخير موجة الفراغ الحر عند مسافة $r_0 - vt$. يعطى حاصل ضم الحقلين الكهربائيين على مسافة $d(t)$ استجابة للدخل $\exp(2\pi if t)$ بالمعادلة التالية:

$$(8.9) \quad E(f, t, d(t)) = \frac{\alpha_s(\theta, \psi, f) \exp \left\{ 2\pi if \left[t - \frac{r_0 - vt}{c} \right] \right\}}{r_0 - vt} - \frac{\alpha_s(\theta, \psi, f) \exp \left\{ 2\pi if \left[t - \frac{r_0 + vt}{c} \right] \right\}}{r_0 + vt}$$



الشكل 3.9: العلاقة بين الموجة المباشرة والموجة المنعكسة بدون وجود جدار.

إن الإشارة عند طرفي الهوائي $y(t)$ بما التي تتضمن تلك الناجمة عن المركبة المتحركة والهوائي الخاص بها، هي الحقل الكهربائي المعدل بنموذج pattern هوائي الاستقبال. وبافتراض أن هذا النموذج ولأغراض التبسيط متطابق في اتجاه الموجة المباشرة وتلك المنعكسة، فإن الإشارة المستقبلية هي:

$$(9.9) \quad y_f(t) = \frac{\alpha \exp \left\{ 2\pi if \left[t - \frac{r_0 - vt}{c} \right] \right\}}{r_0 - vt} - \frac{\alpha \exp \left\{ 2\pi if \left[t - \frac{r_0 + vt}{c} \right] \right\}}{r_0 + vt}$$

يقترب هذا في جوهره من حل معادلات ماكسويل بأسلوب تقريبي باستخدام طريقة تقريبية يطلق عليها اسم تعقب الشعاع *ray tracing*. ينجم هذا التقريب من افتراض أن الجدار هو كبير بشكل لا متناهٍ وأن كلا الحقلين هما مثالياً حقول بعيدة. الحد الأول في المعادلة (9.9) أي الموجة المباشرة، هو تابع ترددي جيبى $f(1 + v/c)$ ؛ يزداد مطاله ببطء مع t بالقيمة $1/(r_0 - vt)$. أما الحد الثاني فهو تابع ترددي جيبى $f(1 - v/c)$ يتناقص مطاله بالقيمة $1/(r_0 + vt)$. يخلق الجمع بين الترددين تردد *beat* عند $f v/c$. كى نقوم بتحليل ما سبق، فإننا نفترض في البداية أن t صغيرة جداً بحيث إن المقام في كل حد أعلاه يمكن أن يقرب للقيمة r_0 . ثم وبعد حذف الحدود المشتركة في الأسس، فإن قيمة $y_f(t)$ تعطى بالعلاقة:

$$(10.9) \quad y_f(t) \approx \frac{\alpha \exp \left\{ 2\pi if \left[t - \frac{r_0}{c} \right] \right\} (\exp \{ 2\pi if vt/c \} - \exp \{ -2\pi if vt/c \})}{r_0} \\ = \frac{2i \alpha \exp \left\{ 2\pi if \left[t - \frac{r_0}{c} \right] \right\} \sin \{ 2\pi f vt/c \}}{r_0}$$

يمثل ذلك حاصل ضرب تابعين جيبيين، يقع أحدهما عند تردد الدخل f ، وهو نموذجياً من مرتبة جيغا هرتز، أما الآخر فيقع عند تردد دوپلر المراه $f v/c$ ، الذي يقع عند التردد 500 Hz أو أقل.

إذا كان الهوائي يتحرك على سبيل المثال بسرعة 60 km/h، وكان التردد يساوي 900 MHz، فإن تردد *beat* هو $f v/c = 50 \text{ Hz}$. يكون لتردد التابع الجيبى نحو 1.8×10^7 دورة من أجل كل دورة لتابع الإيقاع. يشبه $y_f(t)$ تابعاً جيبياً مطاله متغير بشكل جيبى دورته 20 ms. يتغير المطال من قيمته العظمى الموجبة إلى قيمته الدنيا المنعدمة بنحو 5 ms. بالنظر إلى ما سبق وبشكل مغاير، فإن الاستجابة تتناوب بين الظهور والخفوت (التلاشي) لحوالي 5 ms. يُسمى ذلك بخفوت تعدد المسارات. لاحظ أنه ينظر إلى الاستجابة في المعادلة (9.9) كمجموع

تابعين جيبيين، لكل منهما تردد مختلف عن الآخر، بينما الاستجابة في المعادلة (10.9) هي تابع جيبي وحيد تردده هو تردد التابع الأصلي ومطاله متغير بالنسبة إلى الزمن.

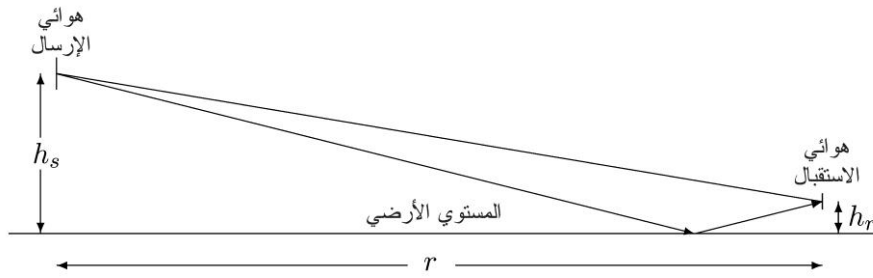
هاتان هما طريقتان مختلفتان لعرض الموجة عينها، وبذلك يمكن أن نرى لماذا جرى تقريب حد مقام المعادلة (9.9) في المعادلة (10.9). عندما يكون الفرق بين المسارين ربع طول الموجة، فإن الاستجابتين وفق المسارين تتغيران بمقدار $\pi/2$ ، وهذا يؤدي إلى تغيير كبير جداً في سعة الإشارة المستقبلية الشاملة. تكون الفترة الزمنية، التي يتغير الطور فيها بشكل كبير ذات قيمة صغيرة جداً بالمقارنة مع الفترة الزمنية التي يتغير فيها المقام بشكل معتبر، وذلك لأن طول موجة الحامل صغير جداً بالمقارنة مع طول المسار. يعد التغير في الطور كبيراً خلال فترات زمنية تقدر بالملي ثانية، في حين تكون تغيرات المقام كبيرة على مدى فترات من ثوانٍ أو دقائق. إن الفترات الزمنية ذات الصلة بأعراض التعديل والكشف هي ميلي ثانية أو أقل، بينما تكون المقامات فعلياً ثابتة خلال هذه الفترات.

قد يلاحظ القارئ أن هناك حاجة إلى المزيد من التقريب حتى في نماذج لاسلكية بسيطة جداً بالمقارنة مع الاتصالات اللاسلكية. يرجع هذا جزئياً إلى أن الافتراضات القياسية الخطية غير المتغيرة زمنياً للاتصالات اللاسلكية دائماً ما تقدم نماذج مبسطة، مثل تابع النظام في المعادلة (3.9)، بينما تكون الأنظمة اللاسلكية في العادة متغيرة زمنياً. يعد القيام بالتقريب المناسب في الأنظمة اللاسلكية في أحيان كثيرة أكثر أهمية من التلاعب بالمعادلات.

4.2.9 الانعكاس عن أرض مسطحة

ليكن لدينا هوائي إرسال وهوائي استقبال موضَّعان على أرض مسطحة مثل طريق (انظر الشكل 3.9). إذا كانت زاوية الورود بين الهوائي والطريق هي صغيرة بما فيه الكفاية، يعكس عندئذ عازل معظم موجة الورود، مع تغيير في إشارتها. عندما تصبح المسافة الأفقية بين الهوائيين كبيرة جداً بالمقارنة مع الانزياح الشاقولي عن مستوى الأرض، يحدث شيء مثير للدهشة. يصبح على وجه الخصوص الفرق بين طول المسار المباشر وطول المسار المنعكس منعديماً بمقدار القيمة r^{-1} وذلك مع زيادة r .

عندما تكون r كبيرة بشكل كافٍ، يصبح هذا الفرق بين طولي المسارين صغيراً بالنسبة إلى طول الموجة c/f لتابع جيبي تردده f . ونظراً لتغير إشارة الحقل الكهربائي على المسار المنعكس، فإن الحقلين الكهربائيين يلغيان بعضهما بعضاً. تُحمد محصلة الحقل الكهربائي عند المستقبل بالمقدار r^{-2} ، وتنخفض الطاقة المستقبلية وفق القيمة r^{-4} . لقد جرى بحث ذلك تحليلياً في التمرين (3.9). يبيّن هذا المثال أن الطاقة المستقبلية يمكن أن تنخفض قيمتها بشكل كبير وعلى نحو أسرع من r^{-2} عند وجود انعكاسات، حيث يؤدي هذا التحليل الهندسي إلى تخميد يتناسب مع r^{-4} بالمقارنة مع خفوت تعدد المسارات.



الشكل 4.9: انعكاس الموجات المباشر وغير المباشر من سطح مستو.

إن المقصود بالمثل أعلاه إظهار كيف يمكن أن يتغير التخميد بمقدار يختلف عن r^{-2} في حالة وجود انعكاسات، وبخاصة تلك الناجمة عن أسطح الطرق غير المستوية على نحو مثالي، والتي تجعلها تتصرف بطرق أكثر تعقيداً. يتغير تخميد الطاقة في أمثلة أخرى باطراد مع r^{-2} أو أنها قد تتناقص بشكل أسي بالتناسب باطراد مع r^{-6} ؛ كما يجدر بالذكر أنه لا يمكن دائماً فصل مؤثرات الخفوت هذه عن آثار المسارات المتعددة.

إن الانخفاض السريع في الطاقة مع ازدياد المسافة مفيد في اتجاه وضارّ في اتجاه آخر، فهو مفيد في الحد من التداخل بين الخلايا المتجاورة، إلا أنه ضارّ في تخفيض تغطية الخلايا. يتزايد استخدام الأنظمة الخلوية على نحو متسارع بشكل كبير ومع ذلك، يبقى المحدد الرئيس لحجم الخلية هو عدد الهوائيات المحمولة المستخدمة ضمنها. يتناقص حجم الخلايا باطراد في المناطق ذات الاستخدام المكثف حيث

أصبح من الممكن الحديث عن خلايا صغيرة micro وخلايا أكثر صغراً pico استجابة لهذا التأثير .

5.2.9 التظليل

التظليل (الحجب) هو ظاهرة لاسلكية مشابحة لانحجاب أشعة الشمس عن طريق السحب. تحدث هذه الظاهرة عندما تقع مواد ذات طبيعة جزئية الامتصاص مثل جدران المباني بين هوائيات الإرسال والاستقبال. تعاني الهوائيات المحمولة سواء كانت داخل المباني أو خارجها عندما تحجب عن محطاتها القاعدية بالمباني أو المنشآت الأخرى.

يختلف تأثير الظل عن خفوت تعدد المسارات في ناحيتين هامتين. أولاً، لدى الخفوت الناجم عن الظلال فترات دورية من مرتبة الثواني أو الدقائق، ولهذا السبب، غالباً ما يُسمى الخفوت الناجم عن الظلال بالخفوت البطيء، بينما يُسمى الخفوت تعدد المسارات بالخفوت السريع. ثانياً، الخفوت الناجم عن الظلال هو أسي بالتناسب مع عرض الجدار المخترق، وبالتالي فإن خفوت الطاقة الكلي لا يجوي تأثير r^{-2} الناجم عن تأثير الفراغ الحر على الإرسال فحسب، وإنما الخفوت الأسي الناجم عن عمق المواد المعرّقة لعبور الإشارة أيضاً.

6.2.9 هوائي متحرك، عواكس متعددة

استخدمت كل الأمثلة ذات المسارين أعلاه طريقة تتبع الأشعة ray tracing لحساب الاستجابة الفردية من كل مسار ومن ثم إضافتها لإيجاد الاستجابة الكلية لدخل جيبي. يمكن معالجة التعامل مع عدد عشوائي من العواكس بالطريقة نفسها. يعد إيجاد السعة والطور لكل مسار مهمة صعبة بشكل عام، حيث إنه وحتى في الحالة بسيطة المفترضة لجدار كبير المبنية في الشكل (2.9)، فإن الحقل المنعكس الذي جرى حسابه بالمعادلة (9.9) لا يعد صالحاً إلا من أجل مسافات صغيرة بعيداً عن الجدار مقارنة بأبعاده. يتناسب إجمالي الطاقة المنعكسة من الجدار على مسافات أكبر مع كل من r_0^{-2} والمقطع العرضي للجدار. يتناسب الجزء من الطاقة الذي يصل إلى المستقبل مع $(r_0 - r(t))^{-2}$. وبالتالي فإن تخميد الطاقة من المرسل إلى المستقبل (للموجة المنعكسة على مسافات كبيرة) يتناسب مع $[r_0(r_0 - r(t))^{-2}]$ بدلاً من $[r_0 - r(t)]^{-2}$ ، وهذا يدل على أن طريقة تعقب الشعاع يجب تستخدم بشيء من الحذر. إلا أنه ولحسن الحظ، فإن الخطية لا تزال تتحقق في هذه الحالات الأكثر تعقيداً.

يطلق اسم التبعثر scattering على نوع آخر من الانعكاس يحدث في الغلاف الجوي أو من خلال الانعكاس من أجسام خشنة للغاية. يمكن في هذه الحالة أن نقوم بنمذجة المجموعة الكبيرة جداً من المسارات كتكامل عبر المسارات الضعيفة متناهية الصغر بدلاً من مجموع ذي قيمة متناهية.

يعد إيجاد مطال الحقل المنعكس من كل نوع من أنواع العواكس أمراً مهماً في تحديد نطاق التغطية، وبالتالي توضع المحطات القاعدية، على الرغم من أن إجراء التجارب الحقلية أمر ضروري في نهاية المطاف. بيد أن دراسة هذا الموضوع بمزيد من العمق، سوف يأخذنا بعيداً جداً في نظرية الكهرومغناطيسية وبعيداً أيضاً عن إشكاليات التعديل وكشف التعديل والنفاذ المتعدد. نوجه الآن اهتمامنا نحو فهم طبيعة المجموع التراكمي للموجة المستلمة؛ نتيجة معرفة تمثيل كل موجة منعكسة. وهذا يعني نمذجة سلوك الدخول/الخروج للقناة عوضاً عن الاستجابة التفصيلية لكل مسار.

3.9 نماذج الدخول/الخروج لأقنية الاتصال اللاسلكية

توضح هذه الفقرة كيفية عرض قناة تتكون من مجموعة اعتبارية من مسارات كهرومغناطيسية J كنموذج دخل/خروج أكثر تجريدًا. هناك مسار مباشر وآخر منعكس في مثال جدار الانعكاس أعلاه، لذلك $J = 2$. قد يكون هناك في أمثلة أخرى مسار مباشر مع مسارات منعكسة متعددة، كل منها قادم من أجسام عاكسة مختلفة. يتم في كثير من الحالات إهمال المسار المباشر والإبقاء على المسارات غير المباشرة.

يرافق المسارات الهامة في كثير من الحالات الفيزيائية مسارات مخمدة للغاية وغير ذات أهمية. تحذف هذه المسارات المخمدة من النموذج وتدل J عندئذ على عدد ما تبقى من المسارات الجوهرية.

تترافق المسارات الجوهرية J كما بينا في أمثلة الفقرة السابقة، مع تخميد وتأخير زمني عائد لطول المسار وأنماط الهوائيات وخصائص

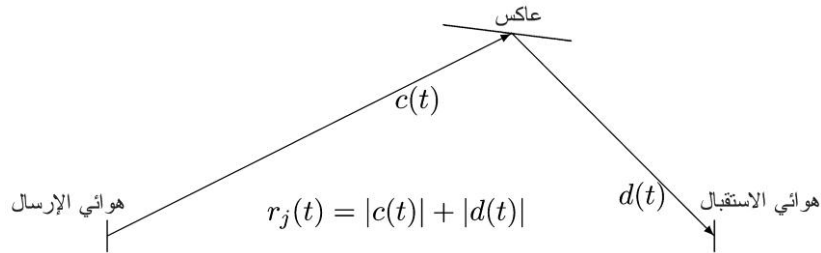
العواكس. وكما هو مبين في الشكل (5.9)، فإن إشارة هوائي الاستقبال القادمة من المسار j استجابة لدخل $\exp(2\pi if t)$ هي:

$$\frac{\alpha_j \exp \left\{ 2\pi if \left[t - \frac{r_j(t)}{c} \right] \right\}}{r_j(t)}$$

تُعطى الاستجابة الكلية عند هوائي الاستقبال لدخل $\exp(2\pi if t)$ بالعلاقة:

$$(11.9) \quad y_f(t) = \sum_{j=1}^J \frac{\alpha_j \exp \left\{ 2\pi if \left[t - \frac{r_j(t)}{c} \right] \right\}}{r_j(t)}$$

عبرنا في مثال الجدار ذي الناقلية المثلى عن الريح التجميعي للهوائي α_1 على المسار المباشر بالقيمة α في المعادلة (9.9). كما عبرنا عن الريح التجميعي للهوائي α_2 على المسار المنعكس بالقيمة $-\alpha$ نظراً لانعكاس الطور عند العاكس. أطوال المسارات هي $r_1(t) = r_0 + vt$ و $r_2(t) = r_0 - vt$ ، مما يجعل المعادلة (11.9) مساوية للمعادلة (9.9) في هذا المثال.



الشكل 5.9: جرى تمثيل المسار المنعكس أعلاه بشعاع $c(t)$ من هوائي الإرسال إلى العاكس وشعاع $d(t)$ من العاكس إلى هوائي الاستقبال. طول المسار $r_j(t)$ هو مجموع أطوال $|c(t)|$ و $|d(t)|$. الشعاع العقدي $\alpha_j(t)$ هو حاصل ضرب نموذج هوائي الإرسال في اتجاه العاكس، ضياع وتغير الطور عند العاكس ونموذج هوائي الاستقبال بعيداً عن اتجاه العاكس

يكون من الملائم بالنسبة للحالة العامة ذات J مسار جوهري استبدال العلاقة (11.9) بعبارة يكون فيها التخميد العقدي $\beta_j(t)$ واضحاً إضافة إلى التأخير الزمني $\tau_j(t)$ على كل مسار.

$$(12.9) \quad y_f(t) = \sum_{j=1}^J \beta_j(t) \exp \{ 2\pi if [t - \tau_j(t)] \}$$

$$(13.9) \quad \beta_j(t) = \frac{\alpha_j(t)}{r_j(t)} \quad \tau_j(t) = \frac{r_j(t)}{c}$$

يمكن أن تستخدم المعادلة (12.9) أيضاً من أجل معدلات تخميد اعتباطية عوضاً عن $1/r^2$ ضياع في الطاقة والمفترض في المعادلة (11.9). تُكتب المعادلة (12.9) على نحو آخر بعد أخذ المعامل المشترك $\exp(2\pi if t)$ خارج القوس وفق ما يلي:

$$(14.9) \quad y_f(t) = \hat{h}(f, t) \exp \{ 2\pi if t \} \quad \text{where} \quad \hat{h}(f, t) = \sum_{j=1}^J \beta_j(t) \exp \{ -2\pi if \tau_j(t) \}$$

يشبه التابع $\hat{h}(f, t)$ تابع النظام $\hat{h}(f)$ الخاص بنظام خطي غير متغير بتغير الزمن (LTI) عدا عن كون التغير هو في الزمن t . وهكذا، يُسمى $\hat{h}(f, t)$ التابع الخطي للنظام المتغير زمنياً (LTV) (أي القناة) أعلاه.

تتغير تخميدات المسار $\beta_j(t)$ ببطء مع الزمن والتردد، إلا أن هذه التغيرات مهمة ضمن مجالات الزمن والتردد قيد الدراسة. وهكذا يستخدم في كثير من الأحيان نموذج مبسط يكون فيه كل تخميد مجرد β_j ثابت. نفترض في هذا النموذج المبسط أيضاً أن كل تأخير مسار يتغير بمعدل ثابت $\tau_j(t) = \tau_j^0 + \tau_j' t$. وهكذا يكون $\hat{h}(f, t)$ في النموذج المبسط هو:

$$(15.9) \quad \hat{h}(f, t) = \sum_{j=1}^J \beta_j \exp \{ -2\pi if \tau_j(t) \} \quad \text{where} \quad \tau_j(t) = \tau_j^0 + \tau_j' t$$

استخدم هذا النموذج المبسط لتحليل الجدار العاكس، حيث كان $\tau_1^o = \tau_2^o = r_0/c$ ، $\beta_1 = -\beta_2 = a/r_0$ وأن $\tau_1' = -\tau_2' = -v/c$.

1.3.9 تابع النظام والاستجابة النبضية لأنظمة LTV

عرفت المعادلة (14.9) التابع $\hat{h}(f, t)$ لنظام خطي متغير زمنياً LTV لقناة متعددة المسارات مع عدد منته منها، كما عرفت المعادلة (15.9) نموذجاً مبسطاً لهذا النظام. يمكن أيضاً وبشكل مباشر تعميم تابع النظام ليشمل قناة ذات مسارات مستمرة. وبشكل أعم من ذلك، إذا كان $y_f(t)$ هو الاستجابة للدخل $\exp(2\pi if t)$ ، عندها يُعرف التابع $\hat{h}(f, t)$ على أنه $\hat{y}_f(t) \exp\{-2\pi if t\}$. تُؤخذ $\hat{h}(f, t) \exp\{2\pi if t\}$ في هذه الفقرة الفرعية على أنها الاستجابة للتابع $\exp(2\pi if t)$ لكل تردد f . إن الهدف هو إيجاد الاستجابة للدخل اعتباطي $x(t)$. وهذا ينطوي على تعميم الاستجابة النبضية المعروفة ومعادلة الطي لأنظمة LTI من أجل حالة LTV. إن الافتراض الرئيس في هذا التعميم هو خطية النظام. فإذا كانت $y_1(t)$ و $y_2(t)$ هي الاستجابة لكل من $x_1(t)$ و $x_2(t)$ على التوالي، فإن

$$\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) \text{ هي الاستجابة للدخل } \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t). \text{ تتبع الخطية بطبيعة الحال معادلات ماكسويل}^{142}.$$

$$\text{باستخدام الخطية، فإن الاستجابة لتراكب توابع جيبيية عقدية، لنقل } x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f) \exp(2\pi if t) df \text{، هو}$$

$$(16.9) \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f) \hat{h}(f, t) \exp(2\pi if t) df$$

هناك استدراج إلى تقليد أعمى لنظرية نظم LTI والخلط بين تحويل فورييه للتابع $y(t)$ ، أي $\hat{y}(f)$ ، على أنه $\hat{h}(f, t) \hat{x}(f)$. وهذا غير صحيح منطقياً وفيزيائياً على حدّ سواء. حيث أنه خطأ من الجانب المنطقي لأن $\hat{h}(f, t) \hat{x}(f)$ هو تابع لكل من التردد والزمن بينما $\hat{y}(f)$ هو تابع للتردد فقط. في حين أنه خطأ من الجانب الفيزيائي لأن انزياحات دوبلر تجعل استجابة التابع $\hat{x}(f) \exp(2\pi if t)$ تحوي توابع جيبيية متعددة حول f عوضاً عن تابع واحد حول f . إن $\hat{y}(f)$ من وجهة نظر المستقبل عند تردد f محدد تعتمد على $\hat{x}(f)$ حول مجال من الترددات f حول f .

لحسن الحظ لا يزال من الممكن استخدام المعادلة (16.9) لاستخلاص شكل مرض للغاية لكل من الاستجابة النبضية ومعادلة الطي. نحدد الاستجابة النبضية المتغيرة زمنياً $h(\tau, t)$ على أنها تحويل فورييه المعاكس (من أجل متحول الزمن τ) للتابع $\hat{h}(f, t)$ ، حيث نعد t كعامل. وهذا يعني أنه من أجل كل $t \in \mathbb{R}$ ، فإن:

$$(17.9) \quad h(\tau, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(f, t) \exp(2\pi if t) df \quad \hat{h}(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau, t) \exp(-2\pi if \tau) d\tau$$

يعدّ $\hat{h}(f, t)$ بشكل طبيعي نظام LTI تقليدي، يتغير ببطء مع t كما ويعد $h(\tau, t)$ الاستجابة النبضية للقناة (من أجل τ) التي تتغير ببطء مع t . بتعويض الجزء الثاني من (17.9) في (16.9)، نجد:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau, t) \exp[2\pi if(t - \tau)] d\tau \right] df$$

بتبديل ترتيب التكامل¹⁴³، نجد:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau, t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f) \exp[2\pi if(t - \tau)] df \right] d\tau$$

ولدى تحديد التكامل الداخلي على أنه $x(t - \tau)$ ، نحصل على معادلة الطي لمرشحات LTV:

$$(18.9) \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) h(\tau, t) d\tau$$

هذا التعبير هو بمنتهى الأهمية، حيث يشير إلى أن تأثير أجهزة الإرسال والاستقبال المحمولة، والعاكس والمصاصات absorbers المتحركة بشكل اعتباطي، وكافة تعقيدات حل معادلات ماكسويل، تتضاءل في النهاية إلى علاقة دخل/خرج بين هوائي الإرسال وهوائي الاستقبال

¹⁴² يمكن للتأثيرات غير الخطية أن تحدث في الهوائيات عالية الطاقة، إلا أننا نهمل ذلك في دراستنا هذه.

¹⁴³ سيتم تجاهل الأسئلة التي تتعلق بالتقارب وحدود التبادل، في هذا القسم. وهذا أمر منطقي لأن المداخل والمخارج ذات الأهمية يجب أن تكون في الأساس هي الوقت والتردد وبحيث تقتصر على نطاق الفعالية للنموذج متعدد المسارات المبسط.

والتي يمكن تمثيلها ببساطة كاستجابة نبضية لمرشح قناة LTV. أي أن $h(\tau, t)$ هو الاستجابة عند الزمن t لنبضة في الزمن $t - \tau$. إذا كان $h(\tau, t)$ هو تابع ثابت في t ، فإن $h(\tau, t)$ كتابع ل τ ، هو الاستجابة النبضية التقليدية لنظام LTI.

ينطبق هذا الاشتقاق على دخل حقيقي أو عقدي. يجب أن يكون الدخل الفيزيائي الفعلي $x(t)$ في مَرّ المجال حقيقياً، ومع ذلك، ومن أجل كل $x(t)$ حقيقية، فإن الخرج المقابل $y(t)$ يجب أن يكون حقيقياً أيضاً. وهذا يعني أن الاستجابة النبضية $h(\tau, t)$ لنظام LTV يجب أن يكون حقيقياً. ينجم عن المعادلة (17.9) أن $\hat{h}(-f, t) = \hat{h}^*(f, t)$ ، والتي تعرف $\hat{h}(-f, t)$ بوساطة $\hat{h}(f, t)$ من أجل كل الترددات الأكبر من الصفر $f > 0$.

هناك العديد من أوجه الشبه بين النتائج أعلاه بين مرشحات LTV والنتائج التقليدية لمرشحات LTI. إن موجة الخرج في كلتا الحالتين هي طي موجة الدخل مع الاستجابة النبضية؛ حيث في حالة LTI، $y(t) = \int x(t - \tau) h(\tau) d\tau$ ، في حين أنه في حالة LTV، فإن $y(t) = \int x(t - \tau) h(\tau, t) d\tau$. إن تابع النظام في كلتا الحالتين هو تحويل فورييه لتابع الاستجابة النبضية؛ حيث من أجل مرشحات LTI فإن $h(\tau) \leftrightarrow \hat{h}(f)$ ، ومن أجل مرشحات LTV فإن $h(\tau, t) \leftrightarrow \hat{h}(f - t)$ ، أي أنه من أجل كل t فإن التابع $\hat{h}(f, t)$ (كتابع للتردد f) هو تحويل فورييه للتابع $h(\tau, t)$ (كتابع للمتحول τ). يكمن الفرق الأكثر أهمية في أن $\hat{y}(f) = \hat{h}(f)\hat{x}(f)$ في حالة LTI، بينما في حالة LTV، فإن العلاقة المقابلة تنص على أن $y(t)$ هو تحويل فورييه العكسي للتابع $\hat{h}(f, t)\hat{x}(f)$.

من المهم أن نذكر أن علاقة فورييه بين تابع الاستجابة النبضية المتغير زمنياً $h(\tau, t)$ وتابع النظام المتغير زمنياً $\hat{h}(f, t)$ صالح لأي نظام LTV ولا يعتمد على نموذج تعدد المسارات المبسط المبين في المعادلة (15.9). هذا النموذج ذو قيمة كبيرة في اكتساب نظرة ثاقبة على كيفية تأثر الموجة المرسله بكل من تعدد المسارات والتخميد.

يمكن بسهولة استخراج $h(\tau, t)$ المبين في المعادلة (15.9) من $\hat{h}(f, t)$ وفق ما يلي:

$$(19.9) \quad \hat{h}(f, t) = \sum_{j=1}^J \beta_j \exp\{-2\pi i f \tau_j(t)\} \quad \leftrightarrow \quad h(\tau, t) = \sum_j \beta_j \delta\{\tau - \tau_j(t)\}$$

حيث δ هي تابع دلتا ديراك. بتعويض المعادلة (19.9) في المعادلة (18.9) نجد:

$$(20.9) \quad y(t) = \sum_j \beta_j x(t - \tau_j(t))$$

ينص ذلك على أن الاستجابة في الزمن t لدخل اعتباطي هي مجموع الاستجابات على كافة المسارات، والاستجابة على المسار z هي ببساطة الدخل، مؤخراً بالمقدار $\tau_j(t)$ ومخمداً بالقيمة β_j . لاحظ أنه قد جرى تقييم كل من التأخير والتخميد في الزمن t الذي يجري قياس الخرج عنده.

تنجم النبضات المثالية، غير المادية، في المعادلة (19.9) بسبب الافتراض الضمني بأن الخفوت والتأخير الزمني في كل مسار مستقل عن التردد. يمكن من المعادلة (16.9) ملاحظة أن $\hat{h}(f, t)$ يؤثر فقط على مجال التردد عندما تكون $\hat{x}(f)$ غير منعدمة. إذا استمر الاستقلال عن التردد عبر هذا المجال الترددي، فإنه يمكن أن نفترض دون الوقوع بأي ضرر أنه مستمر على جميع الترددات، مما يؤدي إلى النبضات أعلاه. هذا الاستقلال عن التردد هو عادة افتراض معقول، من أجل تطبيقات نموذجية ذات نطاق ضيق نسبياً.

لا توفر النتائج العامة عن أنظمة LTV ولا نتائج نماذج المسارات المتعددة في المعادلتين (14.9) و (15.9) أية رؤية فورية عن طبيعة الخفوت. يدرس القسمان الفرعيان التاليان هذه الإشكالية، أولاً من أجل مداخل جيبيية، ومن ثم من أجل مداخل عامة ضيقة النطاق.

2.3.9 انتشار دوبلر وتماسك الزمن

إذا افترضنا نموذجاً مبسطاً للخفوت تعدد المسارات في (15.9)، يمكن التعبير عن تابع النظام $\hat{h}(f, t)$ كما يلي:

$$\hat{h}(f, t) = \sum_{j=1}^J \beta_j \exp\{-2\pi i f (\tau_j' t + \tau_j^o)\}$$

يتعلق انزياح دوبلر على المسار z عند التردد f بمعدل تغير التأخير τ_j' على المسار z بالقيمة $D_j = -f\tau_j'$ ، وبذلك يمكن التعبير عن

$\hat{h}(f, t)$ مباشرة من خلال انزياح دوبلر وفق المعادلة:

$$\hat{h}(f, t) = \sum_{j=1}^j \beta_j \exp \{2\pi i(D_j t - f\tau_j^0)\}$$

وبذلك تكون الاستجابة للدخل $\exp(2\pi i f t)$ هي:

$$(21.9) \quad y_f(t) = \hat{h}(f, t) \exp\{2\pi i f t\} = \sum_{j=1}^j \beta_j \exp\{2\pi i(f + D_j)t - f\tau_j^0\}$$

يشكل ذلك محصلة توابع جيبيية حول f تتراوح بين قيمة $f + D_{\max}$ و $f + D_{\min}$ هي القيمة الأصغر لانزياحات دوبلر و D_{\max} هي القيمة الأعظم؛ والتعابير $-2\pi f\tau_j^0$ هي ببساطة أطوار. يمكن لانزياحات دوبلر D_j المبينة أعلاه أن تكون موجبة أو سالبة، إلا أننا نفترض أن قيمتها صغيرة بالمقارنة مع تردد الإرسال f . وبذا تكون $y_f(t)$ حزمة ضيقة عرض مجالها هو المسافة بين D_{\max} و D_{\min} . يعرف هذا الانتشار

$$(22.9) \quad D = \max_j D_j - \min_j D_j$$

بأنه انتشار دوبلر للقناة *Doppler spread*، وهو تابع للتردد f (نظراً لأن كل انزياحات دوبلر هي تابعة للتردد f)، إلا أننا ننظر إلى هذه الانزياحات عادة على أنها ثابتة كونها لا تتغير حول أي مجال ترددي محدد قيد الدرس.

انتشار دوبلر كما هو مبين أعلاه، هو عرض النطاق الترددي $y_f(t)$ ، إلا أنه من الضروري الآن أن نكون أكثر تحديداً حول كيفية تعريف الخفوت (التلاشي)، وسوف يؤدي هذا أيضاً إلى تعريف زمن تماسك القناة. يمكن بيان التخماد بشكل أكثر وضوحاً بالتعبير عن $\hat{h}(f, t)$ من خلال مطاله وطوره، أي $\hat{h}(f, t)e^{i\angle \hat{h}(f, t)}$. وبذلك تكون الاستجابة للتعبير $\exp\{2\pi i f t\}$ هي:

$$(23.9) \quad y_f(t) = |\hat{h}(f, t)| \exp\{2\pi i f t + i\angle \hat{h}(f, t)\}$$

يعبر ذلك عن $y_f(t)$ كمطال $|\hat{h}(f, t)|$ مضروب بطور تعديل له مطال قدره 1. يعرف هذا المطال $|\hat{h}(f, t)|$ الآن على أنه مطال الخفوت للقناة عند تردد f . وكما جرى شرحه سابقاً فإن $|\hat{h}(f, t)|$ و $\angle \hat{h}(f, t)$ يتغيرا ببطء بالنسبة إلى $\exp\{2\pi i f t\}$ ، لذلك فإنه يمكن النظر إلى $\hat{h}(f, t)$ من الناحية المنطقية على أنه غلاف متغير ببطء، أي غلاف الخفوت، حول الإشارة الجيبية المستقبلية والمعدلة بالطور. يمكن أن يفسر مطال التخماد بشكل أكثر وضوحاً من خلال الاستجابة $\Re[y_f(t)]$ لتابع دخل جيبي فعلي $\cos(2\pi f t) = \Re[y_f(t)]$ وبأخذ الجزء الحقيقي من المعادلة (23.9)، نجد:

$$\Re[y_f(t)] = |\hat{h}(f, t)| \cos[2\pi f t + \angle \hat{h}(f, t)]$$

تحت الموجة $\Re[y_f(t)]$ عند التردد f داخل الحدود المتغيرة ببطء للتابع $|\hat{h}(f, t)| \pm$. هذا يبين أن $|\hat{h}(f, t)|$ هو الغلاف، ويمثل أيضاً مطال الخفوت للتابع $\Re[y_f(t)]$ (عند التردد f). سيتم توسيع نطاق هذا التفسير لاحقاً ليشمل مداخل حزمة ترددية ضيقة حول التردد f . يبين المعادلة (21.9) أن D هو عرض النطاق الترددي للتابع $y_f(t)$ ، وأنه هو أيضاً عرض مجال $\Re[y_f(t)]$. نفترض في البداية أن انزياحات دوبلر تتركز حول الصفر، أي أن $D_{\max} = -D_{\min}$. وبذلك فإن $\hat{h}(f, t)$ هو موجة مجال قاعدي (أساسي) تحتوي على ترددات تتراوح بين $-D/2$ و $+D/2$. غلاف $\Re[y_f(t)]$ أي $\hat{h}(f, t)$ هو مطال موجة مجال قاعدي محددة عند $D/2$. وبالعودة غلى مثال الجدار العاكس نجد أن $D_1 = -D_2$ ، وانتشار دوبلر $D = 2D_1$ ، والغلاف هو $|\sin[2\pi(D/2)t]|$.

وبشكل أكثر عموماً، يمكن أن تتركز انزياحات دوبلر حول بعض القيم غير الصفريية Δ والتي تعرف على أنها نقطة الوسط بين $\min_j D_j$ و $\max_j D_j$. وبالنظر في هذه الحالة إلى تابع نظام انزياح التردد $\hat{\psi}(f, t)$ والذي يعرف بأنه:

$$(24.9) \quad \hat{\psi}(f, t) = \exp(-2\pi i t \Delta) \hat{h}(f, t) = \sum_{j=1}^j \beta_j \exp\{2\pi i t(D_j - \Delta) - 2\pi i f \tau_j^0\}$$

عرض مجال $\hat{h}(f, t)$ كتابيع للزمن t ، هو $D/2$. وبما أن:

$$|\hat{\psi}(f, t)| = |e^{-2\pi i \Delta t} \hat{h}(f, t)| = |\hat{h}(f, t)|$$

غلاف $\Re[y_r(t)]$ هو نفسه¹⁴⁴ مطال $\hat{\psi}(f, t)$ ، أي مطال موجة مجال قاعدي (أساسي) تحتوي على ترددات محددة عند $D/2$ ، وهذا التحديد صالح بغض النظر عن تركز انزياح دوبلر.

نفترض على سبيل المثال وجود مسار واحد قيمة انزياح دوبلر له هي D_1 ، ويكون عندئذ $\hat{h}(f, t)$ تابع عقدي جيبي عند التردد D_1 ، إلا أنه ذو قيمة ثابتة $|\beta_1|$. انتشار دوبلر هو ذو قيمة منعدمة (أي صفر)، والغلاف ثابت القيمة، وبالتالي لا يوجد خفوت. نفترض أيضاً كمثال آخر أن المرسل في الجدار العاكس في مثالنا السابق يتحرك بعيداً عن هذا الجدار، يُقَلَّص ذلك كلا انزياحي دوبلر، إلا أن الفرق بينهما أي انتشار دوبلر، يبقى ثابتاً، كما أن $\hat{h}(f, t)$ يحافظ على قيمته نفسها. يوضح هذان المثالان أن انتشار دوبلر وليس انزياحات دوبلر هو الذي يتحكم بالغلاف.

عرّف زمن تماسك القناة على أنه¹⁴⁵

$$(25.9) \quad T_{coh} = \frac{1}{2D}$$

يمثل ذلك ربع طول الموجة $D/2$ (التردد الأعظمي في $\hat{\psi}(f, t)$)، ونصف الفاصل الزمني لتردد أخذ العينات (الاعتيان) المقابل. ونظراً لأن الغلاف هو $|\hat{\psi}(f, t)|$ ، فإن T_{coh} تُحَدِّد كمتقياس كفي (خام) للفاصل الزمني النموذجي للغلاف حتى يتغير بشكل ملموس. كما أنه ولكون هذا الغلاف هو مطال الخفوت للقناة عند التردد f ، فإن T_{coh} يفسر أساساً على أنه مرتبة قيمة فترة مطال الخفوت عند تردد f . تكون قيمة D نموذجياً أقل من 1000 Hz، وبذلك فإن قيمة T_{coh} أكبر من نصف ميللي ثانية.

تميل توابع عرض المجال العالية إلى التغير بسرعة أكبر من توابع عرض المجال المنخفضة، على الرغم من أنه لا يمكن تحديد سرعة التغيرات في تابع المجال القاعدي فقط بدلالة عرض المجال الترددي؛ وبذلك يعبر تعريف وقت التماسك عن هذه العلاقة الفضفاضة. يتغير الغلاف في مثال الجدار العاكس، من قيمة قصوى وصولاً إلى الصفر، خلال الفترة T_{coh} ؛ وهذا أكثر أو أقل نموذجية في أغلب الأمثلة العامة. على الرغم من عدم دقة T_{coh} كمتقياس لمدة الخفوت، إلا أنه يعد معياراً هاماً في وصف القنوات اللاسلكية، حيث يستخدم في التصميم الموجي، وتوفير ميزات التنوع في التصميم، واستراتيجيات قياس القناة. عندما يتم عرض نماذج العشوائية المتعددة لاحقاً، فإن العلاقة بين مدة الخفوت وزمن التماسك T_{coh} تصبح أكثر وضوحاً.

من المهم أن نذكر أن انزياحات دوبلر هي خطية في تردد الدخل، وبالتالي يكون انتشار دوبلر خطياً أيضاً؛ كما يكون تغير انتشار دوبلر بالنسبة إلى التردد للمداخل ذات النطاق الضيق ترددياً، غير ذي أهمية. عند المقارنة بين أنظمة ذات مجالات ترددية مختلفة، فإن تغير D مع التردد هو المهم؛ حيث على سبيل المثال، فإن نظاماً يعمل عند تردد قدره 8 جيجا هرتز يكون انتشار دوبلر فيه أكبر بثماني مرات من نظام يعمل عند تردد قدره 1 جيجا هرتز، وبالتالي فترة تماسك أقل بثماني مرات (أي 8/1)؛ وخفوت أسرع، أما من أجل فترات خفوت أكثر قصراً، فإن قياسات القناة تصبح غير صالحة (outdated) بمقدار 8 مرات.

3.3.9 تأخير الخفوت و تماسك التردد

معياري مهم آخر في قناة لاسلكية هي الانتشار في التأخير بين مسارات مختلفة. يتم تعريف تأخير الانتشار L بالفرق بين تأخير المسار على أطول وأقصر مسار. أي:

$$L = \max_j [\tau_j(t)] - \min_j [\tau_j(t)]$$

نادراً ما يكون الفرق بين أطوال المسارات أكبر من بضعة كيلومترات، لذلك فإن L وبالمنطق نفسه نادراً ما تكون أكثر من عدة ميكرو ثانية. نظراً لأن التأخيرات الناجمة عن المسار $\tau_j(t)$ تتغير مع الزمن، فإن L يمكن تتغير أيضاً مع الزمن، لذلك علينا أن نركز على L في زمن

¹⁴⁴ لاحظ أن $\hat{\psi}(f, t)$ تابع حزمة قاعدية محدد بالقيمة $D/2$ ، بينما $\hat{h}(f, t)$ محدد بالترددات ضمن $D/2$ من Δ ، وأن $\hat{y}_r(t)$ محدد بالترددات ضمن $D/2$ من $f + \Delta$. تتمتع هذه الأمواج بالغلاف نفسه مما يبعث مبدئياً على الدهشة. نركز على التابع $\hat{\psi}(f, t) = e^{-2\pi i f \Delta} \hat{h}(f, t)$ لأنه تابع حزمة قاعدية محدد بالقيمة $D/2$. توفر المسائل (17.6) و (5.9) نظرة ثاقبة وأمثلة توضيحية حول أغلفة أمواج تمرير حزمة حقيقية.

¹⁴⁵ يعرف بعض المؤلفين T_{coh} على أنه $1/(4D)$ ، بينما يعرفه آخرون على أنه $1/D$ ؛ ولكلا التعريفين ذات القدر من التفسيرات

محدد t . كما يمكن اعتبار L ثابتة¹⁴⁶ على مدى الفترات الزمنية في التعديل قيد الدرس.

معيار آخر يرتبط ارتباطاً وثيقاً مع دراستنا هو تردد التماسك للقناة. يعرف هذا المعيار كالتالي:¹⁴⁷

$$(26.9) \quad \mathcal{F}_{coh} = \frac{1}{2L}$$

يكون تردد التماسك نموذجياً أكبر من 100 kHz. تبين هذه الفقرة أن \mathcal{F}_{coh} يوفر جواباً تقريبياً للسؤال التالي: إذا كانت القناة تعاني من الخفوت بشكل سيئ جداً عند تردد ما f ، فكم يجب أن نغير في التردد حتى يتم العثور على تردد لا يسبب خفوتاً؟ سوف نرى وبتقريب أولي جداً، أن f يجب أن تتغير بمقدار \mathcal{F}_{coh} .

يشبه تحليل المعيارين L و \mathcal{F}_{coh} مزدوجة الوقت/التردد لتحليل D و T_{coh} . وبشكل أكثر تحديداً، فإن غلاف التخماد $\Re[y_f(t)]$ (استجابة للدخل $\cos(2\pi ft)$ هو $|\hat{h}(f, t)|$. يتعلق تحليل D و T_{coh} بتغير $|\hat{h}(f, t)|$ مع الزمن t ، بينما يتعلق L و \mathcal{F}_{coh} بتغير $|\hat{h}(f, t)|$ مع f .

يشكل $\hat{h}(f, t) = \sum_j \beta_j \exp\{-2\pi i f \tau_j(t)\}$ في النموذج المتعدد المسارات المبسط في المعادلة (15.9)، ومن أجل t ثابتة، مجموع J حد من التوابع الجيبية العقدية الموزونة والتابعة للمتحول f . ترددات هذه الحدود، والتي ينظر إليها كتوابع للتردد f هي $\tau_1(t), \dots, \tau_J(t)$. نفترض τ_{mid} هي نقطة المنتصف بين $\min_j \tau_j(t)$ و $\max_j \tau_j(t)$ ، ونعرف التابع $\hat{\eta}(f, t)$ على أنه:

$$(27.9) \quad \hat{\eta}(f, t) = e^{2\pi i f \tau_{mid}} \hat{h}(f, t) = \sum_j \beta_j \exp\{-2\pi i f [\tau_j(t) - \tau_{mid}]\}$$

تتغير التأخيرات المزاخة $\tau_j(t) - \tau_{mid}$ بتغير z فيما بين القيمتين $-L/2$ و $L/2$. وبالتالي فإن $\hat{\eta}(f, t)$ كتابع للتردد f له غرض مجال حزمة قاعدية¹⁴⁸ قدره $L/2$. نرى من المعادلة (27.9) أن $|\hat{h}(f, t)| = |\hat{\eta}(f, t)|$. وهكذا، فإن الغلاف $|\hat{h}(f, t)|$ كتابع للتردد f ، هو مطال تابع حزمة قاعدية (أساسية) محدود بالقيمة $L/2$. يتبين لنا أنه من المعقول أن نأخذ ربع طول موجة من عرض المجال هذا، أي $\mathcal{F}_{coh} = 1/2L$ كمقياس لمرتبة المطال اللازمة للتغيير المطلوب في f لإحداث تغيير مؤثر في غلاف $\Re[y_f(t)]$.

المناقشة المذكورة أعلاه التي ربطت فيما بين L و \mathcal{F}_{coh} هي مطابقة فعلياً لتلك المتعلقة بالعلاقة فيما بين D و T_{coh} ، كما أن التفسير المتعلق بكل من T_{coh} و \mathcal{F}_{coh} كمرتبة من رتب التقريب للمطال هي من الناحية الفعلية مماثلة أيضاً. ومع ذلك فإن، هذه الازدواجية هي بين t و f في $|\hat{h}(f, t)|$ وليس بين الوقت والتردد للأموح الفعلية المرسل والمستقبل. يمكن أن ينظر إلى الغلاف $|\hat{h}(f, t)|$ الذي استخدم في كل من النقاشات السابقة كمتوسط زمني على المدى القصير في $\Re[y_f(t)]$. (انظر المثال (b)6.9)، وهكذا يمكن تفسير \mathcal{F}_{coh} على أنه تغير التردد المطلوب لإحداث تغيير كبير في المتوسط الزمني عوضاً عن الاستجابة نفسها.

أحد الأسئلة الرئيسية التي نواجهها في الاتصالات اللاسلكية هي في كيفية نشر إشارة دخل أو كلمة مشفرة على الزمن والتردد (في إطار التأخير وقيود التردد المتاحة). إذا كان إشارة متضمنة أساساً داخل حيز زمني T_{coh} وحيز تردد \mathcal{F}_{coh} ، فإن فترة خفوت واحدة يمكن أن تجلب كامل الإشارة إلى مستوى أقل بكثير من مستوى الضجيج. ولكن، إذا نشرت إشارة على حيزات زمنية متعددة مدتها T_{coh} و/أو حزم ترددية متعددة عرضها \mathcal{F}_{coh} ، فإن فترة خفوت واحدة سوف تؤثر على جزء واحد فقط من الإشارة. يُسمى نشر الإشارة على مناطق ذات خفوت مستقل نسبياً بالتنوع، والتي سنقوم بدراستها في وقت لاحق. أما في الوقت الراهن، فيجب أن نلاحظ أن المعاملات T_{coh} و \mathcal{F}_{coh} تعرفنا إلى كمية النشر المطلوبة في الوقت والتردد لاستخدام تقنيات التنوع هذه.

جرى في الفصول السابقة، تأخير توقيت المستقبل عن توقيت المرسل بما يعادل التأخير الكلي للانتشار؛ ويتم ذلك في الممارسة العملية من خلال استرجاع recovery التوقيت عند المستقبل. كما يستخدم توقيت الاسترجاع في الاتصالات اللاسلكية، إلا أنه وبسبب اختلاف تأخير الانتشار باختلاف المسار، فإن استرجاع التوقيت عند المستقبل سوف يؤدي بشكل تقريبي إلى تمركز تأخير المسارات حول الصفر.

¹⁴⁶ إن أطوال المسارات في مثال الجدار العاكس هي $r_0 - vt$ و $r_0 + vt$ ، وبالتالي فإن انتشار التأخير $L = 2vt/c$. يبدو التبديل مع t هنا ذا أهمية، ولكن على مسافة مقبولة عن العاكس، لكن التبديل صغير نسبة إلى الفترات البينية (بين الرموز).

¹⁴⁷ يعرف \mathcal{F}_{coh} في بعض الأحيان على أنه $1/L$ وأنه $1/(4L)$ في أحيان أخرى، إلا أن التفسير يبقى هو نفسه.

¹⁴⁸ بكلمات أخرى، إن تحويل فورييه المعاكس $h(\tau - \tau_{mid}, t)$ يختلف عن الصفر من أجل المجال $L/2 \leq |\tau - \tau_{mid}|$ فقط.

وهذا يعني أن الإزاحة τ_{mid} في المعادلة (27.9) تصبح مساوية للصفر، كما يصبح التابع $|\hat{h}(f, t)| = |\hat{\eta}(f, t)|$. وهكذا، يمكن حذف $\hat{\eta}(f, t)$ من اعتبارات لاحقة ويمكن الافتراض دون خسارة في العمومية أن $h(\tau, t)$ ذو قيمة غير صفرية في المجال $|\tau| \leq L/2$ فقط. ندرس الآن حالة خفوت موجة ضيقة المجال. لنفترض أن $x(t)$ هي موجة تمرير حزمة حقيقية مرسله ذات عرض مجال W حول ناقل f_c . كما نفترض علاوة على ذلك أن $W \ll F_{coh}$ فتصبح $\hat{h}(f, t) \approx \hat{h}(f_c, t)$ وذلك من أجل $f_c - W/2 \leq f \leq f_c + W/2$. لتكن $x^+(t)$ هي الجزء الترددي الحقيقي من $x(t)$ ، بحيث أن $\hat{x}^+(f)$ ذات قيمة غير منعدمة فقط من أجل $f_c - W/2 \leq f \leq f_c + W/2$. تعطى استجابة $y^+(t)$ من أجل $x^+(t)$ بالمعادلة (16.9) وفق ما يلي: $y^+(t) = \int_{f>0} \hat{x}(f) \hat{h}(f, t) e^{2\pi i f t} df$ والتي يمكن أن تقرب إلى:

$$y^+(t) \approx \int_{f_c - W/2}^{f_c + W/2} \hat{x}(f) \hat{h}(f_c, t) e^{2\pi i f t} df = x^+(t) \hat{h}(f_c, t)$$

وبأخذ الجزء الحقيقي لإيجاد الاستجابة $y(t)$ من أجل $x(t)$ ، نجد:

$$(28.9) \quad y(t) \approx |\hat{h}(f_c, t)| \Re[x^+(t) e^{i 2\pi f_c t}]$$

إن تأثير القناة للاتصال بالحزمة الضيقة بكلمات أخرى، هو إحداث خفوت مع الغلاف $|\hat{h}(f, t)|$ ومع تغير الطور $\angle \hat{h}(f_c, t)$. يطلق على ذلك اسم الخفوت المسطح *flat fading* أو الخفوت ضيق الحزمة *narrow-band fading*. يحدث تردد التماسك F_{coh} الحدود بين الخفوت المسطح والخفوت غير المسطح، ويعطي تماسك الزمن T_{coh} مرتبة مدة المطال لهذه الخفوتات. تبدو استجابة الخفوت المسطح في المعادلة (28.9) مختلفة جداً عن الاستجابة العامة في المعادلة (20.9) والتي تعبر عن مجموع تأخير وتحامد المداخل. يعدّ عرض مجال الإشارة في المعادلة (28.9) مع ذلك، صغير جداً بحيث إننا إذا نظرنا إلى $x(t)$ على أنه إشارة حزمة قاعدية معدلة فإن هذه الموجة تكون فعلياً ثابتة على مختلف مسارات التأخير، وهذا سوف يصبح أكثر وضوحاً في الفقرة التالية.

4.9 توابع الحزمة القاعدية للنظام والاستجابات الترددية

تتمثل الخطوة التالية في تفسير قنوات خطية متغيرة زمنياً LTV من خلال التعبير عن تابع نظام تمرير الحزمة المبين أعلاه بحزمة قاعدية معدلة. نذكر أنه من أجل أي موجة عقدية $u(t)$ ، محددة بمجال قاعدي $W/2$ ، فإن الجزء الحقيقي من الإشارة المعدلة $x(t)$ ، حول الحامل f_c يعطى بالعلاقة:

$$x(t) = u(t) \exp\{2\pi i f_c t\} + u^*(t) \exp\{2\pi i f_c t\}$$

نفترض فيما سيلي أن $f_c \gg W/2$.

وباستخدام التعابير الاصطلاحية للتحويل نجد $\hat{x}(f) = \hat{u}(f - f_c) + \hat{u}^*(-f + f_c)$. إن الجزء الموجب من التردد $x(t)$ هو ببساطة $u(t)$ مزاح بمقدار f_c . لفهم تعديل وكشف التعديل في أبسط أشكاله، نأخذ كدخول حزمة قاعدية جيئية عقدية $e^{2\pi i f t}$ من أجل $f \in [-W/2, W/2]$ ، وذلك بعد تعديلها وإرسالها ضمن القناة، ومن ثم كشف تعديلها (انظر الشكل 6.9). ونظراً لأن القناة يمكن أن تكون عرضة لتأخيرات دوبلر، فإن إشارة الحامل المسترجعة في المستقبل \hat{f}_c قد تكون مختلفة عن الإشارة الفعلية f_c . وهكذا، كما هو موضح في الشكل أعلاه، يعطى خرج القناة الموجب بالعلاقة $y_f(t) = \hat{h}(f + f_c, t) e^{2\pi i (f + f_c) t}$ والموجة المكشوفة بالعلاقة $\hat{h}(f + f_c, t) e^{2\pi i (f + f_c - \hat{f}_c) t}$. يعطى تردد خرج القناة الإيجابي بالتراكب من أجل حزمة قاعدية عشوائية في الدخول $u(t) = \int_{-W/2}^{W/2} \hat{u}(f) e^{2\pi i f t} df$ بالعلاقة:

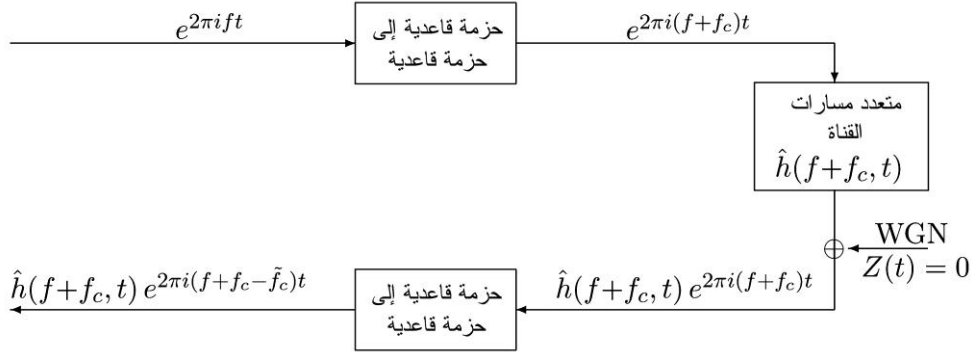
$$y^+(t) = \int_{-W/2}^{W/2} \hat{u}(f) \hat{h}(f + f_c, t) e^{2\pi i (f + f_c) t} df$$

وتكون الإشارة المكشوفة $v(t)$ عندئذ $y^+(t)$ مزاحة بالحامل المسترجع \hat{f}_c ، أي:

$$v(t) = \int_{-W/2}^{W/2} \hat{u}(f) \hat{h}(f + f_c, t) e^{2\pi i (f + \hat{f}_c) t} df$$

لتكن Δ الفرق بين الحامل المرسل والمسترجع¹⁴⁹، أي $\Delta = \bar{f}_c - f_c$ ، وبذلك تنجم المعادلة التالية:

$$(29.9) \quad v(t) = \int_{-W/2}^{W/2} \hat{u}(f) \hat{h}(f + f_c, t) e^{2\pi i(f-\Delta)t} df$$



الشكل 6.9: تابع حزمة قاعدية جيبيية عقدية، معدلة لتصبح حزمة تمرير، وتتم ضمن قناة متعددة المسارات، ومكشوفة بدون ضجيج. يتمحور التعديل حول تردد حامل f_c وتردد كشف التعديل يتمحور بشكل عام حول تردد آخر \bar{f}_c .

يمكن التعبير عن العلاقة فيما بين الدخل $u(t)$ والخرج $v(t)$ بشكل مباشر من خلال تابع الحزمة القاعدية للنظام $\hat{g}(f, t)$ الذي يعرف كما يلي:

$$(30.9) \quad \hat{g}(f, t) = \hat{h}(f + f_c, t) e^{-2\pi i \Delta t}$$

وبذلك تصبح المعادلة (29.9):

$$(31.9) \quad v(t) = \int_{-W/2}^{W/2} \hat{u}(f) \hat{g}(f, t) e^{2\pi i f t} df$$

هذا هو بالضبط شكل علاقة ممر الحزمة نفسه فيما بين الدخل والخرج والمبين في (16.9). يجعل $g(\tau, t) = \int g(f, t) e^{2\pi i f \tau} df$ هو الاستجابة النبضية لتابع الحزمة القاعدية الخطي المتغير زمنياً LTV، فإن المناقشة نفسها التي استخدمت لاستخراج معادلة طي ممر الحزمة تقود إلى:

$$(32.9) \quad v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t - \tau) g(t - \tau) d\tau$$

بماثل تفسير معادلة الطي لهذه الحزمة القاعدية الخطية المتغيرة زمنياً ممر الحزمة الخطي المتغير زمنياً المبين في المعادلة (18.9). يعطى $\hat{h}(f, t) = \sum_{j=1}^J \beta_j \exp\{-2\pi i f \tau_j(t)\}$ من النموذج المبسط في (15.9)، وبالتالي ومن المعادلة (30.9) يكون تابع النظام القاعدي:

$$(33.9) \quad \hat{g}(f, t) = \sum_{j=1}^J \beta_j \exp\{-2\pi i(f + f_c) \tau_j(t) - 2\pi i \Delta t\}$$

يمكن فصل الاعتماد على t من ذلك على f عن طريق إعادة كتابة هذه المعادلة كالتالي:

$$(34.9) \quad \hat{g}(f, t) = \sum_{j=1}^J \gamma_j \exp\{-2\pi i f \tau_j(t)\} \quad \text{where} \quad \gamma_j(t) = \beta_j \exp\{-2\pi i f_c \tau_j(t) - 2\pi i \Delta t\}$$

بأخذ تحويل فورييه المعاكس للمتحول t الثابت، تكون الاستجابة الترددية للحزمة القاعدية الخطية المتغيرة زمنياً:

$$(35.9) \quad g(\tau, t) = \sum_j \gamma_j(t) \delta\{\tau - \tau_j(t)\}$$

¹⁴⁹ قد يكون مناسباً افتراض $\Delta = 0$ في القراءة الأولى.

وبالتالي تكون الاستجابة الترددية في زمن استقبال محدد مساوية لمجموع استجابات، ويكون الحد ذو الترتيب z منها مؤخراً بمقدار $\tau_j(t)$ كما أن تخميده وطوره هما $\gamma_j(t)$. لدى تعويض هذه الاستجابة الترددية في معادلة الطي، فإن علاقة الدخل - خرج هي:

$$v(t) = \sum_j \gamma_j(t) u(t - \tau_j(t))$$

يمكن أن يوفر هذا التمثيل القاعدي نظرة إضافية حول انتشار دوبلر وزمن التماسك. لدى دراسة تابع النظام في (34.9) عند التردد $f = 0$ (أي، عند تردد الحامل)، ويجعل D_j تمثل انزياح دوبلر عند التردد f_c على المسار j ، فيكون $\tau_j(t) = \tau_j^0 - D_j t / f_c$ ومنه:

$$\hat{g}(0, t) = \sum_{j=1}^j \gamma_j(t) \quad \text{where} \quad \gamma_j(t) = \beta_j \exp\{2\pi i [D_j - \Delta]t - 2\pi i f_c \tau_j^0\}$$

تقدر دارة الاسترجاع (التعافي) تردد الحامل من خلال مجموع ما جرى تلقيه من نسخ دوبلر المزاحة للحامل، وبالتالي فمن المنطقي تقدير الانزياح في الحامل المستقبل على أنه نقطة الوسط بين أصغر وأكبر انزياح دوبلر. وهكذا فإن $\hat{g}(0, t)$ هو تابع النظام نفسه المزاح ترددياً $\hat{\psi}(f_c, t)$ والمبين في المعادلة (24.9). وبعبارة أخرى، انزياح التردد Δ الذي جرى تقديمه في المعادلة (24.9)، كحيلة رياضية أصبح له الآن تفسير فيزيائي على أنه الفرق بين تردد الحامل الفعلي f_c وذلك الذي جرى استرجاعه f_c . نلاحظ أن $\hat{g}(0, t)$ هو تردد عرض مجاله $D/2$ وزمن تماسكه $T_{coh} = 1/(2D)$ ، هو تقريب رتبة المطال بالنسبة إلى الفترة الزمنية التي يتغير فيها $\hat{g}(0, t)$ بشكل ملحوظ.

ندرس الآن تابع الحزمة القاعدية للنظام $\hat{g}(f, t)$ عند ترددات قاعدية لا تساوي الصفر. نظراً لأن $W \ll f_c$ فإن انتشار دوبلر عند $f_c + f$ يساوي تقريباً الانتشار عند f_c ، وبالتالي $\hat{g}(f, t)$ بوصفه تابع للزمن t من أجل كل تردد $f \leq W/2$ ، هو أيضاً حزمة قاعدية محددة بالقيمة $D/2$ (حيث جرى تعريف D عند $f = f_c$).

ختاماً، لننظر إلى الخفوت المسطح من وجهة نظر حزمة قاعدية. يحدث الخفوت المسطح عندما $W \ll F_{coh}$ ، وفي هذه الحالة¹⁵⁰ $\hat{g}(f, t) \approx \hat{g}(0, t)$ ، ومن المعادلة (31.9)، نجد

$$v(t) = \hat{g}(0, t) u(t) \quad (36.9)$$

وأخيراً، وبعبارة أخرى، فإن الموجة المستقبلية في غياب الضوضاء، هي مجرد نسخة مخمدة ومزاحة بالطور عن موجة الدخل. إذا كانت دارة استرجاع الحامل تسترجع أيضاً الطور، فإن $v(t)$ هو نسخة مخمدة من $u(t)$. T_{coh} هو فترة رتبة المطال التي يمكن أن تتغير فيها نسبة الخرج إلى الدخل في الخفوت المسطح بشكل ملحوظ.

وباختصار، قدمت هذه الفقرة نموذجي تمرير حزمة وحزمة قاعدية للاتصالات اللاسلكية. المعادلات الأساسية متشابهة جداً، إلا أن النموذج القاعدي أسهل نوعاً ما للاستخدام (على الرغم من أنه يتعد بعض الشيء عن فيزياء الخفوت). تأتي سهولة الاستخدام من حقيقة أن جميع الموجات تتغير ببطء وكلها عقدية، وهذا يمكن أن يُظهر ذلك بوضوح من خلال المقارنة بين علاقات الخفوت المسطح، لحالي تمرير الحزمة (28.9) والحزمة القاعدية (36.9).

1.4.9 نموذج حزمة قاعدية متقطع زمنياً

يستخدم هذا القسم نظرية أخذ العينات لتحويل قناة الحزمة القاعدية المستمرة زمنياً والمذكورة أعلاه إلى قناة متقطع زمنياً (غير متصلة). إذا كان دخل الحزمة القاعدية $u(t)$ محدد بالقيمة $W/2$ ، فيمكن حينئذ أن يمثل بعيناته المتباعدة بمقدار $T = 1/W$ ، حيث إن $u(t) = \sum_{\ell} u_{\ell} \text{sinc}(\frac{t}{T} - \ell)$ ، وأن $u_{\ell} = u(\ell T)$. يعطى خرج الحزمة القاعدية باستخدام (32.9) بالعلاقة:

$$v(t) = \sum_{\ell} u_{\ell} \int g(\tau, t) \text{sinc}(t/T - \tau/T - \ell) d\tau \quad (37.9)$$

¹⁵⁰ هناك فارق هام بين القول إن انتشار دوبلر عند التردد $f + f_c$ هو قريب من ذلك في f_c والقول أن $\hat{g}(f, t) \approx \hat{g}(0, t)$. يتطلب الأول فقط أن تكون W جزءاً صغيراً نسبياً من f_c ، وهي أيضاً معقولة حتى عندما $W = 100 \text{ mHz}$ و $f_c = 1 \text{ GHz}$ ، والتي قد تكون من رتبة مئات المرات من kh .

تعطى عينات المخارج $v_m = v(mT)$ عند مضاريب T بالعلاقة: ¹⁵¹

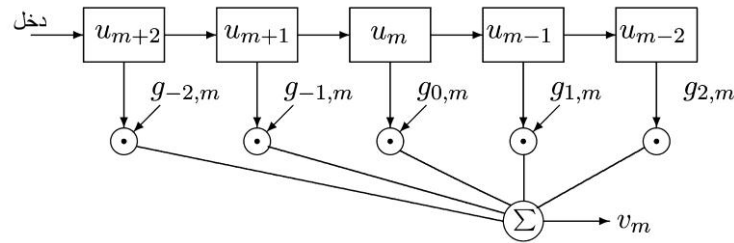
$$(38.9) \quad v_m = \sum_{\ell} u_{\ell} \int g(\tau, mT) \text{sinc}(m - \ell - \tau/T) d\tau$$

$$(39.9) \quad = \sum_k u_{m-k} \int g(\tau, mT) \text{sinc}(k - \tau/T) d\tau$$

حيث $k = m - \ell$. بتسمية التكامل أعلاه $g_{k,m}$ ، يمكن إعادة كتابة المعادلة (39.9) بالشكل المتقطع زمنياً:

$$(40.9) \quad v_m = \sum_k g_{k,m} u_{m-k} \quad \text{where} \quad g_{k,m} = \int g(\tau, mT) \text{sinc}(k - \tau/T) d\tau$$

باستخدام تعابير الزمن المتقطع فإن $g_{k,m}$ هو الاستجابة عند mT لعينة دخل عند $(m-k)T$. نشير إلى $g_{k,m}$ على أنه الوصلة k th (العقدية) لمرشح القناة عند زمن الخرج غير المستمر mT . هذا المرشح غير المستمر زمنياً مبين في الشكل (7.9). إن عدد أقتية وصلات المرشح كما سنناقش لاحقاً، (أي القيم المختلفة لـ k) والتي تكون فيها $g_{k,m}$ ذات قيمة معتبرة لا تساوي الصفر، هو عادة صغير جداً. إذا لم تتغير كل k th وصلة مع m من أجل كل k ، فإن القناة هي خطية لا تتغير مع الزمن. إذا تغيرت كل وصلة ببطء مع m ، فتدعى القناة عندئذ متغيرة ببطء مع الزمن. الأنظمة الخلوية ومعظم الأنظمة اللاسلكية قيد الدرس هي متغيرة ببطء مع الزمن.

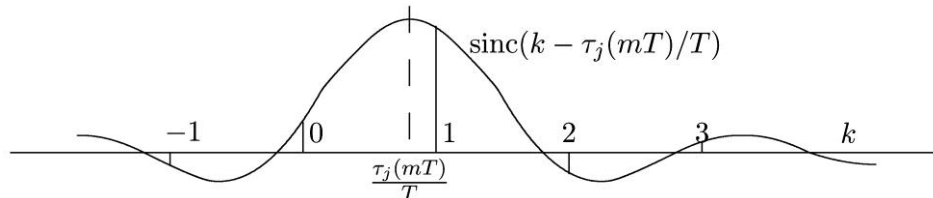


الشكل 7.9: نموذج قناة حزمة قاعدية غير مستمرة زمنياً متغيرة مع الزمن. يلج في كل وحدة من الزمن مدخل جديد إلى مسجل الإزاحة وتتراج القيم القديمة إلى اليمين المسجل، كما تتغير أيضاً وصلات القناة ببطء. نلاحظ أن توقيت الخرج يختلف عن توقيت الدخل بمقدار وحدتين.

نحصل على وصلة المرشح $g_{k,m}$ للنموذج متعدد المسارات المبسط بتعويض (35.9) (أي $g(\tau, t) = \sum_j \gamma_j(t) \delta\{\tau - \tau_j(t)\}$) في الجزء الثاني من (40.9) حيث نحصل على:

$$(41.9) \quad g_{k,m} = \sum_j \gamma_j(mT) \text{sinc}\left[k - \frac{\tau_j(mT)}{T}\right]$$

يمكن تصور مساهمة المسار z على الوصلة k من الشكل (8.9). إذا كان تأخير المسار يساوي kT من أجل عدد صحيح k ، فإن المسار z يقدم مساهمة فقط للوصلة k ، في حين إذا كان تأخير المسار يقع بين kT و $(k+1)T$ ، فإنه يساهم في عدة وصلات حول k و $k+1$.



الشكل 8.9: يبين هذا الشكل $\text{sinc}(k - \tau_j(mT)/T)$ كتابع للمتحول k ، الذي يُسم على الشكل بقيم صحيحة، كما نلاحظ أن $t_j(mT)/T = 0.8$ كما يوضح الشكل. يشير الشكل إلى أن كل مسار يساهم بشكل رئيس في الوصلة tap أو وصلات الأقرب

¹⁵¹ نظراً لانتشار دوبلر، فإن عرض المجال الترددي للخرج $v(t)$ يمكن أن يكون أكبر قليلاً من عرض المجال الترددي $W/2$ للدخل $u(t)$. وهكذا فإن عينات الخرج v_m لا تمثل تماماً موجة الخرج. ومع ذلك، فإن كاشف تعديل QAM يولد أولاً كل إشارة خرج v_m المقابلة لإشارة الدخل u_m ، لذلك يكون لعينات الخرج هذه أهمية أساسية. ومن شأن معالجة أكثر حذراً اختيار نبضة تعديل أكثر ملاءمة من تابع sinc ثم استخدام مزيج من تخمين القناة وكشف الإشارة لإنتاج عينات الخرج، وهذا أبعد من اهتمامنا الحالي.

إلى مسار التأخير قيد الدرس

يمكن فهم العلاقة بين نموذجي الحزمة القاعدية المستمرة وغير المستمرة زمنياً بشكل أفضل، بملاحظة أنه عندما يكون الدخل حزمة قاعدية محددة بالقيمة $W/2$ ، فإن تابع الحزمة القاعدية للنظام $\hat{g}(f, t)$ غير ذي صلة من أجل $f > W/2$. وبالتالي يمكن تعريف تابع نظام مرشح $\hat{g}_W(f, t)$ واستجابة نبضية $g_W(\tau, t)$ من خلال تصفية الترددات التي تزيد قيمتها عن $W/2$ ، أي:

$$(42.9) \quad \hat{g}_W(f, t) = \hat{g}(f, t) \text{rect}(f/W) \quad g_W(\tau, t) = g(\tau, t) * W \text{sinc}(\tau W)$$

بمقارنة هذه المعادلة مع الجزء الثاني من المعادلة (40.9)، نرى أن ربح الوصلات taps هو ببساطة عبارة عن قيم عينات من الاستجابة النبضية المرشحة، أي:

$$(43.9) \quad g_{k,m} = T g_W(kT, mT)$$

يُستبدل تابع الاستجابة النبضية المرشح في النموذج متعدد المسارات البسيط، عند $t_j(t)$ بتابع sinc يتمحور حول $t_j(t)$ كما مبين في الشكل (8.9).

ندرس الآن عدد الوصلات (التفرعات) المطلوبة في نموذج الحزمة القاعدية غير المستمر زمنياً. تأخير الانتشار L ، هو الفاصل بين أصغر وأكبر تأخير في المسار¹⁵² وبالتالي هناك نحو L/T وصلة مسار على مقربة من تأخيرات المسار المختلفة. كما يتوافر عدد إضافي قليل من الوصلات ذات القيمة التي تتوافق مع زمن اضمحلال تابع sinc. إن توقيت التعافي في الحالة الخاصة حيث L/T أصغر بكثير من الواحد، يجعل كافة حدود التأخير قريبة من الصفر ويكون للنموذج غير المستمر زمنياً وصلة واحدة ذات قيمة، وهذا يتوافق بطبيعة الحال مع حالة التخامد المسطح التي درسناها سابقاً.

يوفر زمن التماسك T_{coh} دلالة على مدى سرعة الوصلات الفردية $g_{k,m}$ ، في التغير فيما يتعلق بالمتحول m . إذا تأثرت وصلة $g_{k,m}$ بمسار واحد فقط، فإن $|g_{k,m}|$ لن يتغير فعلياً مع m ، على الرغم من أن $\angle g_{k,m}$ يمكن أن يتغير مع انزياح دوبلر. إذا تأثرت وصلة بعدة مسارات، فإن مطالها يمكن أن يضمحل بمعدل يتعلق بانتشار انزياحات دوبلر التي تؤثر على تلك الوصلة.

5.9 النماذج الإحصائية للأقنية

أنشأت الفقرة السابقة قناة خفوت حزمة قاعدية غير مستمرة زمنياً يكون فيها ربح الوصلات الفردية $g_{k,m}$ في (41.9) هو مجاميع التخميند المحجمة وتأخير سلس على كل مسار. إن المسارات الفيزيائية غير معروفة عند المرسل أو المستقبل، ومع ذلك، ومن وجهة نظر الدخل/الخرج، فإن ربح الوصلات نفسها¹⁵³ هو الغاية الجوهرية. وبما أن ربح الوصلات يتغير مع مرور الوقت، والمكان، وعرض المجال الترددي، وتردد الحامل، وغيرها من المعاملات، لذلك تكون الحاجة ملحة لتوصيف إحصائي لربح الوصلات بهدف فهم كيفية التواصل عبر هذه القنوات. وهذا يعني أن ينبغي النظر إلى ربح كل وصلة $g_{k,m}$ ، كقيمة عينة من متحول عشوائي $G_{k,m}$.

هناك العديد من المقاربات لتوصيف هذه المتغيرات العشوائية لربح الوصلات. تكمن إحداها في جمع إحصاءات عن عدد كبير جداً من المواقع والظروف، ومن ثم نمذجة كثافة الاحتمال المشترك لهذه المتغيرات العشوائية وفقاً لهذه القياسات، والقيام بذلك بشكل شرطي على أنواع مختلفة من مواقع (المدن والمناطق الجبلية والمناطق المسطحة، والطرق، والمباني، الخ...). وقد جُمعت بيانات كثيرة من هذا النوع، إلا أنها أكثر تفصيلاً مما هو مرغوب فيه لتحقيق فهم أولي عن اللاسلكية الإشكالية.

ثمّة نهج آخر يوظف هنا في هذا المجال وفعالاً في كافة البحوث النظرية، يتمثل في اختيار عدد قليل من نماذج الاحتمال البسيطة جداً وسهلة الاستخدام، ومن ثم استخدام نتائج هذه النماذج لاكتساب معرفة عميقة حول الأوضاع المادية الفعلية. نناقش بعد تقديم هذه النماذج الطرق التي قد تعكس أو لا تعكس الواقع الفيزيائي، ونُستخلص بعد ذلك بعض النتائج المعيارية من هذه النماذج، إلى جانب مناقشة الكيفية التي قد تعكس الأداء الفعلي.

¹⁵² تتغير L مع زمن الخرج t ، إلا أننا نهمل ذلك بشكل عام لأن التغير بطيء وأن L ليست ذات قيمة من حيث مرتبة المطال.

¹⁵³ يتميز العديد من القنوات اللاسلكية بعدد قليل جداً من المسارات ذات الأهمية، حيث تتابع أجهزة الاستقبال المقابلة هذه المسارات الفردية بدلاً من استخدام بنية استقبال تقوم على نموذج زمني منقطع. هذا النموذج هو نموذج مفاهيمي مفيد لفهم التباين الإحصائي للمسارات المتعددة.

في نموذج رايلي لريح الوصلة، تؤخذ الأجزاء الحقيقية والتخيلية من كافة ربح الوصلات لتكون ذات قيمة وسطى صفرية لمتحولات غاوس المشتركة العشوائية. كل كسب وصلة $G_{k,m}$ بالتالي هو متغير غاوس عشوائي عقدي والذي يفترض علاوة على ذلك على أنه متناظر دائرياً، أي أن iid لديه أجزاء حقيقية وتخيلية. وأخيراً نفترض أن كثافة احتمال كل $G_{k,m}$ ، هو نفسه بالنسبة لكل قيم m . يمكن بعدئذ التعبير عن كثافة احتمال $G_{k,m}$ ، وفق المعادلة التالية:

$$(44.9) \quad f_{\Re}(G_{k,m}), \Im(G_{re}), (g_{re}, g_{im}) = \frac{1}{2\pi\sigma_k^2} \exp\left\{-\frac{g_{re}^2 - g_{im}^2}{2\sigma_k^2}\right\}$$

حيث σ_k^2 هو تفاوت $\Re(G_{k,m})$ (وبالتالي $\Im(G_{k,m})$ أيضاً) وذلك من أجل كل m . ندرس لاحقاً كيفية ارتباط هذه المتحولات العشوائية مع قيم مختلفة لكل من k و m .

مطال $|G_{k,m}|$ للوصلة k^{th} كما هو موضح في التمرين 1.7، هو متحول رايلي العشوائي ذو كثافة الاحتمال:

$$(45.9) \quad f_{|G_{k,m}|}(|g|) = \frac{|g|}{\sigma_k^2} \exp\left\{-\frac{|g|^2}{2\sigma_k^2}\right\}$$

يطلق على هذا النموذج اسم نموذج خفوت رايلي. نلاحظ من المعادلة (44.9) أن النموذج يتضمن طوراً موزعاً بانتظام ومستقل عن مطال رايلي الموزع. إن افتراض التوزيع النظامي للطور هو منطقي جداً، وحتى في حالة وجود عدد قليل من المسارات، لأن ربع طول الموجة في الترددات الخلوية يعادل بضع بوصات. وهكذا وحتى مع أطوال مسارات محددة بدقة، فإننا نتوقع أن تنمذج الأطوار بحيث تتوزع بانتظام واتساق وتكون مستقلة عن بعضها بعضاً. وهذا من شأنه أيضاً أن يجعل من افتراض الاستقلال بين طور ربح الوصلة والمطال أمراً معقولاً. إن افتراض توزيع مطالات رايلي أمر فيه كثير من الإشكاليات. إذا انطوى القنال على تبعثر من عدد كبير من العواكس الصغيرة، فإن نظرية النهاية المركزية تشير إلى افتراض غاوس المتبادل لربح الوصلات¹⁵⁴، مما يجعل المعادلة (44.9) معقولة. أما في الحالات ذات العدد القليل من المسارات، فإنه لا يوجد مبرر جيد للمعادلات (44.9) و (45.9).

هناك نموذج بديل كثيراً ما يستخدم فيه خط مسار النظر (غالباً ما يسمى مسار النظر) لديه مطال كبير معروف، و يترافق مع عدد كبير من المسارات الأصغر المستقلة عن بعضها بعضاً. يمكن في هذه الحالة أن ينمذج $G_{k,m}$ ، على الأقل بالنسبة لقيمة واحدة من k ، كقيمة عينة من متحول غاوس العشوائي العقدي بمتوسط (يقابل مسار النظر)، بالإضافة إلى تأرجحات iid الحقيقية والتخيلية حول المتوسط. لدى مطال مثل هذا المتحول العشوائي توزع Rician، وكثافته لها شكل معقد نسبياً، إلا أن احتمال الخطأ لهذا التشوير signaling البسيط عبر هذه القناة بسيط جداً ومفيد.

تجعل الفقرات السابقة الأمر يبدو كما لو أنه يجري بناء نموذج لعدد معروف من المسارات لمخرف محدد. إن جزءاً كبيراً من الحاجة إلى نموذج إحصائي، هو تصميم أجهزة الإرسال والاستقبال. يعني وجود عدد كبير من النماذج التحقق من أداء توجهات معينة من كل هذه النماذج، أو قياس القناة، واختيار النموذج الأنسب، والتحول إلى نظام مناسب لهذا النموذج. هذا النهج غير مناسب لمعالجة أولية، وقد يكون غير مناسب للتصميم، مما يعيدنا إلى نماذج رايلي وريشيان Rician. غالباً ما تكون هذه النماذج تقريبية للحالات الفيزيائية المتفردة، إلا أنه عندما يؤخذ متوسطها على كافة الأوضاع الفيزيائية التي ينبغي للنظام اللاسلكي العمل ضمنها، فإن هذه النماذج تصبح أكثر منطقية¹⁵⁵. توفر هذه النماذج على أية حال، نظرة ثاقبة للاتصالات بوجود الخفوت.

توفر نمذجة كل $G_{k,m}$ كقيمة عينة من متحول عشوائي عقدي $G_{k,m}$ جزء من الوصف الإحصائي المطلوب، إلا أن ذلك ليس الإشكالية الوحيدة؛ إذ إن القضية الرئيسة الأخرى هي كيف تتغير هذه الكميات مع مرور الزمن. متوسط هذه المتغيرات العشوائية في نموذج رايلي للخفوت، هو الصفر، وهذا يشكّل فرقاً كبيراً لتقنيات الاتصال المفيدة إذا أمكن تقدير قيم العينات من خلال القيم السابقة. تعرف الكمية الإحصائية التي تنمذج هذه العلاقة بتابع ترابط ربح الوصلة $tap\text{-gain correlation function}$ ، $R(k, \Delta)$ ، والذي يحدد بالعلاقة:

¹⁵⁴ بني معظم النظرية الحالية حول الخفوت في الستينيات من القرن الماضي، عندما جرى نمذجة كل من الاتصالات الفضائية والقنوات العسكرية ذات الأهمية كأقنية تبعثر مع توافر عدد كبير جداً من العواكس الصغيرة.

¹⁵⁵ هذا التبسيط مبالغ فيه إلى حد ما. كما هو مبين في التمرين (9.9)، من الممكن ألا يؤدي اختيار عشوائي لعدد قليل من المسارات من مجموعة كبيرة بالضرورة إلى توزيع رايلي. وهناك أيضاً مسألة الاختيار الأولي لمستوى الطاقة في أي موقع معين.

$$(46.9) \quad R(k, n) = E[G_m G_{k,m}^* + \Delta]$$

هذا يعطي تابع الارتباط الذاتي لسلسلة من المتحولات العشوائية العقدية، ومُدجة كل وصلة k محددة خلال تطورها مع الوقت. نفترض ضمناً أن هذا ليس تابعاً للزمن m ، مما يعني أن سلسلة $\{G_{k,m}; m \in \mathbb{Z}\}$ من أجل كل k هي ثابتة. نفترض أيضاً أن المتحول العشوائي $G_{k,m}$ ، غير مستقل عن $G_{k,m}$ من أجل $k \neq k'$ و m, m' . هذا الافتراض الأخير هو مقبول بديهياً¹⁵⁶ لأن المسارات في النطاقات المختلفة من التأخير تساهم في $G_{k,m}$ ، من أجل قيم مختلفة من k .

يعد تابع الترابط الذاتي مفيداً كوسيلة للتعبير عن إحصاءات كيفية تغير ربح (كسب) الوصلات، من أجل عرض مجال محدد W . إلا أنه لا يتطرق للأسئلة التي تقارن بين نطاقات مختلفة لعرض المجال لغرض الاتصال. إذا كان لنا أن نتصور زيادة عرض المجال الترددي، فتحدث العديد من الأمور. أولاً، نظراً لأن الوصلات منفصلة عن بعضها زمنياً بالقيمة $1/W$ ، فإن مدى التغير المقابل لوصلة واحدة يصبح أكثر ضيقاً. وبالتالي هناك عدد أقل من المسارات التي تساهم في كل وصلة، ويصبح تقريب رايلي في كثير من الحالات أكثر فقراً. ثانياً، توابع سينك في (41.9) تصبح أضيق، وبالتالي فإن فيض تأخير المسار يصبح أقل مع الزمن. لهذا السبب نفسه، $R(k, 0)$ لكل k يعطي صورة أدق لكمية الطاقة التي وردت إلى نافذة التأخير ذات العرض k/W . وخلاصة القول، عندما يجري تطبيق هذا النموذج على عرض مجال W أكبر، يتم توفير معلومات إحصائية أكثر تفصيلاً حول التأخير والترابط عند هذا التأخير، إلا أن هذه المعلومات تصبح أقل صدقية ومشكوك فيها.

يمكن تعريف انتشار متعدد المسار L باستخدام التعبير $R(k, \Delta)$ باعتباره المجال kT الذي يكون فيه $R(k, 0)$ لا يساوي الصفر بشكل ملحوظ. وهذا تعريف أفضل إلى حد ما من التعريف السابق من حيث إن طبيعة L الإحصائية تصبح واضحة للعيان والاعتماد على نوع من السكون يصبح واضحاً. ومع ذلك ولجعل هذا التعريف يحمل معنى أكثر عمقاً، يجب أن يكون عرض المجال W كبير بما فيه الكفاية لكي يوجد عدد ذو شأن من الوصلات.

يمكن أيضاً تعريف زمن التماسك T_{coh} على نحو أوضح على أنه mT من أجل القيمة الأصغر من $\Delta > 0$ التي يختلف فيها $R(0, \Delta)$ بشكل ملحوظ عن $R(0, 0)$. يكتنف كلا التعريفين بعض الغموض حول ما تعنيه "هامة significant"، ولكنهما يواجهان حقيقة أنه ينبغي النظر إلى T_{coh} الأرضي بشكل احتمالي - إحصائي عوضاً عن قيم لحظية.

1.5.9 ضجيج تمرير الحزمة والحزمة القاعدية

يركز نموذج القناة الإحصائي الذي درسناه سابقاً على كيفية تأثير تعدد المسارات وانزياحات دوبلر على العلاقة بين الدخل والخروج، إلا أنه جرى إهمال الضجيج والتداخل من القنوات اللاسلكية الأخرى. سوف يستمر إهمال التداخل من المستخدمين الآخرين (باستثناء اعتباره ضجيجاً إضافياً)، إلا أننا سنقوم الآن بأخذ الضجيج بالحسبان.

نفترض أن الضجيج هو (White Gaussian Noise) WGN مع استطاعة WN_0 عبر كامل عرض المجال W ، كما نفترض أن الاصطلاح السابق لقياس استطاعة الإشارة واستطاعة الضجيج عند حزمة القاعدة سيبقى ساري المفعول. بتوسيع النموذج الدخل/مخرج الحتمي لحزمة القاعدة $v_m = \sum_k g_{k,m} u_{m-k}$ ليضم الضجيج إضافة إلى مكاسب الوصلات المتغيرة عشوائياً،

$$(47.9) \quad V_m = \sum_k G_{k,m} U_{m-k} + Z_m$$

افترض أن $\dots, Z_{-1}, Z_0, Z_1, \dots$ هي سلسلة iid من المتحولات العشوائية العقدية الغوسية والمتناظرة دائرياً. افترض أيضاً أن المدخل وكسب الوصلات والضجيج مستقلة إحصائياً عن بعضها بعضاً.

يعني افتراض WGN أساساً أن المصدر الرئيس للضجيج هو في المستقبل أو هو في الإشعاع الذي يؤثر على المستقبل أي أنه مستقل عن المسارات التي يتم تلقي إشارة عبرها. هذا هو، ويعد ذلك عادة افتراض جيد جداً بالنسبة لمعظم حالات الاتصالات. نظراً لأن جرى

¹⁵⁶ يمكن القول إن مسار الانتقال سيرتجل تدريجياً من مجال وصلة ما إلى أخرى. وهذا صحيح، إلا أن الفترات الزمنية لمثل هذه التغيرات عادة ما تكون كبيرة بالنسبة إلى فترات أخرى قيد الدراسة.

نمذجة المدخل والمخارج هنا كعينات ذات معدل W من عمليات الحزمة القاعدية، لدينا $E[|U_m|^2] = P$ حيث P هي القيد على استطاعة دخل الحزمة القاعدية، وبشكل مشابه $E[|Z_m|^2] = N_0 W$. وهكذا نرسم لكل متحول عقدي عشوائي $Z_m \sim CN(0, WN_0)$. سيتمّ تقييس كسب الوصلات بحيث $V'_m = \sum_k G_{k,m} U_{m-k}$ يحقق $E[|V'_m|^2] = P$. يمكن أن نلاحظ أن عملية التقييس قد جرى تحقيقها بوساطة:

$$(48.9) \quad E \left[\sum_k |G_{k,0}|^2 \right] = 1$$

هذا الافتراض باستبعاد التخميد الكلي من الدراسة، مماثل لافتراضنا السابق لقناة WGN عادية (لا يوجد فيها خفوت). جرى تحديد استطاعة الإشارة بعبارة أخرى سواء في هذه الفقرة أو الفقرات السابقة، على أنها استطاعة الإشارة المستقبلية في حالة عدم وجود ضجيج. يعد هذه المنهج تقليدياً في مجال الاتصالات ويسمح لنا بفصل قضية الخفوت عن تلك التي تتعلق بالترميز والتعديل. من المهم أن ندرك أن هذا الافتراض لا يمكن أن يستخدم في نظام تستخدم فيه التغذية الخلفية من المستقبل إلى المرسل بغية تغيير قوة الإشارة عند حدوث خفوت في القناة.

لقد كان هناك دائماً قدر معين من الإرباك حول التحول من حزمة قاعدية إلى ممر حزمة، حيث تزداد طاقة الإشارة وطاقة الضجيج بمعامل 2. لاحظ أننا قد تحولنا من مرشح تمرير حزمة $\hat{H}(f, t)$ إلى مرشح حزمة قاعدية $\hat{G}(f, t)$ باستخدام الاصطلاحات نفسها الموظفة في الدخل والخرج. ليس من الصعب أن نظهر أنه إذا حافظنا على هذه الخاصية لمعاملة الإشارات ومرشحات الألفية بشكل متماثل، وحافظنا أيضاً على معادلة الطي في ممر الحزمة والحزمة القاعدية، فإن فقدان معامل 2 في الأسّ أمر لا مفرّ منه في الانتقال من ممر الحزمة إلى الحزمة القاعدية.

6.9 الكشف عن البيانات

تتجلى منهجية منطقية في كشف الألفية اللاسلكية من خلال قياس وصلات مرشح الألفية خلال تطورها مع الزمن، وأن تستخدم هذه القيم المقاسة في الكشف عن البيانات. إذا كان من الممكن قياس الاستجابة بدقة، تصبح مشكلة الكشف مشاهمة جداً لتلك الخاصة بالألفية السلكية، أي الكشف في WGN.

مع ذلك وحتى في ظل هذه الظروف المثالية، فهناك عدد من المشاكل. تتبدى إحدى هذه المشاكل في أنه لو كان للمرسل تغذية خلفية (راجعة) مثالية عن حالة القناة، فإن التحكم في الطاقة هو سؤال صعب، وبالتحديد ما هو مقدار الطاقة التي يجب أن ترسل كتابع لوضع القناة؟

عند التعامل مع الصوت فإن المحافظة على جودته، وعلى تأخير ثابت صغير القيمة، على حد سواء هو أمر مهم. هذا يؤدي إلى الرغبة في إرسال المعلومات بمعدل ثابت، والذي يؤدي بدوره إلى زيادة في استطاعة الإرسال عندما تكون نوعية القناة متدنية (فقيرة). يعد ذلك إسرافاً كبيراً جداً في الطاقة، كون الحس السليم يقول إنه إذا كانت الطاقة شحيحة والتأخير غير ذي قيمة، فإن الطاقة ومعدل الإرسال يجب أن يخفضا في حالة القناة الرديئة.

إن لزيادة الطاقة تأثيراً مختلطاً على التداخل بين المستخدمين في حالة التعامل مع قناة رديئة. تحافظ هذه الاستراتيجية على استطاعة استقبال ثابتة في المحطة القاعدية لجميع المستخدمين في الخلية نفسها الذين يتبعون تلك المحطة. يساعد ذلك في تقليل تأثير التداخل متعدد النفاذ داخل الخلية نفسها. يمكن أن يكون التدخل بين الخلايا المتجاورة سيئاً بشكل خاص، إلا أنه نظراً لأن الخفوت على القناة بين الهاتف الخليوي ومحطة قاعدته لا يرتبط ارتباطاً وثيقاً بالخفوت بين الهاتف الخليوي الموماً إليه ومحطة قاعدية أخرى.

يعد التأخير، عند التعامل مع البيانات، أمراً أقل أهمية، بحيث يمكن إرسال البيانات بمعدل عال عندما تكون القناة جيدة، وبمعدل منخفض (أو معدل صفري) عندما تكون القناة ضعيفة. ثم تقنية معلومات نظرية مباشرة تُسمى تعبئة المياه يمكن استخدامها للحصول على أعظم معدل إرسال إجمالي عند استطاعة إجمالية مُعطاة. يجب تعديل افتراض التقييس الذي وضعناه آنفاً لما يتعلق باستطاعة الدخل والخرج لجميع قضايا التحكم بالطاقة هذه.

يوفر هذا النقاش نظرة ثاقبة حول التحكم بالطاقة المستخدمة للصوت التي ينبغي أن تكون مختلفة جداً عنها في حالة البيانات. إذا تم استخدام النظام نفسه لتطبيقي الصوت والبيانات، فإن الآليات الأساسية للتحكم بالاستطاعة وبمعدل النقل ينبغي أن تكون مختلفة جداً في كلا التطبيقين.

تركز هذه الفقرة ببساطة على الكشف عن الإشارات في إطار افتراضات مختلفة عن القناة وعن حالة المعرفة في المستقبل، ولا يتم أخذ التحكم بالطاقة وبمعدل النقل بالحسبان.

1.6.9 الكشف الإثنائي في خفوت رايلي المسطح

ندرس مثلاً بسيطاً جداً عن الاتصال في حالة عدم وجود قياس للقناة. نفترض أن القناة يمكن تمثيلها بوصلة مرشح عقدي غير مستمر زمنياً $G_{0,m}$ ، والتي يمكن استخدام الاختصار G_m للتعبير عنه. نفترض أيضاً أن خفوت رايلي، أي كثافة احتمال مطال كل G_m هو:

$$f_{G_m}(|g|) = 2|g| \exp\{-|g|^2\} \quad ; \quad |g| \geq 0, \quad (49.9)$$

أو على نحو مكافئ، كثافة $\gamma = |G_m|^2 \geq 0$ هي:

$$f(\gamma) = \exp(-\gamma) \quad ; \quad \gamma \geq 0, \quad (50.9)$$

إن الطور متماثل في المجال $[0, 2\pi]$ ومستقل عن المطال، وعلى نحو مكافئ، الجزئين الحقيقي والتخيلي من G_m هما غوصيان iid، وتفاوت variance كل منهما $1/2$. تم تقييس خفوت رايلي بهذه الطريقة للحفاظ على المساواة بين طاقة الدخل $E[|U_m|^2]$ ، وطاقة إشارة خرج $E[|U_m|^2|G_m|^2]$. افترض أن G_m و U_m هي مستقلة، أي أن التغذية الخلفية لم تستخدم للتحكم باستطاعة الدخل كتابع للخفوت، إلا أن عدم الاستقلالية بين G_m الوصلات في الوقت الراهن m ، ليس ذي صلة.

يُسمى هذا النموذج بالخفوت المسطح للسبب التالي؛ يطابق نموذج زمن غير مستمر لوصلة واحدة حيث $v(mT) = g_{0,m}u(mT)$ ، نموذج حزمة قاعدية مستمر زمنياً بحيث $g(\tau, t) = g(0, t) \text{sinc}(\tau/T)$. كما يعطى تابع الحزمة القاعدية للنظام لهذه القناة بالمعادلة $\hat{g}(f, t) = g_0(t) \text{rect}(fT)$ إن الخفوت بالتالي هو ثابت (أي مسطح أو مستو) على نطاق ترددات الحزمة القاعدية التي تستخدم للاتصال. عندما يتطلب الأمر وجود أكثر من وصلة، فإن الخفوت يتغير عبر منطقة الحزمة القاعدية، وكى نعبّر عن ذلك بطريقة أخرى، فإن نموذج الخفوت المتساوي مناسب عندما يكون تردد التماسك أكبر من عرض مجال الحزمة القاعدية.

إذا درسنا استخدام إشارات ثنائية متعاكسة حيث $U_m = \pm a$ لكل m . نفترض أن $\{U_m; m \in \mathbb{Z}\}$ هو تسلسل iid مع استخدام احتمال متساو من إشارة الزائد و إشارة السالب. يفشل منهج التشوير هذا بشكل تام، حتى في حالة عدم وجود ضجيج، نظراً لأن طور الإشارة المستقبلية متوزع بانتظام بين الصفر و 2π ضمن أية فرضية، كما أن المطال المستقبل وعلى نحو مشابه مستقل عن الفرضية. من السهل أن نرى أن تعديل الطور هو متناقض أيضاً، حيث إنه في واقع الأمر يترتب أن تُستخدم بنى الإشارة بحيث يعبر كل رمز مختلف فيها عن مطال مختلف، أو وعلى نحو مغاير، أن تكون الإشارات المتعاقبة مستقلة عن بعضها بعضاً¹⁵⁷.

ندرس تالياً شكلاً من أشكال تعديل موضع النبضة الثنائي حيث نرسل من أجل كل زوج من العينات الزمنية أحد أزواج الإشارة المحتملين $(a, 0)$ أو $(0, a)$. (إن لما سبق الأداء نفسه لعدد من طرق التعديل المتعامدة الثنائية مثل الإقفال بالانزياح الأصغري (انظر التمرين 16.8)، إلا أنه أبسط للوصف في الزمن غير المستمر (المقطع). يكون الخرج عندئذ:

$$V_m = U_m G_m + Z_m, \quad m = 0, 1 \quad (51.9)$$

حيث، ضمن إحدى الفرضيات فإن زوج إشارة الدخل هو $U = (a, 0)$ ، بينما وتحت فرضية أخرى يكون الزوج الآخر لإشارة الدخل $U = (0, a)$. عينات الضجيج $\{Z_m; m \in \mathbb{Z}\}$ هي متحولات عشوائية غوصية عقدية دائرية التناظر iid، $Z_m \sim \mathcal{CN}(0, N_0W)$. نفترض في الوقت الراهن أن الكاشف يأخذ المخرجين V_0 و V_1 فقط.

إذا كان $U = (a, 0)$ فإن $V_0 = aG_0 + Z_0$ هو مجموع اثنين من المتغيرات العشوائية العقدية الغوصية المستقلة، تباين الأول هو $a^2/2$ لكل

¹⁵⁷ إذا كانت القناة تتغير ببطء على سبيل المثال، فيمكن استخدام تعديل الطور التفاضلي الذي ترسل فيه المعطيات عن طريق الفرق بين طورين متعاقبتين.

بعد، وتباين الثاني $N_0W/2$ لكل بعد. وهكذا، من أجل $U = (a, 0)$ ، فإن الأجزاء الحقيقية والتخيلية من V_0 مستقلة، ويساوي كل منها $N(0, a^2/2 + N_0W/2)$. وعلى نحو مشابه، من أجل $U = (a, 0)$ ، فإن الأجزاء الحقيقية والتخيلية من $V_1 = Z_1$ مستقلة، ويساوي كل منها $N(0, N_0W/2)$. ختاماً، ونظراً لأن متحولات الضجيج مستقلة عن بعضها بعضاً، فإن كل من V_0 و V_1 مستقلة أيضاً (من أجل $U = (a, 0)$). إن كثافة الاحتمال المشترك¹⁵⁸ ل (V_1, V_0) عند (v_0, v_1) ، مشروطة بفرضية $U = (a, 0)$ هي:

$$(52.9) \quad f_0(v_0, v_1) = \frac{1}{(2\pi)^2(a^2/2 + WN_0/2)(W/N_0/2)} \exp\left\{-\frac{|v_0|^2}{a^2 + WN_0} - \frac{|v_1|^2}{WN_0}\right\}$$

حيث يدل f_0 على الكثافة الشرطية من أجل الفرضية $U = (a, 0)$. لاحظ أن الكثافة في المعادلة (52.9) تعتمد فقط على المطال وليس على طور v_0 و v_1 . بمعاملة الفرضية البديلة بالطريقة نفسها، وجعل f_1 تدل على الكثافة المشروطة المفترضة $U = (a, 0)$ ، نجد:

$$(53.9) \quad f_1(v_0, v_1) = \frac{1}{(2\pi)^2(a^2/2 + WN_0/2)(W/N_0/2)} \exp\left\{-\frac{|v_0|^2}{WN_0} - \frac{|v_1|^2}{a^2 + WN_0}\right\}$$

نسبة اللوغاريتم المحتملة:

$$(54.9) \quad \text{LLT}(v_0, v_1) = \ln\left\{\frac{f_0(v_0, v_1)}{f_1(v_0, v_1)}\right\} = \frac{[|v_0|^2 - |v_1|^2]a^2}{(a^2 + WN_0)(WN_0)}$$

وبالتالي تتمثل قاعدة القرار المحتملة القصوى (ML) في ترجمة $\vec{U} = (a, 0)$ إذا كان $|v_0|^2 \geq |v_1|^2$ وإلا ترجمة $\vec{U} = (0, a)$ خلافاً لذلك. إن ذلك ليس مفاجئاً نظراً للتناظر في المشكلة، إلا أنه قد يكون مفاجئاً أن هذه القاعدة لا تقوم على أي نوع من التبعية المحتمل بين G_0 و G_1 .

ندرس فيما يلي خطأ الاحتمال ML. لتكن $X_m = |V_m|^2$ من أجل $m = 0, 1$. تعطى كثافات الاحتمال $X_0 \geq 0$ و $X_1 \geq 0$ مشترطين $U = (a, 0)$ ، بالعلاقة:

$$f_{X_0}(x_0) = \frac{1}{a^2 + WN_0} \exp\left\{-\frac{x_0}{a^2 + WN_0}\right\}; \quad f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{WN_0} \exp\left\{-\frac{x_1}{WN_0}\right\}$$

ومن ثم $\Pr(X_1 > x) = \exp\left(-\frac{x}{WN_0}\right)$ وبالتالي:

$$(55.9) \quad \begin{aligned} \Pr(X_1 > X_0) &= \int_0^\infty \frac{1}{a^2 + WN_0} \exp\left\{-\frac{x_0}{a^2 + WN_0}\right\} \exp\left\{-\frac{x_0}{WN_0}\right\} dx_0 \\ &= \frac{1}{2 + \frac{a^2}{WN_0}} \end{aligned}$$

نظراً لأن $X_1 > X_0$ هو شرط للخطأ عندما $U = (a, 0)$ ، وهذا هو $\Pr(e)$ ضمن الفرضية $U = (a, 0)$. احتمال الخطأ من خلال التناظر، هو نفسه ضمن الفرضية $U = (0, a)$ ، وبالتالي فإن هذا هو الاحتمال غير المشروط للخطأ.

متوسط استطاعة الإشارة $a^2/2$ لأن نصف المداخل لها قيمة مربعة a^2 والنصف الآخر قيمته صفر. هناك $W/2$ رمز ثنائي في الثانية الواحدة، لذلك فإن E_b استطاعة كل بت، هو a^2/W وبالتعويض في (55.9)، نجد:

$$(56.9) \quad \Pr(e) = \frac{1}{2 + E_b/N_0}$$

لا تبعث هذه النتيجة على التفاؤل إطلاقاً، حيث إنه للحصول على احتمال خطأ $\Pr(e) = 10^{-3}$ يتطلب $E_b/N_0 \approx 1000$ (30 dB). وهذا يعني أننا سوف نحتاج لكميات ضخمة من الطاقة الكهربائية للحصول على لاتصال أكثر وثوقية. مع ذلك وبعد بعض التفكير، فإن هذه النتيجة ليست مفاجئة جداً. نسبة استطاعة الإشارة E_b إلى البت ثابتة ومستقلة عن استجابة

¹⁵⁸ إن V_0 و V_1 هي متحولات عقدية عشوائية، لذلك يتم تعريف كثافة الاحتمال لكل منها على أنه احتمال في وحدة المساحة في الساحة الحقيقية والعقدية. إذا جرى التعبير عن V_0 و V_1 من خلال السعة والطور على سبيل المثال، فإن الكثافات تكون مختلفة. هي متحولات عقدية عشوائية، لذلك يتم تعريف كثافة الاحتمال لكل منها على أنه احتمال في وحدة المساحة في الساحة الحقيقية والعقدية. إذا جرى التعبير عن V_0 و V_1 من خلال السعة والطور على سبيل المثال، فإن الكثافات تكون مختلفة.

القناة G_m . تحدث الأخطاء عادة عندما تكون قيم العينات $|g_m|^2$ صغيرة، أي خلال الخفوت. وهكذا فإن الضرر هنا ناجم عن الجمع بين الخفوت واستطاعة إشارة ثابتة. هذه النتيجة وتلك التي ستتبع، تجعل من الواضح أنه من أجل تحقيق اتصال موثوق به، فمن الضروري إما أن يكون تنوع و/أو ترميز بين أجزاء الخفوت وعدمه في القناة، أو توظيف القياسات والتغذية الخلفية للتحكم بطاقة الإشارة في ظل وجود الخفوت.

2.6.9 الكشف غير المتماusk بمعرفة مطال القناة

نأخذ تعديل موضع النبضة الذي درسناه في الفقرة السابقة، إلا أننا نفترض الآن أن G_0 و G_1 لهما المطال نفسه، وأن قيمة عينة من هذا المطال، ولتكن g ، هي بارامتر ثابت ومعروف عند المستقبل. يتوزع طور ϕ_m الإشارة G_m ، $m = 0, 1$ بشكل منتظم ضمن المجال $[0, 2\pi)$ وقيمة هذا الطور غير معروفة عند المستقبل. يستخدم مصطلح الكشف غير المتماusk عندما يجري الكشف decode بدون الحاجة لاسترجاع recover طور الحامل وبالتالي ينطبق على الحالة قيد الدرس. سوف نرى أن الكثافة المشتركة لكل من ϕ_0 و ϕ_1 لا أهمية لها، كما نفترض توزيع ضجيج مائل لما سبق. تعطى إشارات الخرج (V_1, V_0) من الافتراضية $U = (a, 0)$ وفق ما يلي:

$$(57.9) \quad V_0 = ag \exp\{i\phi_0\} + Z_0; \quad V_1 = Z_1 \quad (\text{under } U = (a, 0))$$

وبشكل مشابه، ضمن الافتراضية $U = (0, a)$ ، نجد:

$$(58.9) \quad V_0 = Z_0; \quad V_1 = ag \exp\{i\phi_1\} + Z_1 \quad (\text{under } U = (0, a))$$

تستخدم (V_1, V_0) جنباً إلى جنب مع مطال ثابت للقناة g في اتخاذ القرار، إلا أننا سنتبين أننا لسنا بحاجة إلى قيمة g من أجل قاعدة قرار الاحتمال الأقصى (Maximum Likelihood). كما أننا لا نأخذ ϕ_0 و ϕ_1 بالحسبان الطورين ولا يمكن استخدامهما في اتخاذ القرار. عادة ما عن يعبر كثافة الاحتمال متحول عشوائي عقدي كثافة مشتركة للأجزاء الحقيقية والتخيلية، إلا أن الشكل الأكثر ملاءمة في هذا السياق هو استخدام الكثافة المشتركة للمطال والطور. نظراً لأن طور ϕ_0 التابع $ag \exp\{i\phi_0\}$ موزع بانتظام، وأن Z_0 مستقل وذو طور موزع بانتظام، يترتب على ذلك أن V_0 لديه طور منتظم؛ أي أن $\angle V_0 \in \mathcal{L}$ منتظم شريطة أن يكون $U = (a, 0)$. المطال $|V_0|$ الذي يحقق الشرط $U = (a, 0)$ ، هو متحول عشوائي ريشياني Rician مستقل عن ϕ_0 ، وبالتالي مستقل أيضاً عن $\angle V_0$. إذاً، وبشرط $U = (a, 0)$ ، فإن V_0 ل طور ومطال مستقلان، وطور موزع بانتظام.

وبالمثل، فإن $V_0 = Z_0$ مشروطاً بالقيمة $U = (a, 0)$ له طور ومطال مستقلان، وطور موزع بانتظام. ما يعنيه هذا هو أن كلاً من الفرضيتين $|V_0|$ مستقلة إحصائياً عن الطور $\angle V_0$ ؛ ويمكن أن نرى أنها هي أيضاً مستقلة إحصائياً من ϕ_0 .

باستخدام الحجة نفسها على V_1 ، نرى أن كلا الفرضيتين $|V_1|$ مستقلة إحصائياً عن الأطوار $\angle V_1$ و ϕ_1 . ينبغي أن يكون واضحاً أن $|V_0|$ و $|V_1|$ ، وأن الفرضيات يجب أن تكون مستقلة عن الأطوار $(\angle V_0, \angle V_1, \phi_0, \phi_1)$. وهذا يعني أن قيم العينات $|v_0|^2$ و $|v_1|^2$ هي إحصائياً كافية للاختيار فيما بين الفرضيات $U = (a, 0)$ و $U = (0, a)$.

بمعرفة إحصاءات كافية $|v_0|^2$ و $|v_1|^2$ يجب أن نقرر قاعدة الكشف وفق قرار الاحتمال الأقصى (ML)، مفترضين مرة أخرى فرضيات الاحتمال المتساوي equiprobable. نظراً لأن v_0 تحتوي على الإشارة ضمن فرضية $U = (a, 0)$ ، و v_1 تحتوي على الإشارة ضمن فرضية $U = (0, a)$ ، وبما أن الإشكالية هي في تناظر $U = (a, 0)$ و $U = (0, a)$ ، يبدو واضحاً أن قاعدة كشف ML تقع في اختيار $U = (a, 0)$ إذا كان $|v_0|^2 > |v_1|^2$ ، أو اختيار $U = (0, a)$ خلاف ذلك. ولسوء الحظ وحتى يمكن إظهار ذلك من الناحية التحليلية، يبدو ضرورياً حساب نسبة الاحتمال. يعطي الملحق نسبة الاحتمال هذه ويحسب أيضاً احتمال الخطأ. جرى حساب احتمال الخطأ q وفق المعادلة:

$$(59.9) \quad \Pr(e) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{a^2 g^2}{2WN_0}\right)$$

إن قيمة متوسط استطاعة إشارة الحزمة القاعدية المستقبلية هي $a^2 g^2 / 2$ وذلك بسبب استخدام نصف المداخل فقط. كما يتوافر لدينا $W/2$ بت/ثا، وبذا يكون $E_b = a^2 g^2 / W$ ، مما يمكننا من التعبير عن احتمال الخطأ كما يلي:

$$(60.9) \quad \Pr(e) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{2N_0}\right) \quad (\text{non-coherent})$$

تعد مقارنة أداء هذا الكاشف غير المتناسك مع الكاشف المتناسك (أي كاشف يستخدم طور الحامل مماثل لما سبق دراسته في الفصل الثامن) وذلك لإشارات متعامدة ذات طاقة متساوية، عملية مثيرة للاهتمام. إن احتمال الخطأ في هذه الحالة كما رأينا من قبل، هو:

$$(61.9) \quad \Pr(e) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \approx \sqrt{\frac{N_0}{2\pi E_b}} \exp\left(-\frac{E_b}{2N_0}\right) \quad (\text{coherent})$$

لدى كل من التعبيرين الانحدار decay الأسّي نفسه الذي يتناسب مع E_b/N_0 ويختلف فقط في المعامل. لا يزال احتمال الخطأ مع الكشف غير المتناسك أعلى بكثير منه مع الكشف المتناسك¹⁵⁹، إلا أن الفرق لا يشبه على الإطلاق ما ورد في المعادلة (56.9). إذا كان E_b/N_0 كبيراً، فإن الطاقة الإضافية اللازمة لكل بت المطلوبة في الكشف غير المتناسك لجعل احتمال الخطأ مساوياً لذلك في الكشف المتناسك، صغيرة جداً. وبكلمات أخرى، إن زيادة طفيفة في dB تقابل انخفاض واسع في احتمال الخطأ. وندفع بطبيعة الحال في الكشف غير المتناسك غرامة قدرها 3 dB لعدم القدرة على استخدام التأشير المتعاكس antipodal signaling.

استخدمت موديمات خطوط أجهزة الهاتف المبكرة (ذات المجال 1200 بت/ثا) الكشف غير المتناسك، ولكن أجهزة المودم السلكية الحالية عالية السرعة تتعقب بشكل عام طور الحامل وتستخدم الكشف المتناسك. تخضع الأنظمة اللاسلكية لتغيرات طورية سريعة بسبب وسط النقل، لذلك فإن تقنيات الكشف غير المتناسك لا تزال شائعة فيها.

قد تكون مقارنة نتيجة الكشف غير المتناسك مع نتيجة خفوت رايلي أكثر إثارة للاهتمام. نلاحظ أن كلاهما يستخدم قاعدة الكشف نفسها، وبالتالي معرفة مدى قوة القناة عند المستقبل في حالة رايلي لن يقلل من احتمال الخطأ. كما هو مبين في التمرين (11.9)، إذا اعتبرنا g قيمة عينة متغير عشوائي معروف عند المستقبل ومتوسط نتيجة (59.9)، فإن احتمال الخطأ هو نفسه في المعادلة (56.9). نستنتج من هذه المقارنة أن المشكلة الحقيقية في الاتصالات الثنائية مع خفوت رايلي المستوي هي أنه عندما تكون الإشارة ذات خفوت سيء، فهناك أمل ضئيل لاتصال ناجح باستخدام كمية ثابتة من طاقة الإشارة. كان ينظر إلى أن معرفة سعة الخفوت عند المستقبل لا تقدم أي مساعدة. كما نلاحظ أيضاً في الجزء الثاني من التمرين (11.9)، يؤدي توظيف التحكم بالطاقة عند المرسل لمتوسط استطاعة إرسال لانهائي وذلك بهدف الحفاظ على احتمال خطأ ثابت في الاتصال الثنائي. الأمل الوحيد، إذاً هو إما في استخدام معدل اتصال متغير أو استخدام الترميز و/أو التنوع فيما بينهما. إن معرفة مدى الخفوت في الحالة الأخيرة، سيكون مفيداً لدى المستقبل في معرفة كيفية توزيع مختلف المخارج في اتخاذ القرار المناسب.

ندرس أخيراً استخدام V_0 و V_1 فقط في الكشف الثنائي لخفوت رايلي والكشف غير المتناسك. إذا لم يكن هناك مداخل أخرى عدا عن المدخل الثنائي في الأزمنة 0 و 1، فيمكن النظر إلى كافة المخارج الأخرى على أنها مستقلة عن الفرضيات وعن V_0 و V_1 . أما إذا كان هناك مداخل أخرى، فإن المخارج الناتجة يمكن أن تستخدم لقياس كل من مطال وطور وصلات القناة.

تنطبق نتائج الفقرتين السابقتين على أي زوج إشارات حزمة قاعدية متساوي الطاقة، متعامدة كأموح عقدية (أي أن الأجزاء الحقيقية والتخيلية لإحدى الموجتين تتعامد مع الأجزاء الحقيقية والتخيلية للموجة الأخرى). يجب علينا أن نفترض من أجل هذه النتيجة الأكثر عمومية، على أية حال، أن G_m هو ثابت على مدى m تستخدمه الإشارات.

¹⁵⁹ وكمثال على ذلك، يتطلب تحقيق العلاقة $\Pr(e) = 10^{-6}$ مع الكشف غير المتناسك أن يكون E_b/N_0 مساوياً 26.24، الذي من شأنه أن يسفر عن العلاقة $\Pr(e) = 1.6 \times 10^{-6}$ مع الكشف المتناسك. ومع ذلك، فإنه لا يتطلب سوى حوالي نصف ديسيبل من الطاقة الإضافية لتحقيق ذلك الانخفاض في احتمال الخطأ مع الكشف غير المتناسك⁷.

3.6.9 الكشف غير المتناسك في خفوت ريشيان المسطح (المستوي)

يحدث خفوت ريشيان Rician المسطح عندما يمكن أن تمثل القناة بوصلة واحدة ويكون أحد المسارات أقوى بكثير من المسارات الأخرى. إن هذا النموذج مناسب عند وجود خط نظر بين المرسل والمستقبل، بالترافق مع مسارات انعكاس مختلفة. يوفر هذا النموذج على نحو أكثر أهمية، حلاً وسطاً بين عدد كبير من المسارات الضعيفة المنمذجة وفق خفوت رايلي، ومسار واحد مع طور عشوائي، على غرار ما تم نمذجته في الفقرة السابقة. يمكن حساب احتمال الخطأ في حالة ريشيان، والذي يحتوي على حالات خاصة هي كل من حالة رايلي وحالة المطال المعروف. عندما ندرس التنوع، يقدم نموذج ريشيان نظرة ثاقبة إضافية إلى فوائد التنوع.

كما هو الحال مع خفوت رايلي، ندرس تعديل موضع النبضة الثنائي حيث $U = \mathbf{u}^0 = (a, 0)$ هي إحدى الفرضيات و $U = \mathbf{u}^1 = (0, 0)$ هي الفرضية الأخرى، وبذلك تكون المخارج المقابلة:

$$V_0 = U_0 G_0 + Z_0 \quad \text{and} \quad V_1 = U_1 G_1 + Z_1$$

باستخدام الكشف غير المتناسك فإن كشف ML هو نفسه لكل من رايلي وريشيان، أو الألفية الحتمية deterministic، أي بمعرفة قيم العينات v_0 و v_1 في المستقبل فإن،

$$(62.9) \quad |v_0|^2 \underset{\bar{v}=\mathbf{u}^1}{\overset{\bar{v}=\mathbf{u}^0}{>}} |v_1|^2$$

نشير للمسار القوي بالرمز \bar{g} وللتباين التجميعي للمسارات الأضعف σ_g^2 . نظراً لأن مطال كل من v_0 و v_1 يستخدم فقط في الكشف، فإن طور ربح الوصلات G_0 و G_1 لن يؤثر على القرار، وبالتالي يمكن نمذجة كسب الوصلات وفق $G_0 \sim G_1 \sim \mathcal{CN}(\bar{g}, \sigma_g^2)$. يفسر هذا بشكل كامل حالة الطور المعرف المبينة في الملحق.

إن احتمال الخطأ بين الفرضيتين هو نفسه على حد سواء وذلك بالنظر إلى التماثل فيما بينهما. وبالتالي سيتم احتساب احتمال الخطأ مشروطاً بالقيمة $U = \mathbf{u}^0$. كما ويفترض بجميع الاحتمالات اللاحقة وكثافة الاحتمال أن تكون مشروطة بالقيمة $U = \mathbf{u}^0$. إن الأجزاء الحقيقية والتخيلية من V_0 و V_1 ضمن هذا الشرط مستقلة ويمكن أن يعبر عنها وفق:

$$\begin{aligned} V_{0,\text{re}} &\sim \mathcal{N}(a\bar{g}, \sigma_0^2) & V_{0,\text{im}} &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2) \\ V_{1,\text{re}} &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2) & V_{1,\text{im}} &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2) \end{aligned}$$

حيث:

$$(63.9) \quad \sigma_0^2 = \frac{WN_0 + a^2\sigma_g^2}{2} \quad \sigma_1^2 = \frac{WN_0}{2}$$

لاحظ أن $|V_1|^2$ هو متحول عشوائي متوزع أسياً من أجل أي $x \geq 0$ ، أي $\Pr(|V_1|^2 \geq x) = \exp(-x/2\sigma_1^2)$. وبالتالي فإن احتمال الخطأ مشروطاً بالقيمة $|V_0|^2 = x$ ، هو $\exp(-x/2\sigma_1^2)$. يمكن بعد ذلك إيجاد احتمال الخطأ غير المشروط (مازال يخضع للشرط $U = \mathbf{u}^0$)، وذلك بحساب المتوسط على V_0 .

$$\Pr(e) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_0^2} \exp\left[-\frac{(v_{0,\text{re}} - a\bar{g})^2}{2\sigma_0^2} - \frac{v_{0,\text{re}}^2}{2\sigma_1^2}\right] \exp\left[-\frac{v_{0,\text{re}}^2 + v_{0,\text{im}}^2}{2\sigma_1^2}\right] dv_{0,\text{re}} dv_{0,\text{im}}$$

بتكامل ما سبق ضمن $v_{0,\text{im}}$ ، نجد:

$$\Pr(e) = \sqrt{\frac{2\pi\sigma_0^2\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_0^2} \exp\left[-\frac{(v_{0,\text{re}} - a\bar{g})^2}{2\sigma_0^2} - \frac{v_{0,\text{re}}^2}{2\sigma_1^2}\right] dv_{0,\text{re}}$$

يمكن مكاملة ذلك بإكمال التربيع في الأس، بحيث ينجم:

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2} \exp\left[-\frac{a^2\bar{g}^2}{2(\sigma_0^2 + \sigma_1^2)}\right]$$

بتعويض قيم σ_0 و σ_1 من المعادلة (63.9)، نجد:

$$\Pr(e) = \frac{1}{2 + \frac{a^2 \sigma_g^2}{WN_0}} \exp - \frac{\bar{g}_2 a^2}{2WN_0 + a^2 \sigma_g^2}$$

ختاماً، يترتب تقييس كسب القناة بحيث $\bar{g}^2 + \sigma_g^2 = 1$ ، وبذلك تصبح قيمة E_b مساوية a^2/W ، أي:

$$(64.9) \quad \Pr(e) = \frac{1}{2 + \frac{E_b \sigma_g^2}{N_0}} \exp \left[- \frac{\bar{g}^2 E_b}{2N_0 + E_b \sigma_g^2} \right]$$

إن $\bar{g} = 0$ و $\sigma_g^2 = 1$ في حالة خفوت رايلي، ويتبسط العلاقة $\Pr(e)$ إلى $\frac{1}{2 + E_b/N_0}$ والتي تتفق مع النتيجة التي حصلنا عليها سابقاً. في حالة المطال الثابت فإن $\bar{g} = 1$ و $\sigma_g^2 = 0$ ، مما يجعل قيمة $\Pr(e)$ مساوية إلى $\frac{1}{2} \exp(-E_b/2N_0)$ ، وهذا ما يتفق أيضاً مع النتيجة السابقة.

من المهم أن ندرك أن هذه النتيجة لا تعتمد على المستقبل مع العلم أن يوجد مسار قوي، لأن قاعدة الكشف هي نفسها للكشف غير المتماثل سواء كان الخفوت هو رايلي أو ريشيان أو حتمي. تشير النتيجة إلى أنه يمكن لاحتمال الخطأ في خفوت ريشيان أن يكون أصغر بكثير من رايلي. إذا كان $\sigma_g^2 > 0$ ، يقترب الأس من قيمة ثابتة مع زيادة E_b ، كما لا تزال $\Pr(e)$ تذهب إلى الصفر مع $(E_b/N_0)^{-1}$. يعبر ذلك عن أن هذا التقارب البطيء لخطأ احتمال منعدم مع تزايد E_b لا يمكن تجنبه من خلال مسار ذي انعكاس قوي، ولكن فقط عن طريق وجود عدد عشوائي كبير من المسارات العشوائية الضعيفة، وسوف نناقش ذلك على نحو أعمق عندما نتعرض للتنوع diversity.

7.9 قياسات القناة

تقدم هذه الفقرة موضوع قياس الوصلات في نموذج الحزمة القاعدية غير المستمر زمنياً لقناة لاسلكية، حيث تجري هذه القياسات في المستقبل اعتماداً على الموجة الواردة. يمكن لهذه القياسات أن تستخدم لتحسين الكشف عن المعطيات المستقبلية، وللمساعدة في معدل التحكم بالطاقة عند المرسل وذلك عن طريق إرسال تلك القياسات إلى المرسل.

تقضي إحدى المقاربات التي توظف في قياس القناة إلى تخصيص جزء معين من كل رزمة packet مرسل لهذا الغرض. ترسل خلال تلك الفترة، سلسلة تحقق معروفة *probing sequence* يستخدمها المستقبل إما لتقدير القيم الحالية للوصلات في نموذج الحزمة القاعدية غير المستمر زمنياً للقناة أو لقياس المسارات الفعلية في نموذج الحزمة القاعدية المستمر زمنياً. يمكن لهذه القيم المقدرة أن تساعد في الكشف عما تبقى من الرزمة مفترضين أن القيم الفعلية لهذه الوصلات أو المسارات لا تتغير بسرعة.

يطلق على تقنية أخرى لقياس القناة اسم *Rake Receiver* وهو عبارة عن مستقبل رايدوي صمم للتغلب على تأثيرات خفوت تعدد المسارات. يجري الكشف عن المعطيات وتقدير القناة في هذه التقنية في آن واحد، حيث يتم الكشف عن رمز من البيانات الواردة باستخدام التقدير السابق للقناة ومن ثم تُحدث تقديرات القناة للاستخدام مع الرمز التالي للبيانات.

قبل دراسة تقنيات القياس هذه، سيكون من المفيد أن نفهم كيف يمكن لهذه القياسات أن تساعد في عملية الكشف. عندما بحثنا في الكشف الثنائي لأقنية رايلي ذات الخفوت المسطح، رأينا أن احتمال الخطأ مرتفع جداً في فترات الخفوت العميق، وأن هذه الفترات متكررة بما يكفي لجعل احتمال الخطأ الكلي كبير حتى في حالة كون E_b/N_0 كبير أيضاً. وجدنا في دراسة الكشف غير المتماثل أن كشف ML لا يستخدم معرفته بقوة القناة، وبالتالي فإن المعلومات عن قوة القناة عند المستقبل في الكشف الثنائي لخفوت رايلي المسطح، ليست ذات فائدة. أخيراً، رأينا أنه عندما تكون القناة جيدة (أي أن E_b/N_0 اللحظي ذو قيمة عالية)، فإن معرفة الطور عند المستقبل ذو فائدة محدودة.

يتبين مع ذلك، أن الكشف الثنائي لقناة ذات خفوت مسطح هو إلى حد كبير حالة خاصة، وأن قياس القناة يمكن أن يكون مفيداً جداً عند المستقبل لكل من الخفوت غير المسطح وللمجموعات الإشارات الكبيرة مثل الأنظمة المشفرة على حد سواء. إن معرفة القناة عندما تكون مراقبة المستقبل من العديد من درجات الحرية، يساعد الكاشف في وزن درجات الحرية هذه بشكل مناسب. تعدّ تغذية معلومات قياسات القناة بشكل راجع إلى المرسل مفيدة بشكل عام، حتى في حالة الإرسال الثنائي للخفوت المسطح. يمكن

للمرسل أن يبعت المزيد من الطاقة عندما تكون القناة ضعيفة، مما يعني بالتالي المحافظة على احتمال خطأ ثابت¹⁶⁰، أو إرسال معدلات نقل أعلى عندما تكون القناة جيدة. إن جولة تأخير نموذجية من المرسل إلى المستقبل في الأنظمة الخلوية تقع عادة في مجال بضعة أجزاء ميكروية من الثانية أو أقل، في حين أن أزمدة تماسك نموذجية هي في حدود 100 ميللي ثانية أو أكثر؛ وبالتالي يمكن أن يمارس التحكم بالتغذية الخلفية ضمن الفترة الزمنية التي تكون القناة فيها ثابتة نسبياً.

1.7.9 استخدام إشارات التحقق (السبر) لتقدير القناة

ندرس نموذج قناة حزمة قاعدية متقطعة زمنياً حيث يمكن أن تمثل القناة عند أي زمن خرج محدد m بعدد معين من الوصلات المتغيرة عشوائياً $G_{0,m}, \dots, G_{k_0-1,m}$. سنقوم بدراسة لتقدير قيم هذه الوصلات taps من خلال إرسال إشارة سبر تتكون من سلسلة معروفة من إشارات الدخل. يمكن تقدير الوصلات بالنظر إلى أن الإشارات المرسله معروفة من قبل المستقبل. يجب أن يتكرر هذا الإجراء مرة واحدة على الأقل في كل فترة من فترات تماسك الزمن.

يتمثل أحد الخيارات لمثل هذه الإشارة المعروفة (ولكن ليس بالخيار الجيد) باستخدام مدخل ذي سعة قصوى لتكن a ، في فترة محددة وتلك 0 متبوعة بمدخل منعدمة القيمة وذلك من أجل الفترات k_0-1 التالية. تعطى السلسلة المستقبلية خلال الفترة k_0 المقابلة في غياب الضجيج $(ag_{0,0}, ag_{1,1}, \dots, ag_{k_0-1,k_0-1})$. كما يعطى الخرج $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_{k_0-1})^T$ بوجود قيم عينات z_0, z_1 عقدية غير مستمرة زمنياً من White Generated Noise (WGN) خلال الفترة الزمنية 0 حتى k_0-1 ، بالعلاقة:

$$\mathbf{v} = (ag_{0,0} + z_0, ag_{1,1} + z_1, \dots, ag_{k_0-1,k_0-1} + z_{k_0-1})^T$$

يمكن عملياً تقدير وصلة القناة k th، حيث $0 \leq k \leq k_0 - 1$ بالعلاقة:

(65.9)

$$\tilde{g}_{k,k} = \frac{v_k}{a}$$

إن مبادئ التخمين مماثلة تماماً لتلك الخاصة بالكشف، إلا أنها ليست أساسية في هذا السياق. الكشف تستخدم المراقبة (قيمة عينة v من متحول عشوائي أو شعاع V) لانتقاء خيار من قيم عينات متاحة من متحول عشوائي متقطع U (وفق الفرضية). تستخدم في التخمين قيمة عينة v من V لانتخاب خيار \tilde{g} من قيم عينات محتملة لمتحول عشوائي G . في كلتا الحالتين، فإننا نفترض أن احتمالات $f_{V|U}(v|u)$ أو $f_{V|G}(v|g)$ هي معروفة وأن الاحتمالات الأفضلية $p_U(u)$ أو $f_G(g)$ هي أيضاً معروفة ومحددة.

يهتم التخمين مثل الكشف بتحديد وتنفيذ قواعد معقولة لتقدير g من v . هناك قاعدة مستخدمة على نطاق واسع هي قاعدة الإمكانية القصوى (ML). تختار هذه القاعدة \tilde{g} لتكون قيمة g هي التي تجعل $f_{V|G}(v|g)$ ذا قيمة عظمى. قاعدة الإمكانية القصوى للتخمين مماثلة لتلك الخاصة بالكشف، حيث نلاحظ أن التخمين في المعادلة (65.9) هو تخمين قاعدة الإمكانية القصوى (ML).

كما تتوفر قاعدة واسعة الانتشار للتخمين هي متوسط الحد الأدنى لمربع الخطأ نفسه (MMSE) *minimum mean square error*. تختار الأخيرة \tilde{g} كي تكون متوسط كثافة الاحتمال الشرطي *posteriori probability density* $f_{G|V}(g|v)$ من أجل متحول المراقبة v . في كثير من الحالات، عندما يكون كلا V و G غوصية في آن واحد *jointly*، فإن هذا المتوسط هو قيمة g نفسها التي تجعل من $f_{G|V}(g|v)$ قيمة عظمى؛ وبذلك فإن قاعدة MMSE هي مشاهمة لقاعدة الكشف MAP.

نختار عادة قاعدة ML لمسائل الكشف عندما تكون كافة احتمالات *a priori* هي نفسها، ويكون كلا ML و MAP متطابقين في هذه الحالة. أما عندما تكون كثافة الاحتمال *priori* غير محددة فيوظف عندئذ ML لمسائل التخمين. في كثير من الأحيان يتم اختيار ML عندما بداهة كثافة الاحتمال غير معروف. عندما تكون كثافة الاحتمال *a priori density* معروفة، فإن متوسط الحد الأدنى لمربع الخطأ في قاعدة MMSE أصغر حكماً منه في قاعدة ML.

لا يوجد عادة للحالة قيد الدراسة، أساس قوي جداً لافتراض أي نموذج محدد من أجل نمذجة وصلات القناة (على الرغم من توظيف

¹⁶⁰ تبين المسألة (11.9) أن هذا يؤدي إلى أن الطاقة المتوقعة لانهائية على قناة رايلي ذات خفوت مستوي نقي، ولكن من الناحية العملية فإن الخفوتات العميقة جداً تتطلب طاقة لحظية مفرطة تؤدي ببساطة إلى انقطاع التغذية الكهربائية.

نماذج رايلي وريشيان بغرض الحصول على شيء محدد للمناقشة؛ وهكذا فإن تخمين ML يحمل معنى كبيراً وعادة ما يستخدم لهذا الغرض. ونظراً لأن القناة تتغير ببطء مع مرور الزمن، فمن المنطقي استخدام القياس في المعادلة (65.9) في أي وقت خلال فترة تماسك معينة. كما أنه من الممكن أيضاً تكرار الإجراء أعلاه مرات عدة خلال فترة تماسك واحدة. يمكن بعد ذلك الحصول على متوسط القياسات المتعددة في كل وصلة مرشح للقناة (المقابلة لتخمين ML المبني على نقاط مراقبة متعددة).

تتمثل عادة إشكالية مقارنة النبضة الواحدة أعلاه في وجود قيد الذروة ضمن سلسلة إشارة الدخل؛ وقد وضع هذا الافتراض لتجنب التداخل المفرط مع القنوات الأخرى من جهة، ولتبسيط التنفيذ من جهة أخرى. إذا كان مربع قيد الذروة هذا هو أكبر قليلاً من قيد الاستطاعة لكل رمز، فإن سلسلة دخل طويلة مع استطاعة متساوية في كل رمز سوف تسمح في أثناء عملية القياس باستخدام استطاعة إشارة أكبر بكثير من تلك المستخدمة في نَحج النبضة الواحدة. إن هذا النهج كما سنرى لاحقاً سيسفر عن تقديرات أكثر دقة لاستجابة القناة من نَحج النبضة الواحدة.

يُعَدُّ استخدام سلسلة دخل ضجيج شبه عشوائية *pseudo-noise* (PN) متعاكسة ومحددة مسبقاً، $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$ وسيلة جيدة لإجراء قياسات قناة ذات طاقة موزعة بالتساوي¹⁶¹. نختار المركبات u_1, \dots, u_n من \mathbf{u} لتكون قيمتها $\pm a$ ، والخاصية المطلوبة هي أن تابع التباين covariance للمتحول u يقارب الاستجابة. أي أننا نختار السلسلة لتتحقق:

$$(66.9) \quad \sum_{m=1}^n u_m u_{m+k} \approx \begin{cases} a^2 n & ; k = 0 \\ 0 & ; k \neq 0 \end{cases} = a^2 n \delta_k$$

حيث تأخذ u_m قيمة الصفر خارج المجال $[1, n]$. يمكن النظر إلى الخطأ عند استخدام سلاسل طويلة PN كضجيج إضافي لكنه مهمل القيمة. نناقش تنفيذ مثل هذه الأشعة (في شكل إثنائي بدلاً من شكل التعاكس في القطبية) في نهاية هذه الفقرة الفرعية. يُمَثَل استخدام \mathbf{u} سلسلة PN متعاكسة، تغيير واضح في منهج الدراسة وذلك من خلال اختيارها لتكون عقديّة ذات أجزاء حقيقية وأخرى تخيلية متعاكسة، مما يعني أن تكون سلسلة 4-QAM. إن اختيار الأجزاء الحقيقية والتخيلية لتكون سلسلة PN متعاكسة وأن تكون أيضاً وبشكل تقريبي غير مترابطة، يؤدي إلى أن تصبح العلاقة (66.9):

$$(67.9) \quad \sum_{m=1}^n u_m u_{m+k}^* \approx 2a^2 n \delta_k$$

ينشر QAM استطاعة قياس الدخل على مدى ضعف عدد درجات الحرية لوحدة الزمن n ، وهذا مجد ذاته مفيد. يشار إلى كل من شكلي 4-QAM وتعاكس القطبية، وإلى النسخة الثنائية من شكل تعاكس القطبية بسلاسل PN. نفترض فيما سيتبع من دراستنا هذه استخدام نموذج QAM، إلا أن الفرق الوحيد بين (66.9) و (67.9) هو المعامل 2 في التباين؛ كما نفترض ولأغراض التبسيط المساواة في المعادلة (66.9) عوضاً عن الشكل التقريبي.

ينص الشرط في المعادلة (67.9) (باستخدام المساواة) على أن \mathbf{u} متعامد مع كل من انزياحاته الزمنية. كما يمكن التعبير عن هذا الشرط عن طريق تعريف سلسلة مرشح توافقي من أجل \mathbf{u} على أنها السلسلة \mathbf{u}^\dagger حيث $u_j^\dagger = u_{-j}^*$. وهذا يعني أن \mathbf{u}^\dagger هي التابع العقدي المرافق للمتحول \mathbf{u} ذي الزمن المعاكس؛ كما أن طي \mathbf{u} مع \mathbf{u}^\dagger هو $\mathbf{u} * \mathbf{u}^\dagger = \sum_m u_m u_{k-m}^\dagger$. يعادل عندئذ شرط التباين في المعادلة (67.9) (مع المساواة) شرط الطي.

$$(68.9) \quad \mathbf{u} * \mathbf{u}^\dagger = \sum_{m=1}^n u_m u_{k-m}^\dagger = \sum_{m=1}^n u_m u_{m-k}^* = 2a^2 n \delta_k$$

لتكن قيمة الوصلة k th عند الزمن m هي قيمة المتحول العشوائي هي $G_{k,m}$. خرج القناة عند الزمن m من أجل سلسلة الدخل \mathbf{u} (قبل إضافة الضجيج) هو الطي:

¹⁶¹ قد تبدو هذه المقارنة تفصيلاً غير مهم في هذا السياق، إلا أنه يصبح أكثر أهمية بالنسبة لمستقبل Rack الذي سنناقشه لاحقاً.

$$(69.9) \quad V'_m = \sum_{k=0}^{n-1} G_{k,m} u_{m-k}$$

نظراً لكون u ذا قيمة صفرية خارج النطاق $[1, n]$ ، فتكون سلسلة الخرج الخالي من الضجيج V' هي أيضاً ذات قيمة منعدمة خارج النطاق $[1, n+k_0-1]$. بافتراض أن القناة هي عشوائية لكنها لا تتغير خلال هذا النطاق، فيمكن التعبير عن الوصلة k th على أنها قيمة المتحول العشوائي G_k . ينجم عن ترابط خرج القناة مع u_1^*, \dots, u_n^* التباين في كل فترة j والذي يعطى بالعلاقة:

$$(70.9) \quad G'_j = \sum_{m=-j+1}^{-j+n} V'_m u_{m+j}^* = \sum_{m=-j+1}^{-j+n} \sum_{k=0}^{n-1} G_k u_{m-k} u_{m+j}^*$$

$$(71.9) \quad = \sum_{k=0}^{n-1} G_k (2a^2n) \delta_{j+k} = 2a^2n G_{-1}$$

وهكذا فإن نتيجة الترابط، في حالة عدم وجود ضجيج، هي مجموعة من وصلات مرشح القناة، مقاسة ومعدومة زمنياً. يسهل النظر إلى هذه النتيجة إذا قمنا بطي V' مع u^\dagger ، أي:

$$V' * u^\dagger = (u * G) * u^\dagger = (u * u^\dagger) * G = 2a^2nG$$

يستخدم ما سبق حقيقة أن طي السلاسل (تماماً مثل طي التوابع) هو تشاركي وتبادلي على حدّ سواء. لاحظ أنه نتيجة الطي مع مرشح موافق يقابل نتيجة انعكاس الزمن في علاقة التباين، وهكذا هو ببساطة نسخة طبق الأصل لكنها مقيسة (scaled) لوصلات القناة. نلاحظ أخيراً أن المرشح التوافقي u^\dagger قيمته صفر خارج النطاق $[-n, -1]$. وبالتالي إذا تصورنا تنفيذ قياس القناة باستخدام مرشح متقطع زمنياً، فإننا نفترض (نظرياً) أن المرجع الزمني للمستقبل يتخلف عن المرجع الزمني للمرسل بـ n دورة على الأقل. يصبح الخرج عند إضافة الضجيج $V = V' + Z$ ، أي أن الخرج عند الدورة n يساوي $V_m = V'_m + Z_m$. وهكذا، فإن طي خرج قناة ذات ضجيج مع المرشح التوافقي u^\dagger يعطى بالعلاقة:

$$(72.9) \quad V * u^\dagger = V' * u^\dagger + Z * u^\dagger = 2a^2nG + Z * u^\dagger$$

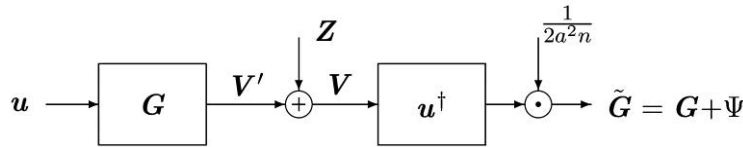
بعد القسمة على $2a^2n$ ، فإن المركبة k th لهذه المعادلة الشعاعية هي:

$$(73.9) \quad \frac{1}{2a^2n} \sum_m V_m u_{k-m}^\dagger = G_k + \Psi_k$$

حيث عُرفت Ψ_k على أنها المتحول العتدي العشوائي:

$$(74.9) \quad \Psi_k = \frac{1}{2a^2n} \sum_m Z_m u_{k-m}^\dagger$$

يوضّح الشكل (9.9) هذا التخمين.



الشكل 9.9: توضيح قياس القناة باستخدام المرشح التوافقي في دخل PN. افترضنا أن G لا تساوي الصفر فقط خلال الفترة $[0, k_0-1]$ لذلك فإن الخرج يمكن ملاحظته فقط خلال هذه الفترة. لاحظ أن المركبة G في الخرج هي استجابة المرشح التوافقي للدخل u ، بينما Ψ هي الاستجابة للدخل Z .

افترض أن ضجيج القناة هو ضجيج أبيض غوسي وبالتالي متغيرات الضجيج المتقطعة زمنياً $\{Z_m\}$ تكون متماثلة دائرياً $\mathcal{NC}(0, WN_0)$

ومستقلة وموزعة بشكل متماثل (iid). حيث $W/2$ هو عرض المجال الأساسي¹⁶². حيث إن u متعامدة مع كل انزياحاتها الزمنية، فإن شعاع المرشح التوافقي u^\dagger يجب أن يكون له نفس الخاصية، ومن ثم يترتب على ذلك أن:

$$(75.9) \quad E[\Psi_k \Psi_i^*] = \frac{1}{4a^2 n^2} \sum_m E[|Z_m|^2] u_{k-m}^\dagger (u_{i-m}^\dagger)^* = \frac{N_0 W}{2a^2 n} \delta_{k-i}$$

المتحولات العشوائية $\{\Psi_k\}$ هي غوصية مشتركة من (74.9) وغير مترابطة من (75.9)، لذلك هي متحولات عشوائية غوصية مستقلة، وهو أيضاً تمرين إضافي بسيط لبيان أن Ψ_k متماثلة دائرياً، أي أن: $\Psi_k \sim \mathcal{CN}(0, \frac{N_0 W}{2a^2 n})$. بالعودة إلى (73.9) يمكن أن نرى أنه من أجل كل من $k, 0 \leq k \leq k_0-1$ ، فإن تقدير ML للتابع G_k من ملاحظة $G_k + \Psi_k$ يعطى بالعلاقة:

$$\tilde{G}_k = \frac{1}{2a^2 n} \sum_m V_m u_{k-m}^\dagger$$

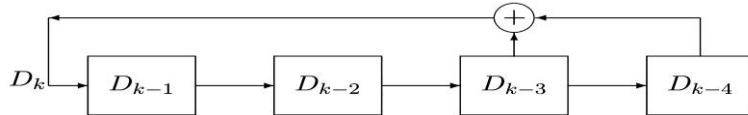
يمكن أن نبيّن أيضاً أن تقدير ML هذا من أجل G_k من ملاحظة V بأكمله، ولكن هذا الاشتقاق سوف يأخذنا أبعد مما ينبغي. من (73.9)، الخطأ في هذا التقدير هو Ψ_k ، لذلك يعطى متوسط مربع الخطأ في الجزء الحقيقي من هذا التقدير، وبالمثل في الجزء التخيلي، بالعلاقة $WN_0/(4a^2 n)$.

يمكننا جعل التقدير جيداً بشكل اعتباطي بوساطة زيادة طول فترة القياس n أو زيادة مقدار الدخل a . لاحظ أن متوسط مربع الخطأ مستقل عن متغيرات الحفوت $\{G_k\}$ ، الضجيج في التقدير لا يعتمد على كون القناة جيدة أو سيئة. وأخيراً لاحظ أن الطاقة في إشارة القياس الكلية هي $2a^2 n W$ ، وبالتالي فإن متوسط مربع الخطأ يتناسب عكسياً مع طاقة إشارة القياس.

ما هي المدة التي يكون خلالها قياس القناة صحيحاً؟ لحسن الحظ، من أجل التطبيقات اللاسلكية، زمن التماسك T_{coh} أكبر بعدة مرات من نثر التأخير، عادةً أكبر بمئات المرات. هذا يعني أن من الملائم قياس القناة ومن ثم استخدام هذه القياسات لعدد لا بأس به من رموز المعطيات. هناك، بطبيعة الحال مقايضة، بما أن استخدام فترة قياس طويلة n ، يؤدي إلى قياس دقيق، لكن يستخدم جزء ملموس من T_{coh} للقياس بدلاً من المعطيات. هذه المقايضة تصبح أقل أهمية كلما ازداد زمن التماسك.

تقنية ذكية واحدة التي يمكن استخدامها لزيادة عدد رموز المعطيات خلال فترة قياس واحدة هي أن يتم القياس في منتصف إطار المعطيات. من الممكن أيضاً، من أجل رمز معطيات مُعطى، أن يُقحم بين قياسات القناة السابقة واللاحقة. وتستخدم هذه التقنيات في النظام المعياري الخلوي الشائع GSM. يبدو أن هذه التقنيات تزيد التأخير قليلاً، حيث إن المعطيات التي تأتي أولاً في الإطار لا يمكن كشفها حتى بعد إجراء القياس. مع ذلك، إذا تم استخدام الترميز، هذا التأخير ضروري في أي حالة. لقد رأينا أيضاً أن أحد الأهداف الرئيسية للقياس هو التحكم بالاستطاعة/المعدل power/rate، وهذا من الواضح لا يمكن استعماله حتى بعد إجراء القياس.

تتوقف تقنية القياس أعلاه على وجود تتابع PN الذي يقارب خاصية الترابط في (67.9). يتم توليد التتابع PN (في الشكل الثنائي) بطريقة مشابهة جداً لتلك التي تولد تدفقات الخرج في ترميز الطي. في ترميز الطي ذو طول القيد n ، كل بت في تدفق خرج محدد هو الجمع من النمط الثنائي للدخل الحالي وبعض نمط معين من n دخل سابق. هنا لا توجد مداخل، لكن بدلاً من ذلك، تتم تغذية خرج مسجل الإزاحة عكسياً إلى الدخل كما هو مبين في الشكل (10.9).



الشكل 10.9: مسجل الإزاحة ذو الطول الأعظمي بأربع مراحل $n=4$ ويدور ذي طول 2^n-1 هذه الدورات خلال كل الحالات ماعدا الحالة التي كلها أصفار.

¹⁶² نذكر هنا أن متحولات الضجيج هذه هي عينات من الضجيج الأبيض التي جرى ترشيحها إلى $W/2$. وبالتالي، قيمة مربع متوسطها (بما في ذلك الأجزاء الحقيقية والتخيلية) تساوي إلى طاقة الضجيج محدودة المجال $N_0 W$. وبشكل مغاير، توابع sinc في التوسيع التعامدي لها طاقة $1/W$ ، لذلك فإن التباين في كل معامل حقيقي ووهي في توسيع الضجيج ينبغي زيادته بمقدار W من طاقة الضجيج $N_0/2$ لكل درجة حرية.

باختيار المراحل التي جُمعت بالنمط الثنائي بطريقة مناسبة (المشار إليها بمسجل الإزاحة ذي الطول الأعظمي)، فإن أي حالة ابتدائية غير صفرية سوف تدور خلال جميع الحالات 2^n-1 غير الصفرية الممكنة قبل أن تعود للحالة الابتدائية. ومن المعروف أن الطول الأعظمي لمسجلات الإزاحة موجود لجميع الأعداد الموجبة الصحيحة n .

إحدى الخواص الخطية لمسجل الإزاحة ذي الطول الأعظمي هو أنه خطي (خلال عملية الجمع من النمط الثنائي والضرب). وهذا هو افتراض y تمثل تتابعاً ذا طول 2^n-1 بت مولدة من قبل الحالة الابتدائية x ، وأن y' تم توليدها من قبل الحالة الابتدائية x' . ثم يمكن أن نرى مع قليل من التفكير أن $y \oplus y'$ يتم توليدها ببساطة $x \oplus x'$. وبالتالي الفرق بين أي اثنين من مثل هذه الدورات يبدأ في الحالات الابتدائية المختلفة التي تحتوي على 2^n-1 من الواحدات و $2^{n-1}-1$ من الأصفار. وبكلام آخر، مجموعة من الدورات تُشكل رمزاً ثنائياً بسيطاً. ويمكن أن نرى أن أي دورة غير صفرية لمسجل الإزاحة ذي الطول الأعظمي لديها تقريباً ترابط مثالي مع دورة إزاحة نفسها. هنا، ومع ذلك فإنه ترابط خلال فترة واحدة، حيث تتابع المزاح يعود للصفر خارج هذه الفترة، وهذا هو المهم. ليس هناك أي ضمان أن مثل هذا الترابط يقترب من المثالي، رغم أن هذه التتابعات لمسجل الإزاحة عادةً تستخدم عملياً لتقترب من المثالية.

2.7.9 مستقبلات راكي

مستقبل راكي Rake هو نوع من المستقبلات التي تجمع بين قياسات القناة واستقبال المعطيات بطريقة متكررة. وهو أولاً قابل للتطبيق في نظم الطيف المنتور التي فيها إشارات الدخل هي تتابعات ضجيج شبه عشوائي pseudo noise (PN) هو في الحقيقة، مجرد امتداد لتقنية قياس ضجيج شبه عشوائي موصوفة في القسم الفرعي السابق. قبل وصف مستقبل راكي، سيكون من المفيد مراجعة الكشف الثنائي بافتراض أن القناة معروفة تماماً وثابتة خلال فترة الإشارة.

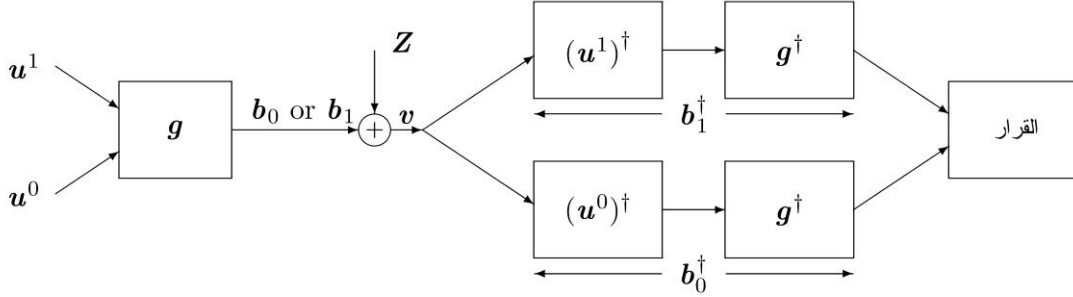
ليكن الدخل U هو إحدى الإشارتين $u^0 = (u_0^0, \dots, u_n^0)^T$ و $u^1 = (u_0^1, \dots, u_n^1)^T$. نرسم لفروع القناة المعروفة بالعلاقة $g = (g_0, \dots, g_{k-1})^T$ وبالتالي يكون خرج القناة، قبل إضافة الضجيج الأبيض إما $u^0 * g$ الذي نرمز له b_0 أو $u^1 * g$ الذي نرمز له b_1 . هذه الانطواءات تكون متضمنة خلال الفترة الزمنية $[1, n+k-1]$. وبعد إضافة الضجيج الأبيض الغوصي WGN، يكون الخرج هو إما $V = b_0 + Z$ أو $V = b_1 + Z$. مشكلة الكشف هي أن تقرر من ملاحظة V أي الإمكانيتين هي الأرجح. إن مشكلة الكشف هذه مبينة في المقطع 3.3.8 ومعطاة ببساطة (26.8) التي نكررها أدناه:

$$\text{LLR}(v) = \frac{-\|v - b_0\|^2 + \|v - b_1\|^2}{N_0} = \frac{2\Re(\langle v, b_0 \rangle) - 2\Re(\langle v, b_1 \rangle) - \|b_0\|^2 + \|b_1\|^2}{N_0} \quad (76.9)$$

في التمرين (17.9) مبيّن أنه إذا كان u^0 و u^1 تتابعات PN مثالية، أي تتابعات تحقق (68.9)، فإن $\|b_0\|^2 = \|b_1\|^2$ مما يبسط اختبار ML ليصبح:

$$\Re(\langle v, u^0 * g \rangle) \underset{U = u^1}{\overset{\bar{U} = u^0}{\geq}} \Re(\langle v, u^1 * g \rangle) \quad (77.9)$$

وأخيراً، من أجل $i = 0, 1$ ، الجداء الداخلي $\langle v, u^i * g \rangle$ هو ببساطة الخرج عند الفترة صفر عندما v هي دخل المرشح التوافقي للعلاقة $u^i * g$. توفيق المرشح للعلاقة السابقة، على كل حال هو ببساطة توفيق المرشح للتابع u^i مطوياً مع توفيق المرشح لـ g . المخطط الصندوقي لهذه العملية مبيّن في الشكل (11.9).

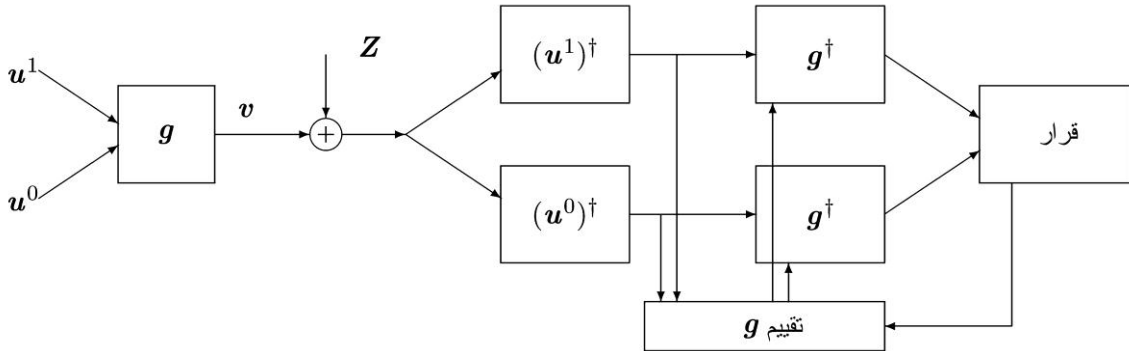


الشكل 11.9: الكشف عن الإشارات الثنائية المارة خلال مرشح معروف g . تتم مقارنة الأجزاء الحقيقية التي تدخل وحدة اتخاذ القرار عند الفترة صفر. إذا كان الجزء الحقيقي من الدخل المنخفض هو الأكبر فإن $\bar{U} = u^0$ ، وإلا فإن $\bar{U} = u^1$ إذا تم اختيار غير ذلك.

إذا كانت الإشارات المذكورة أعلاه هي تتابعات PN، يكون هناك تشابه كبير بين الشكلين (9.9) و(11.9). وبشكل خاص، إذا تم إرسال u^0 ، فإن خرج المرشح التوافقي $(u^0)^\dagger$ ، أي الجزء الأول من المرشح التوافقي السفلي، سيكون $2a^2ng$ في حال غياب الضجيج. لاحظ أن g هو شعاع، مما يعني أن الخرج الحالي من الضجيج عند الفترة k هو $2a^2ng_k$. وبالمثل، إذا تم إرسال u^1 ، يكون الخرج الحالي من الضجيج في الجزء الأول من المرشح التوافقي العلوي، عند الفترة k ، هو a^2ng_k . القرار يتخذ عند المستقبل في الزمن صفر بعد أن يمر التتابع $2a^2ng$ جنباً إلى جنب مع الضجيج خلال مرشح غير قابل للتحقيق g^\dagger . هذه المرشحات غير القابلة للتحقيق يمكن جعلها قابلة للتحقيق بواسطة تأخير زمن المستقبل بالنسبة لزمن المرسل.

في حال افتراض أنه تم اتخاذ القرار الصحيح، يمكن أيضاً أن يتم تقدير مرشح القناة g . وبشكل خاص إذا كان القرار هو $\bar{U} = u^0$ ، فإن مخارج الجزء الأول من المرشح التوافقي السفلي، عند أزمنة الاستقبال من $-k_0 + to 0$ ، سيتم تجميع إصدارات الضجيج من g_0 to g_{k_0-1} . بدلاً من استخدام هذه المخارج كتقدير ML لفروع المرشح، يجب أن تكون متحدة مع التقديرات السابقة باستمرار لتحديث التقدير الحالي لكل الفترات n . هذا يعني أنه إذا كان زمن التماسك طويلاً، فإن فروع المرشح سوف تتغير ببطء كبير مع الزمن، والمجموعة المستمرة من تقديرات القناة، واحد من كل n زمن عينة، يمكن استخدامها للتحسين المستمر وتتبع فروع مرشح القناة.

لاحظ أن القرار في الشكل (11.9) استند على معرفة وبالتالي معرفة g للمرشح التوافقي. القدرة على تقدير g^\dagger كجزء من كشف المعطيات يسمح لنا بالتالي g بتحسين تقدير g^\dagger بنفس زمن اتخاذ قرارات البيانات. عندما $\bar{U} = u^1$ (والقرار صحيح)، فإن مخارج المرشح التوافقي $(u^1)^\dagger$ تقدم تقديراً للتابع g وتسمح بالتالي بتحديث g^\dagger . يطلق على البنية المركبة لاتخاذ القرارات وتقدير القناة مرشح راكي *Rake receiver* هو موضَّح في الشكل (12.9).



الشكل 12.9: مستقبل راكي- إذا كان $\bar{U} = u^0$ فإنه يستخدم المخارج k_0 المطابقة من المرشح التوافقي $(u^0)^\dagger$ لتحديث تقدير g وبالتالي فروع كل مرشح توافقي g^\dagger . بدلاً من ذلك إذا كان $\bar{U} = u^1$ يستخدم خرج المرشح التوافقي $(u^1)^\dagger$. ومن ثم تستخدم هذه المرشحات التوافقية المحدثة g^\dagger مع الكتلة التالية للمخارج $(u^0)^\dagger$ و $(u^1)^\dagger$ لاتخاذ القرار التالي، وهكذا بالنسبة للتقديرات والقرارات اللاحقة.

يمكن توقع أن بنية مستقبل راكي تعمل بشكل جيد فقط إذا كان زمن تماسك القناة يحتوي على العديد من نقاط اتخاذ القرار. هذا يعني أن تقدير القناة المتخذ بواسطة قرار واحد يمكن استخدامه في قرارات لاحقة. وحيث إن تقديرات القناة المتخذة في كل فترة تكون

مصحوبة بالضجيج، وحيث إن تغيرات القناة بطيئة جداً، فإن تقدير g خلال فترة قرار واحدة سوف يستخدم فقط لإجراء تغيير صغير على تقدير موجود.

هناك فكرة تقريبية عن التباين في تقدير كل فرع g_k يمكن أن تتم من خلال الاستمرار بافتراض أن القرارات اتخذت بشكل صحيح. بافتراض كما كان من قبل أن تعابير تنابعات PN في الدخل لها مقدار a ، يمكن أن نرى من (75.9) أن لكل فترة تشوير signaling من n عينه، التباين في ضجيج القياس (في كل من الاتجاهات الحقيقية والتخيلية) هو $WN_0/(4a^2n)$. هناك تقريباً $T_{coh}W/n$ من فترات التشوير خلال فترة زمن التماسك، ويمكننا تقريب تقدير g_k كمتوسط لهذه القياسات. وهذا يقلل من ضجيج القياس بعامل $T_{coh}W/n$ ، ويخفض التباين في خطأ القياس¹⁶³ إلى $N_0/(4a^2T_{coh})$.

السؤال الذي يطرح نفسه، مع ذلك، هو تأثير أخطاء اتخاذ القرار. كل خطأ في اتخاذ القرار يولد "تقدير" من كل g_k مستقل عن g_k الصحيح. من الواضح، أخطاء قرار كثيرة جداً سوف تخفض القيمة التقديرية لكل g_k ، والتي بدورها سوف تزيد من أخطاء اتخاذ القرار بحيث تصبح التقديرات والقرارات لا قيمة لها. وبالتالي يتطلب مستقبل راكي تقديراً أولاً جيداً لكل g_k ويتطلب أيضاً وجود آلية ما لتعويض عن الكارثة أعلاه.

تستخدم مستقبلات راكي غالباً مع أبجدية كبيرة من تنابعات PN في الدخل، ويكون تحليل مثل هذه النظم غير الثنائية هو نفسه كما لحالة النظم الثنائية أعلاه. على سبيل المثال يستخدم، النظام المعياري الخلوي IS95 الذي سناقشه لاحقاً تقنية الطيف المنتور مع عرض مجال ترددي 1.25 Mhz. تستخدم في هذا النظام مجموعة إشارات من 64 إشارة متعامدة مع مستقبل راكي ذي 64 ary. في هذا المثال، ومع ذلك، يستخدم مستقبل راكي تقنيات غير متماسكة.

عادةً، في نظام راكي، يتم اختيار التنابعات PN بحيث تكون متعامدة مع بعضها بعضاً، لكن هذا في الواقع ليس ضرورياً. وحيث إن كل إشارة هي عبارة عن تنابع PN مع خواص ترابط ذاتي مناسبة، فإن تقدير القناة سوف يعمل كما كان من قبل. عنصر قرار البيانات، بالطبع، يجب أن يكون مصمماً لبنية إشارة معينة. على سبيل المثال، يمكننا حتى استخدام التشوير signaling الثنائي المتعكس، عندما تكون بعض الإجراءات معطاة لكشف فيما إذا كانت تقديرات القناة معكوسة.

9.8 التنوع

لقد ذكر التنوع عدة مرات في الأقسام السابقة كطريقة لإنقاذ احتمالات الخطأ في المستقبل. يُشير التنوع إلى مجموعة واسعة نوعاً ما من التقنيات، ونموذج القسمين الأخيرين الذي يجب أن يكون عمومياً إلى حد ما.

الجزء الأول من هذا التعميم هو تمثيل موجة المجال الأساسي المعدلة كتوسيع المتعامدة المعيرة $u(t) = \sum_k u_k \phi_k(t)$ بدلاً من توسع sinc في القسمين الأخيرين. من أجل نظم QAM في القسمين الأخيرين، هذا التغيير عادي إلى حد ما. يتم تقييس نبضة التعديل $\text{sinc}(Wt)$ إلى $W^{-1/2} \text{sinc}(Wt)$. مع هذا التقييس، سلسلة الضجيج Z_1, Z_2, \dots تصبح $Z_k \sim \mathcal{CN}(0, N_0)$ من أجل $k \in \mathbb{Z}^+$ وإشارة الدخل المتعكسة $\pm a$ تحقق $a^2 = E_b$.

قبل مناقشة التغيرات الأخرى في النموذج، نورد مثلاً بسيطاً جداً عن التنوع باستخدام نموذج ربح الفروع في القسم (5.9).

المثال 1.8.9. لنعبر أن قناة ذات خفوت رايلي تمت نمذجتها بنموذج مجال أساسي متقطع زمنياً وذوي فرعين. يكون الدخل عبارة عن سلسلة متقطعة زمنياً U_m والخرج هو سلسلة عقدية متقطعة زمنياً يوصف، كما هو موضح أدناه، بواسطة:

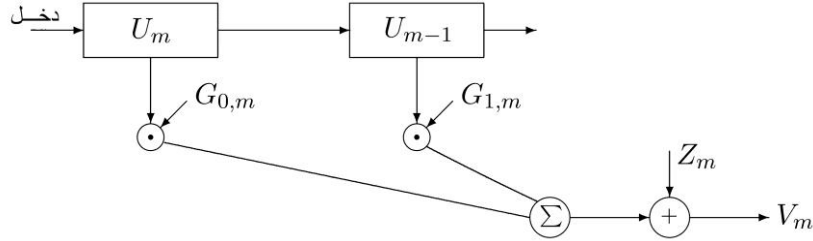
$$V_m = G_{0,m}U_m + G_{1,m}U_{m-1} + Z_m$$

من أجل كل m ، فإن $G_{0,m}$ و $G_{1,m}$ هي متحولات عشوائية غوسية عقدية مستقلة وموزعة بشكل متماثل وذات تناظر دائري ولها $G_{0,m} \sim \mathcal{CN}(0, 1/2)$ ، وهذا يحقق الشرط $\sum_k E[|G_k|^2] = 1$ المعطى في (48.9). ترابط $G_{1,m}$ و $G_{0,m}$ مع m غير مهم، ويمكن افتراضه

¹⁶³ قد تكون حقيقة عدم اعتماد تباين قياس الخطأ على W مفاجئة. إن خطأ التقدير لكل فترة منفصلة $1/W$ هو $WN_0/(4a^2T_{coh})$ ، الأمر الذي يزيد مع W ، ولكن عدد القياسات في الثانية يزداد بالطريقة نفسها، مما يؤدي إلى عدم وجود تباين كلي مع W . ولما كان عدد الوصلات في تزايد مع W ، فإن تأثير أخطاء التقدير مع ذلك تزداد مع W . يفترض ذلك وجود نموذج يتوفر فيه العديد من المسارات مع أزمنة انتشار ضمن $1/W$ من بعضها بعضاً، إلا أن ذلك قد يكون افتراضاً سيئاً عندما W كبيرة جداً.

غير مترابط. افترض أن السلسلة Z_m هي سلسلة من المتحولات العشوائية المستقلة والموزعة بشكل متماثل ومتناظرة دائرياً، $Z_m \sim \mathcal{CN}(0, N_0)$.

افترض أنه يتم إرسال رقم ثنائي واحد عبر هذه القناة، إرسال إما $\mathbf{u}^0 = (\sqrt{E_b}, 0, 0, 0)$ أو $\mathbf{u}^1 = (0, 0, \sqrt{E_b}, 0)$ ولكل منهما الاحتمال نفسه. يكون الخرج من أجل الفرضية الأولى عند الفترة الزمنية صفر ومن أجل الفرضية الثانية عند الفترة الزمنية الثانية، مما يسمح بالفصل بين استجابات كل من الفرضيتين.



الشكل 13.9: نموذج خفوت رايلي متقطع زمنياً وذو فرعين.

باشتراط أن $\mathbf{U} = \mathbf{u}^0$ ، يمكن أن نرى أن $V_0 \sim \mathcal{CN}(0, E_b/2 + N_0)$ ، حيث إن مساهمة الإشارة في V_0 تنتج من الفرع الأول. بالمثل $V_1 \sim \mathcal{CN}(0, E_b/2 + N_0)$ ، مع مساهمة إشارة ناتجة عن الفرع الثاني. إذا كان $\mathbf{U} = \mathbf{u}^0$ ، فإن $V_2 \sim \mathcal{CN}(0, N_0)$ و $V_3 \sim \mathcal{CN}(0, N_0)$ ، وحيث إن الضجيج متغير والربح مستقلين، يمكن أن نرى أن V_0, \dots, V_3 تكون مستقلة بشرط كون $\mathbf{U} = \mathbf{u}^0$. تحدث الحالة المعاكسة من أجل $\mathbf{U} = \mathbf{u}^1$ ، مع $V_m \sim \mathcal{CN}(0, E_b/2 + N_0)$ لأجل $m = 2, 3$ ، و $V_m \sim \mathcal{CN}(0, N_0)$ من أجل $m = 0, 1$. بما أن $\angle V_m \leq 0$ مستقلة عن الفرضيات، يمكن أن نرى أن طاقة مجموعة المركبات $X_m = |V_m|^2$ ، $0 \leq m \leq 3$ المستقلة تشكل إحصائية كافية. خلال الفرضية \mathbf{u}^0 ، تكون كل من X_1 و X_0 عبارة عن متحولات عشوائية أسية بقيمة متوسطة $E_b/2 + N_0$ و X_2 و X_3 أسية بقيمة متوسطة N_0 ، وكلها مستقلة. وبالتالي تعطى كثافة الاحتمال لكل من X_1 و X_0 (عندما تكون \mathbf{u}^0 معطاة) بوساطة $\alpha e^{-\alpha x}$ من أجل $x \geq 0$ حيث $\alpha = \frac{1}{N_0 + E_b/2}$ وبشكل مماثل تُعطى الكثافة الاحتمالية لكل من X_2 و X_3 بوساطة $\beta e^{-\beta x}$ من أجل $x \geq 0$ حيث $\beta = \frac{1}{N_0}$. ويحدث العكس عند الفرضية \mathbf{u}^1 .

ثم يتم تقييم لوغاريتم نسبة الاحتمال LLR واحتمال الخطأ (عند الحد الأعظمي لاحتمال الكشف) في التمرين (13.9).

$$\text{LLR}(x) = (\beta - \alpha)(x_0 + x_1 - x_2 - x_3)$$

$$\text{Pr}(e) = \frac{3\alpha^2\beta + \alpha^3}{(\alpha + \beta)^3} = \frac{4 + \frac{3E_b}{2N_0}}{\left(2 + \frac{E_b}{2N_0}\right)^3}$$

لاحظ أنه عندما تصبح E_b/N_0 كبيرة، فإن احتمال الخطأ يقترب من الصفر حيث نضع $(E_b/N_0)^{-2}$ بدلاً من $(E_b/N_0)^{-1}$ ، مع خفوت رايلي مسطح. هذا مثال جيد عن التنوع، حيث تحدث الأخطاء نتيجة المستويات العالية للخفوت، لكن مع فرعين مستقلين، هناك احتمال أكبر بكثير أن أيّاً من الفرعين له شدة معقولة.

لاحظ أن تعدد مسارات النقل الفيزيائية تؤدي إلى زيادة خفوت تعدد المسارات والتنوع على حدّ سواء، الأول عادةً يسبب الصعوبات ويؤدي الثاني عادةً إلى إنقاص تلك الصعوبات. ومن المهم أن نفهم ما هو الفرق بينهما.

إذا تم اختيار عرض المجال الترددي للدخول بحيث يكون نصف عرض المجال الكبير في المثال أعلاه، عندئذ يصبح النموذج ذو الفرعين بشكل أساسي نموذجاً بفرع واحد، وهذا سيؤدي إلى خفوت رايلي مسطح ولا يوجد تنوع. الفرق الأساسي هو أنه في النموذج ذي الفرعين، يتم فصل مخارج المسارات إلى مجموعتين ويمكن ملاحظة تأثير كل منهما بشكل منفصل. في نموذج الفرع الواحد، يتم دمج كل المسارات، حيث لا يوجد استقلالية كبيرة لإمكانية مراقبة مجموعة المسارات.

من المثير للاهتمام أيضاً مقارنة مستقبل التنوع أعلاه مع المستقبل الذي يمكنه استخدام قياسات القناة. إذا كانت قيم الفرع معروفة، وبالتالي كاشف ML سوف يحتوي على مرشح الموافقة في فروع القناة، كما في الشكل (12.9) من حيث دخل معين في التمرين أعلاه، هذا سوف يُوزن خرج فرعي القناة تبعاً لمقدار الفرع، بينما مستقبل التنوع أعلاه يقوم بوزنهما بشكل متساوٍ. بكلام آخر فإن كاشف التنوع

أعلاه لا يعمل تماماً بشكل صحيح مع قيم الفرع المعلومة المعطاة، لكن بالتأكيد يُعطي تحسناً كبيراً خلال الإرسال ضيق المجال. يُسمى التنوع المستخدم أعلاه التنوع الزمني لأنه يستخدم التأخير بين مجموعات مختلفة من المسارات. يخفي التحليل أعلاه جزءاً كبيراً من الفوائد التي يمكن أن نحصل عليها من خلال التنوع الزمني. على سبيل المثال، في المثال المؤلف عن انعكاس الجدار، هناك فقط مساران. إذا كان عرض المجال الترددي للإشارة كبير بشكل كاف بحيث تأتي الاستجابة من فروع مختلفة (أو إذا قام المستقبل بقياس زمن التأخير في كل مسار)، فإن الخفوت سوف يتلاشى.

يبدو أن العديد من الحالات اللاسلكية، وخاصة الشبكات الخلوية والمحلية، تحتوي على عدد صغير نسبياً من المسارات الهامة المترابطة، وإذا كان عرض المجال الترددي كبيراً بما فيه الكفاية لفصل هذه المسارات، ثم يكون الربح أكبر بكثير من ذلك المشار إليه في المثال أعلاه. يمكن تعميم مستقبل التنوع أعلاه على نماذج متقطعة أخرى من القنوات اللاسلكية. على سبيل المثال، يمكن فصل المجال الترددي إلى قطع معزولة بوساطة تردد متماسك، وبالتالي الحصول على خفوت مستقر تقريباً في كل منها والقدرة على فصل الخرج من هذه المجالات. التنوع الترددي مختلف نوعاً ما عن التنوع الزمني، حيث إنه لا يسمح بالقرار من مسارات مختلفة التأخير.

هناك طريقة أخرى لتحقيق التنوع هي من خلال استخدام هوائيات متعددة في المرسل والمستقبل. لاحظ أن الهوائيات المتعددة في المستقبل تسمح للاستطاعة المتاحة الكلية المستقبلية من هوائي واحد أن تُستقبل بوساطة كل هوائي، بدلاً من تقسيم الاستطاعة كما هو في التنوع الزمني أو التنوع الترددي. من أجل كل هذه الطرائق الأكثر عمومية لتحقيق التنوع، يجب تمثيل الدخل والخرج بوضوح بوساطة التوسعات المتعامدة المنتظمة المناسبة لإظهار مصطلح التنوع.

يمكن تعميم المثال ذي الفرعين أعلاه بسهولة على عدد اعتباطي من الفروع. افترض أن نموذج الشكل (13.9) قد تمّ تعديله ليشتمل L فرع، $G_{0,m}, \dots, G_{L-1,m}$ توافق $G_{k,m} \sim \mathcal{CN}(0, 1/L)$ من أجل $0 \leq k \leq L-1$. من المفترض أن يكون الدخل إما $\mathbf{u}^0 = (\sqrt{E_b}, 0, \dots, 0)$ أو $\mathbf{u}^1 = (0, \dots, 0, \sqrt{E_b}, \dots, 0)$ حيث كل $2L$ من هذه الصفوف له أصفار في كل المواضع لكن موضع واحد وبالتحديد الموضع صفر في \mathbf{u}^0 والموضع L في \mathbf{u}^1 . تُشكل طاقة مجموعة المركبات المستقبلية $0 \leq m \leq 2L-1$ $X_m = |V_m|^2$ إحصائية كافية لنفس السبب كما في حالة التنوع الثنائي. خلال الفرضية \mathbf{u}^0 ، تكون X_0, \dots, X_{L-1} عبارة عن متحولات عشوائية أسية ذات كثافة $\alpha \exp(-\alpha x)$ حيث: $\alpha = \frac{1}{N_0 + E_b/L}$ وبالمثل، فإن $X_{2L-1}, \dots, X_{2L-2}$ هي متحولات عشوائية أسية ولها كثافة $\beta \exp(-\beta x)$. كل الشروط المستقلة معطاة من \mathbf{u}^0 ، والعكس صحيح ومُعطى بالفرضية \mathbf{u}^1 .

يمكن أن نرى أن قاعدة كشف ML تختار \mathbf{u}^0 إذا كان $\sum_{m=0}^{L-1} X_m \geq \sum_{m=L}^{2L-1} X_m$ وتختار \mathbf{u}^1 فيما عدا ذلك. ثم يبيّن الشكل (14.9) أن احتمال الخطأ هو:

$$\Pr(e) = \sum_{\ell=1}^{2L-1} \binom{2L-1}{\ell} p^\ell (1-p)^{2L-1-\ell}$$

حيث $p = \alpha / (\alpha + \beta)$. بتعويض قيم α و β ، تصبح العلاقة:

$$\Pr(e) = \sum_{\ell=1}^{2L-1} \binom{2L-1}{\ell} \frac{\left(1 + \frac{E_b}{LN_0}\right)^{2L-1-\ell}}{\left(2 + \frac{E_b}{LN_0}\right)^{2L-1}} \quad (78.9)$$

يمكن أن نرى أن المصطلح المهيمن في هذا المجموع هو $\ell = L$. من أجل أي قيمة L معطاة فإن احتمال الخطأ يتناقص مع E_b كما E_b^{-L} . وبنفس الوقت، على كل حال، إذا ازدادت L من أجل E_b معينة، تمّ في النهاية يبدأ احتمال الخطأ بالتزايد ليقترّب من $1/2$. وبكلام آخر، زيادة التنوع يمكن أن تنقص احتمال الخطأ ليصل إلى نقطة معينة لكن بعد ذلك زيادة التنوع، من أجل E_b ثابتة يكون له نتائج عكسية.

إذا تمّ تقييم (78.9) بوصفها كتابع للقيمة E_b/N_0 و L سوف نجد أن $\Pr(e)$ تتناقص من أجل قيم كبيرة ثابتة E_b/N_0 عندما تكون L من مرتبة $0.3E_b/N_0$. التناقص واضح تماماً، لكن التنوع الكثير جداً لا يساعد، حيث تبقى الحالة نفسها أساساً مع قياس القناة. المشكلة هنا هي أنه عندما يتمّ نشر الطاقة المتاحة خلال درجات كثيرة جداً من الحرية، سوف لا يكون هناك طاقة كافية لكل درجة من الحرية لقياس

القناة.

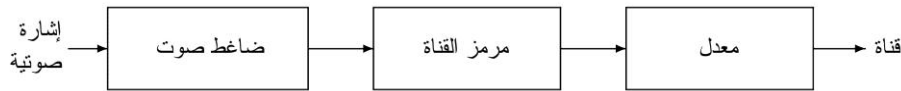
افتترضت المناقشة السابقة أن كل مسار تنوع له توزيع رايلي، لكن لقد رأينا أنه باستخدام التنوع الزمني، يمكن أن تصبح المسارات الإفرادية قابلة للفصل، مما يسمح بالحصول على احتمال خطأ أقل بكثير مما لو بقيت الفروع ذات توزيع رايلي. ربما نحاول عند هذه النقطة نمذجة القناة بدقة أيضاً. إذا كان تصميم المرسل والمستقبل المعطين لاستخدامهما خلال مجموعة واسعة من سلوكيات القناة المختلفة، فإن السؤال المهم هو جزء من السلوكيات التي يمكن للتصميم أن يعمل خلالها بشكل مقبول. بشكل أساسي يجب أن تتم الإجابة عن هذا السؤال تجريبياً، لكن نماذج بسيطة تعطي بعض التكهن عما يمكن توقعه.

9.9 النفاذ المتعدد بتقسيم الرمز CDMA، نظام IC95 المعياري

في هذا القسم، سيتم شرح نظام IS95 باختصار كونه أحد الأصناف الرئيسية في المعايير الخلوية. ولقد تم اختيار هذا النظام لأنه من الناحية النظرية أكثر إثارة للاهتمام، ولأن معظم النظم الحديثة تركز على هذا النهج. يستخدم هذا المعيار الطيف المنتور، الذي يعرف غالباً باسم Code Division, Multiple Access (CDMA). لا يوجد أي دليل مقنع على أن الطيف المنتور متفوق بطبيعته عن النهج الأخرى، لكنه يملك عدداً من المزايا الهندسية بالنسبة للنظم التقليدية ضيقة المجال. هدفاً الرئيس، على كل حال، هو إعطاء فكرة عن كيفية تعامل نظم الشبكة الخلوية التجارية الرئيسية مع بعض القضايا التي قمنا بمناقشتها، وبالتحديد يُركز النقاش هنا على القضايا الناتجة عن نقل الصوت.

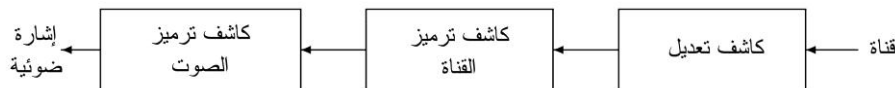
يستخدم نظام IS95 المجال الترددي من 800-900 MHz. يُستخدم النصف السفلي من هذا المجال للإرسال من الهواتف المحمولة إلى محطة القاعدة (الوصلات الصاعدة)، ويستخدم النصف العلوي للإرسال من محطة القاعدة إلى الهواتف المحمولة (الوصلات الهابطة). هناك مجالات فرعية متعددة¹⁶⁴ ضمن هذا المجال، عرض كل منها 1.25MHz. تستخدم كل محطة قاعدة كل من هذه المجالات الفرعية، والهواتف المحمولة المتعددة ضمن الخلية يمكن أن تتشارك بنفس المجال الفرعي. كل مجال فرعي للوصلة الهابطة أكبر بمقدار 45MHz من المجال الفرعي للوصلة الصاعدة. الموجة المرسله سوف يتم ترشيحها بشكل كاف في كل من الهواتف المحمولة ومحطات القاعدة لذلك لن يحدث تداخل ملحوظ عند الاستقبال على القناة العكسية.

تستخدم المعايير الخلوية الرئيسية الأخرى نظام TDMA (النفاذ المتعدد بتقسيم الزمن). تكون المجالات الفرعية ضيقة جداً في TDMA، لكن هواتف محمول واحد يستخدم المجال الفرعي خلال فترة زمنية محددة للاتصال مع محطة القاعدة. في نظام TDMA، يوجد تداخل قليل بين الهواتف المحمولة في نفس الخلية، لكن يوجد تداخل ملحوظ بين الخلايا. هناك تداخل أكثر في نظام CDMA بين الهواتف المحمولة في نفس الخلية، ولكن بصورة أقل فيما بين الخلايا. يبيّن الشكل (14.9) المخطط الصندوقي عالي المستوى لأقسام جهاز الإرسال.



الشكل 14.9: المخطط الصندوقي عالي المستوى لجهاز الإرسال.

يؤدي المستقبل، من وجهة نظر مستوى الكتلة (انظر الشكل 15.9)، وظائف الاستقبال المقابلة بترتيب عكسي. وهذا يمكن النظر إليه كنظام الطبقات، أيضاً اختيار وظيفة كل كتلة مرتبط إلى حد ما مع وظائف الكتل الأخرى.



الشكل 15.9: المخطط الصندوقي عالي المستوى لجهاز الاستقبال.

سوف يتم وصف هذه الكتل الثلاث في الفقرات الفرعية التالية. ضغط الصوت وترميز القناة متماثلة تماماً في كل المعايير، لكن التعديل مختلف بشكل كبير.

¹⁶⁴ من الشائع في المراجع الخلوية استخدام كلمة قناة من أجل مجال ترددي فرعي معين، وسوف نستمر في استخدام كلمة قناة لوسط الإرسال الذي يربط بين مرسل ومستقبل محددتين. سوف نستخدم فيما بعد كلمة قناة متعددة النفاذ للإشارة إلى الوصلات الصاعدة في الهواتف المحمولة المتعددة في الخلية نفسها.

1.9.9 ضغط الصوت

يتم تقطيع الموجة الصوتية، في البداية في كل من هذه المعايير إلى قطع صغيرة بطول 20 ميلي ثانية. هذه القطع كبيرة بشكل كافٍ للحصول على ضغط كبير، لكنها صغيرة بما يكفي لتسبب تأخيراً قليلاً نسبياً. في IS95، يتم ترميز كل قطعة 20 ميلي ثانية بمئة وأثنين وسبعين بتاً. ويكون معدل الصوت المرقم عندئذ $8600 = 172/0.02$ بت في الثانية. كان ضغط الصوت مجالاً للبحث الفعال لسنوات عديدة. في الأيام الأولى، الموجة الصوتية، التي تقع في المجال 3200-400Hz، يتم أخذ عينات منها ببساطة 8000 مرة بالثانية الموافقة للمجال 4Khz. ثم يتم تكميم كل عينة باستخدام 8 بت ليصبح المجموع 64,000 bps. لا يزال الحصول على صوت عالي الجودة عند 8600 bps تحدياً معتاداً اليوم ويتطلب حسابات كبيرة.

ثم يتم تمديد 172 بتاً في القطعة من الضاغط بمقدار 12 بتاً للقطعة من أجل كشف الخطأ. إن هذا الأخير ليس له علاقة بخوارزميات تصحيح الخطأ التي ستناقش لاحقاً، ويستخدم ببساطة للكشف عندما تفشل هذه النظم في تصحيح أخطاء القناة. كل من 12 بتاً هي لفحص الإنجابية (أي دارة جمع من النمط الثنائي) لمجموعة محددة من بتات المعطيات. وبالتالي، فإنه من المرجح جداً، عندما يفشل مفكك ترميز القناة بفك الترميز بشكل صحيح، أن واحداً من بتات فحص الإنجابية سيفشل في أن يكون مقنعاً. عندما يحدث مثل هذا الفشل، فإنه يتم تعيين الإطار المقابل إلى 20 ميلي ثانية من الصمت، وبالتالي يتم تجنب الضجيج الصاخب في القناة ذات الشروط السيئة. بعد ذلك يتم تمديد كل قطعة ذات 12 bit + 172 بمقدار 8 بت، كل مجموعة إلى 0. تستخدم هذه البتات كسلسلة فصل في ترميز الطي لوصفه باختصار. بإضافة هذه البتات، فإن كل قطعة 20 ميلي ثانية تولد 192 بتاً، لذلك هذا يُحول المعدل من 8600 بت/ثا إلى 9600 بت/ثا. يكون التوقيت في أي نقطة أخرى من المرسل والمستقبل هو من مضاعفات معدل البت هذا. هناك العديد من المصطلحات العامة في كل المعايير، التي يؤدي كل منها وظائف صغيرة لكنها ضرورية، لكن كل منها يزيد من معدل البت الكلي المرسل.

2.9.9 ترميز وفك ترميز القناة

يستخدم ترميز وفك ترميز القناة ترميز الطي ومفكك ترميز فيتربي Viterbi. ترميز الطي له معدل 1/3، بالتالي فهو يولد ثلاث بتات في الخرج لكل بت في الدخل، ويحول 9600 بت/ثا في الدخل إلى 28.8 بت/ثا في الخرج. إن اختيار المعدل ليس حرجاً لدرجة كبيرة، حيث إنه يتضمن مقدار الترميز الذي يتم هنا الترميز ومقدار الترميز الذي سيتم في وقت لاحق كجزء من التعديل المناسب. يبلغ طول التقييد في ترميز الطي 8، لذلك كل من المخارج الثلاثة الموافقة للدخل المحدد تعتمد على الدخل الحالي إضافة للمداخل الثمانية السابقة. وبالتالي هناك $2^8 = 256$ حلة ممكنة للترميز، الموافقة لمجموعات القيم المحتملة للمداخل الثمانية السابقة.

يتناسب تعقيد خوارزمية فيتربي طردياً مع عدد الحالات، لذلك هناك علاقة حادة نسبياً بين درجة التعقيد واحتمال الخطأ. حقيقة أن أخطاء فك الترميز تنتج بشكل أساسي بسبب الخفوت الكبير أكثر من المتوقع (إما خفوت عميق لا يمكن تعويضه بوساطة التحكم بالاستطاعة أو قياس غير دقيق للقناة)، تشير إلى أن زيادة طول التقييد من 8 إلى 9، من جهة يمكن أن يكون غير فعال نوعاً ما، ومن جهة أخرى، يضاعف من تعقيد مفكك الترميز.

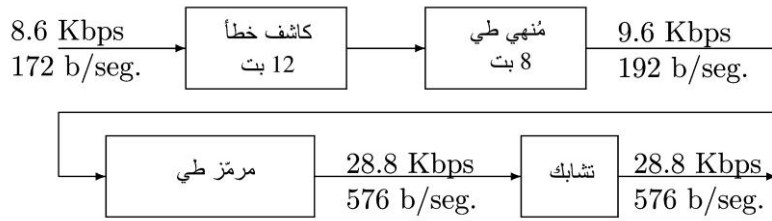
يتم إنهاء رمز الطي في نهاية كل مقطع صوتي، وهكذا تحول رمز الطي إلى رمز كتلة بطول 576 ومعدل 1/3، مع 192 بت دخل في المقطع. كما ذكر في القسم السابق، هذه 192 بتاً تشمل 8 بت لإنهاء الرمز وإرجاعه إلى الحالة الابتدائية صفر. يعود جزء من سبب هذا الإنهاء إلى الحاجة لتأخير صغير، والجزء الآخر هو الرغبة في منع أن يؤدي الخفوت في أحد المقاطع إلى حدوث أخطاء في مقاطع صوتية متعددة، (الفشل في فك الترميز بشكل صحيح في مقطع واحد يجعل عملية فك الترميز في المقطع التالي أقل وثوقية في حال غياب هذا الإنهاء).

عندما يحدث خطأ في مفكك ترميز فيتربي، فإنه عادة ما يمكن اكتشافه من نسب الاحتمال في مفكك الترميز، لذلك فإن ترويسة 12 بتاً لكشف الخطأ على الأرجح يمكن تفاديها. يجب إجراء العديد من المقايضات بين درجة التعقيد والأداء والنفقات في كل من المعايير والمنتجات.

تستخدم عملية فك الترميز القرارات اللينة من خرج مفكك التعديل. القدرة على استخدام معلومات الاحتمال (أي القرارات اللينة) من مفكك التعديل هي أحد أسباب استخدام ترميز الطي وفك ترميز فيتربي. يستخدم مفكك ترميز فيتربي هذه المعلومات بطريقة طبيعية،

في حين، بالنسبة لبعض تقنيات الترميز وفك الترميز الأخرى هذا يمكن أن يكون غير طبيعي ومعقدًا. تستخدم جميع المعايير الرئيسية ترميز الطي، الذي ينتهي عند نهاية كل مقطع صوتي، وفك ترميز بوساطة خوارزمية فيتربي، من الجدير ملاحظة أن قياسات القناة مفيدة في توليد مداخل ذات احتمال جيد إلى مفكك ترميز فيتربي.

الخطوة الأخيرة في عملية الترميز هي تشبيك 576 بتًا من خرج المرمر المقابل للمقطع الصوتي المعين. وبالمقابل فإن الخطوة الأولى في عملية فك الترميز هي فك تشابك البتات (في الحقيقة القرارات اللينة) الخارجة من مفكك التعديل. يمكن أن نرى بدون تحليل أنه إذا كان الضجيج القادم إلى مفكك فيتربي ذا ترابط عالٍ، ثم فإن مفكك فيتربي، مع طوله ذي القيد القصير، من المرجح أن يجعل خطأ فك الترميز كما لو كان الضجيج مستقلاً. سوف يبيّن القسم الفرعي التالي أن ضجيج خرج فك التعديل هو في الحقيقة ذو ترابط عالٍ، وبالتالي فإن عملية التشابك تكسر هذا الترابط. يُلخّص الشكل (16.9) عملية ترميز هذه القناة.



الشكل 16.9: المخطط الصندوقي لترميز القناة.

3.9.9 فك ترميز فيتربي Viterbi لفتوات الخفوت

من أجل الحصول على بعض التصور لماذا رمز الطي أعلاه مع مفكك فيتربي سوف لا يعمل بشكل جيد جداً إذا تم وضع بعد الترميز مباشرة دارة تعديل ثنائي، لنفترض أنه يتم استخدام تعديل موضع النبضة (PPM) في القسم الفرعي 1.6.9 وأن القناة تم تمثيلها بفرع واحد ذي خفوت رايلي. عرض المجال الترددي سيكون ضمن القيم النموذجية لتعدد التماسك F_{coh} ، وبالتالي يكون نموذج الفرع الواحد معقولاً. زمن التماسك هو عادةً ما لا يقل عن ميلي ثانية، ولكن في حالة عدم وجود مركبات متحركة يمكن أن يكون بسهولة أكثر من 20 ميلي ثانية.

وهذا يعني أنه كل 20 ميلي ثانية يمكن بسهولة أن يتم إرسال جزء من الصوت خلال خفوت عميق، ومرمر الطي، حتى مع التشابك ضمن 20 ميلي ثانية، لن يكون قادراً على فك الترميز بنجاح. إذا كان الخفوت سريعاً جداً، فإن مفكك فيتربي، مع معلومات الاحتمال عن البتات الواردة، من الممكن أن يعمل بنجاح إلى حد ما، لكن هذا ليس شيئاً يمكن الاعتماد عليه.

يوجد ثلاثة علاجات فقط لهذه الحالة. الأول هو إرسال استطاعة أكبر عندما تكون القناة ذات خفوت. كما هو مبين في التمرين (11.9) على كل حال، إذا عوضت استطاعة الدخل تماماً عن الخفوت (أي أن استطاعة الدخل عند الزمن m هي $1/gm^2$) فإن استطاعة الدخل المتوقعة هي لا نهائية. هذا يعني أنه، مع استطاعة متوسطة محدودة، فإن الخفوت العميق لفترات طويلة يؤدي إلى انقطاع الخدمة. العلاج الثاني هو التنوع، الذي خلاله يتم نشر كل كلمة ترميز خلال عرض مجال ترددي متماسك بشكل كافي أو خلال فترات زمنية متماسكة لتحقيق المتوسط على مدى خفوت القناة. استخدام التنوع خلال عدة فترات زمنية متماسكة يسبب حدوث تأخيرات تتناسب مع زمن التماسك والتي عادةً ما تكون غير مقبولة للصوت. التنوع يمكن استخدامه بوساطة استخدام عرض مجال ترددي أكبر من تردد التماسك (هذا يمكن أن يتم باستخدام فروع متعددة في نموذج خط تأخير أو مجالات ترددية متعددة).

العلاج الثالث هو استخدام معدل إرسال متغير، وهذا غير تقليدي للصوت، حيث إن ترميز الصوت ينتج تدفق بمعدل ثابت من بتات الخرج في القناة، وقيد التأخير قاسي جداً لانتظار هذا الدخل وإرساله عندما تكون القناة جيدة. وسيكون من الممكن كسر مبدأ فصل منبع/قناة وامتلاك منبع يولد "بتات هامة" عند معدل أول "وبتات غير هامة" عند معدل آخر. ثم عندما تكون القناة سيئة، سيتم إرسال البتات الهامة فقط. بعض النظم الخلوية، خصوصاً الحديثة منها، ذات ملامح تماثل ذلك. من أجل المعطيات، على كل حال، استخدام معدل إرسال متغير هو احتمال كبير جداً لأنه لا يوجد عادةً شرط تأخير قاسٍ. لذلك،

يمكن إرسال المعطيات بمعدل عالٍ عندما تكون القناة جيدة وبمعدل منخفض أو معدل صفر عندما تكون القناة سيئة، وتستفيد أحدث النظم من مزايا هذا الاحتمال.

4.9.9 التعديل وفك التعديل

الجزء الأخير من المخطط الصندوقي على المستوى لجهاز إرسال IS95 هو لتعديل خرج المفرق قبل إرسال القناة. هذا هو عندما يدخل الطيف المشور، حيث يتم نشر تدفق المعطيات ذات 28.8 kbps على عرض مجال ترددي 1.25 MHz. وسوف يكون عرض المجال الترددي الموافق للموجة المشورة المستقبلية غالباً أكبر من تردد التماسك، وبالتالي يتم توفير حماية ضد الخفوت العميق. مستقيل راكي سوف يستفيد من مزايا هذا التنوع. قبل الخوض في تفاصيل أخرى عن مزايا هذا التنوع، سيتم وصف آلية النشر.

الخطوة الأولى في عملية التعديل هي تقطيع خرج المفرق إلى سلاسل ذات طول 6، ومن ثم تحويل كل سلسلة 6 بت إلى سلسلة ثنائية ذات 64 بتاً. يتم تحويل كل من 64 سلسلة ذات الطول 6 إلى الصف المقابل H_6 في مصفوفة هادامارد Hadamard التي تم وصفها في القسم 1.6.8. كل صف من مصفوفة هادامارد هذه يختلف عن الصفوف الأخرى بمقدار 32 موضع وكل صف، ما عدا الصف الذي كله أصفار، يحتوي بالضبط على 32 من الواحدات و32 أصفار. وبالتالي فهو ترميز ثنائي متعامد.

لنفترض أن الكلمة المختارة من هذا الترميز يتم تحويلها إلى سلسلة PAM بواسطة خارطة 2PAM أي $\{+a, -a\} \rightarrow \{0,1\}$. وتسمى هذه سلاسل 64 من القيم الثنائية المتعاكسة توابع والش Walsh، معدل الرمز الخارج من تحويل 6 بت إلى 64 بت هو $(64/6) \cdot 28,800 = 307,200$ رمز بالثانية.

للحصول على فكره عن سبب استخدام توابع والش، نفترض أن x_1^k, \dots, x_{64}^k تمثل تابع والش ذو الرقم k^{th} ، مضحماً بالعامل a ، واعتبر ذلك كدخل المجال الأساسي المتقطع زمنياً. للتبسيط، نفترض خفوت سطحي مع قناة ذات فرع واحد ذي مطال g . لنفترض أن الضجيج الأبيض الغوسي في المجال الأساسي ذا التباين $N_0/2$ (لكل من الجزء الحقيقي والتخيلي) تمت إضافته إلى هذه السلسلة، وافترض أن توابع والش 64 قد تم كشفها وإرسالها. افترض أن E_s تمثل الطاقة المستقبلية المتوقعة لكل من توابع والش. تبين نتيجة الكشف غير التماسك من (59.9) أن الفرضية z أكثر احتمالاً من k ، بشرط أن $x^k(t)$ قد أرسلت، هو: $1/2 \exp\left[\frac{-E_s}{2N_0}\right]$. باستخدام توحيد الحدّ خلال الفرضيات 63 غير الصحيحة الممكنة، يكون احتمال الخطأ، عند استخدام الكشف غير التماسك وافترض أن مرشح القناة ذو فرع واحد هو:

$$(79.9) \quad \Pr(e) \leq \frac{63}{2} \exp\left[\frac{-E_s}{2N_0}\right]$$

احتمال الخطأ ليس الموضوع الرئيس المهم هنا، حيث إن خرج الكاشف هو قرارات لبنة التي تستخدم بعد ذلك من قبل مفكك ترميز فيترتي. على كل حال، فإن احتمال الخطأ يتيح لنا فهم الأساس المنطقي لاستخدام مثل هذه المجموعة الكبيرة من الإشارات مع إشارات متعامدة.

إذا تم استخدام الكشف التماسك، وعند توحيد حدّ مماثل يكون احتمال الخطأ $63Q\sqrt{E_s/N_0}$. كما تمت المناقشة في القسم 2.6.9، يتناقض هذا بشكل أسّي مع E_s بنفس الطريقة كما في (79.9)، لكن بمعامل أصغر بكثير. ومع ذلك، يتطلب استخدام الكشف غير التماسك عدداً من الديسبل الإضافية للحصول على نفس احتمال الخطأ كما في الكشف التماسك، كما أن احتمال الخطأ في الكشف التماسك يتناقض بشكل عكسي مع الأس في (79.9). لكن بمعامل أصغر بكثير. ومع ذلك، فإن عدد الديسبل الإضافي المطلوبة عند استخدام الكشف غير التماسك للحصول على نفس احتمال الخطأ كما في حالة الكشف التماسك يتناقض بشكل عكسي تقريباً مع الأس في العلاقة (79.9). وهذا يعني أنه باستخدام عدد من التوابع المتعامدة المعيرة (64 في هذه الحالة)، يمكننا جعل الأس في (79.9) كبير المقدار ويقترّب (من حيث الديسبل) مما يمكن تحقيقه باستخدام الكشف التماسك.

النقاش أعلاه غير مكتمل، لأن E_s هي الطاقة المرسلّة لكل تابع والش. ومع ذلك تستخدم 6 أرقام ثنائية لاختيار كل تابع والش يتم إرساله، وبالتالي E_b في هذه الحالة هي $E_s/6$ وتصبح العلاقة (79.9):

$$(90.9) \quad \Pr(e) \leq 63 \exp(-3E_b/N_0)$$

مجموعة الإشارة الكبيرة هذه تؤدي أيضاً إلى إلغاء 3 ديسبل كغرامة للتشوير المتعامد بدلاً من التشوير المتعاكس الذي رأيناه لمجموعات الإشارة الثنائية. تكمن كلفة التعامد هنا أساساً نتيجة استخدام رموز متعامدة بدلاً من الرموز الثنائية المتعامدة المطابقة ذات 7 بتات دخل و 128 كلمة ترميز¹⁶⁵، أي عامل بمعدل 6/7.

هناك مسألة قابلة للنقاش هنا هي أنه يتم استخدام ترميزين (ترميز الطي كترميز خارجي، متبوعاً بترميز والش كترميز خارجي) بدلاً من ترميز واحد. يبدو أنه ليس هناك أي طريقة تحليلية نظيفة لبيان أن هذا الخيار منطقي بالنسبة لكل خيارات الترميز المفردة أو المجتمعمة. من ناحية كل ترميز يؤدي وظيفة مختلفة إلى حد ما. مفكك ترميز فيتربي يقضي على الأخطاء الناتجة عن الخفوت المتقطع أو الشاذ، ويسمح ترميز والش بالكشف غير المتناسك ويساعد أيضاً في إنقاص احتمال الخطأ بشكل كبير بسبب مجموعات الإشارة الكبيرة المتعامدة بدلاً من الإرسال الثنائي.

تقوم دائرة التعديل في IS95 فيما بعد بنشر توابع والش أعلاه خلال عرض مجال ترددي أكبر من عرض المجال الترددي للإشارة المرسله. يتم جمع تدفق الأرقام الثنائي الناتجة من رمز هادامارد¹⁶⁶ مع تتابع ضجيج شبه عشوائي (PN) بمعدل 1228.8 kbps، أي أربعة بتات PN لكل بت إشارة. في المضمون، كل بت من تدفق 307.2 kbps الخارج من ترميز والش يتم تكراره أربع مرات (للحصول على معدل بتات 1228.8 kbps)، ومن ثم يضاف بوساطة دائرة جمع من النمط الثنائي إلى تتابع PN. هذا النشر إلى حد أبعد يوفر التنوع خلال المجال الترددي المتاح 1.25 MHz.

طول القيد هنا هو $n = 42$ رقم ثنائي. وبالتالي فترة الدورة هي $2^{42} - 1$ (نحو 41 يوم). يمكننا تجاهل الفرق بين البسيط والمتعامد، واعتبار كل دورة متعامدة مع كل دورة أخرى. وحيث إن الدورة طويلة جداً، لذلك من المفضل للتبسيط تقريب كل دورة كسلسلة من الأرقام الثنائية المستقلة والموزعة بشكل متماثل. هناك العديد من تتابعات PN الأخرى المستخدمة في نظام IS95 المعياري، وهذا واحد منها وبسبب طول قيدها تُسمى تتابعات PN الطويلة. لتتابعات PN العديد من الخواص المثيرة للاهتمام، لكن بالنسبة لنا يكفي عرضها كتتابعات مستقلة وموزعة بشكل متماثل لكن أيضاً معروفة بالنسبة للمستقبل.

يتم استخدام الحالة الابتدائية لتتابع PN الطويل للتمييز بين مختلف الهوائيات المحمولة، وفي الحقيقة هذه الحالة الابتدائية هي الجزء الوحيد من نظام الإرسال المحدد لهوائيات محمول معين.

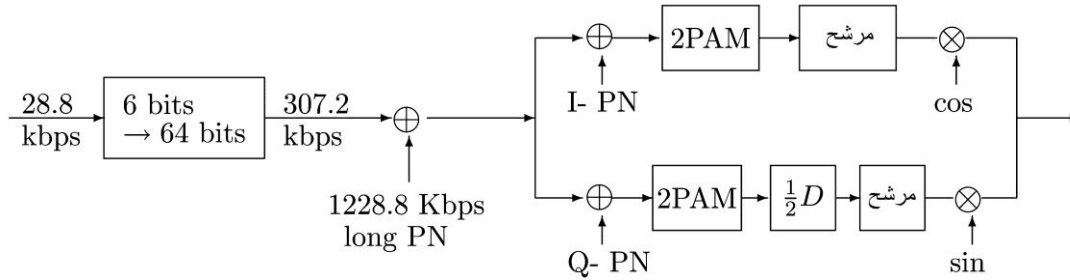
يكون التدفق الثنائي الناتج بعد إضافة تتابع PN الطويل عند معدل 1.2288 Mbps. تتم مضاعفة هذا التدفق إلى تدفقين قبل أن تتم عملية تعديله بالتعديل المتعامدي بوساطة حامل التجيب والجيب. يتم إضافة تدفق التجيب بوساطة دائرة جمع من النمط الثنائي إلى تتابع PN آخر (يُسمى تتابع متفق بالطور أو I-PN) عند معدل 1.2288 Mbps، وتتم إضافة تدفق الجيب بوساطة دائرة جمع من النمط الثنائي إلى تتابع PN آخر يطلق عليه اسم التتابع المتعامد أو Q-PN. تكون تتابعات I-PN و Q-PN هي نفسها لكل الهوائيات المحمولة وتساعد في عملية فك التعديل.

الجزء الأخير من عملية التعديل هو إمرار التدفقين الثنائيين من خلال 2PAM تحويلها إلى تدفقات رقمية $\pm a$. كل من هذه التدفقات (من خلال كتل ذات 256 بت) تحافظ على تعامدية توابع والش 64. ثم تمرر كل من هذه التدفقات عبر مرشح مجال أساسي ذي قطع حاد عند عرض مجال نايكوست 614.4 KHz. ثم يتم تعديل هذه التدفقات بالتعديل المتعامد على الحامل ذو عرض المجال الترددي 614.4 KHz فوق وتحت تردد الحامل، من أجل عرض المجال الترددي الكلي 1.2288 MHz. لاحظ أن كل عملية التعديل هنا رقمية، تقريباً، مع وجود مرشح نهاية ويبدو التعديل تماثلي. مسألة ما ينبغي القيام به رقمياً وما ينبغي القيام به بشكل تماثلي (بخلاف الواجهة الثنائية الأصلية) هي في المقام الأول مسألة سهولة التنفيذ.

يبين الشكل (17.9) المخطط الصندوقي للمعدل.

¹⁶⁵ يطلق على الترميز الثنائي المتعامد (32, 7, 64) اسم ترميز ريد ميللر Reed Muller في مراجع الترميز.

¹⁶⁶ نتخيل تحول تتابع هادامارد الثنائي بوساطة تحول 2PAM إلى توابع والش للتبسيط. يكون من المناسب لأغراض التنفيذ، الحفاظ على التتابعات الثنائية (0,1) حتى انتهاء المرحلة الأخيرة من عملية التعديل.



الشكل 17.9: المخطط الصندوقي لترميز المنبع والقناة.

لنعتبر فيما يلي المستقبل. تتابعات PN الثابتة التي تمت إضافتها إلى توابع والش لا تغير من تعامدية مجموعة الإشارة، والتي تتكون الآن من 64 تابعاً، كل منها ذو طول 256 وكل منها (يلاحظ في المجال الأساسي) يتضمن الجزء الحقيقي والجزء التخيلي. يتم تمرير الموجة المستقبلية، بعد فك التعديل إلى المجال الأساسي والترشيح، خلال مستقبل راكي Rake مماثل لمرشح تمت مناقشته سابقاً. مستقبل راكي هنا له مجموعة إشارة مكونة من 64 إشارة بدلاً من إشارتين. أيضاً، لا يُنظر إلى القناة هنا كفروع عند معدل أخذ عينات، بل كثلاثة فروع في مواقع متحركة بشكل ديناميكي لمسك مسارات الاستقبال الأساسية.

كما ذكرنا سابقاً، الكشف هو غير متماسك بدلاً من كونه متماسكاً.

خرج مستقبل راكي هو قيمة احتمالية لكل من 64 فرضية. وهذه يتم تحويلها إلى قيمة احتمالية لكل من 6 بت في معكوس ترميز هادامارد 6 بت إلى 64 بت.

أحد أسباب استخدام التشابك بين ترميز الطي وتوابع مرمز والش واضح الآن. وبعد كشف توابع والش، فإن الأخطاء في سلسلة 6 بت من دائرة الكشف تحتوي على أخطاء مترابطة بشكل كبير. لا يعمل مفكك ترميز فيتري بشكل جيد مع وجود دفقات من الخطأ، لذلك يقوم المشابك بنثر هذه الأخطاء خارجاً للسماح لمفكك فيتري أن يعمل بوجود الضجيج المستقل نسبياً من بت إلى بت.

5.9.9 التداخل متعدد النفاذ في نظام IC95

يستخدم عدد من الهواتف المحمولة نفس المجال الترددي 1.2288 MHz للاتصال مع نفس محطة القاعدة، وسوف تستخدم الهواتف المحمولة الأخرى المجاورة أيضاً نفس المجال الترددي للاتصال مع محطات القاعدة التابعين لها. ونريد الآن أن نفهم أي نوع من التداخل يحدث بين هذه الهواتف المحمولة. لننظر في عملية الكشف عن هواتف محمول معين وتأثير التداخل من الهواتف المحمولة الأخرى.

وحيث إن كل هواتف محمول يستخدم طور مختلف من تتابع PN الطويل، فإن تتابعات PN من الهواتف المحمولة المتداخلة يمكن نمذجتها كدفقات ثنائية عشوائية مستقلة وموزعة بشكل متماثل. وبما أن كل من هذه الدفقات تتم نمذجتها كدفقات مستقلة وموزعة بشكل متماثل، فإن الجمع من النمط الثنائي لتدفق PN والمعطيات يظل تدفقاً من الأرقام الثنائية المستقلة والموزعة بشكل متماثل. إذا كان المرشح المستخدم قبل الإرسال ذا قطع حاد جداً (بجيت تبدو المجالات 1.2288 MHz قريبة جداً من بعضها)، يمكن تقريب نبضات نايكويست من نبضات sinc. كما أنه من المنطقي نمذجة ساعة أخذ العينات من كل هواتف محمول متداخل بحيث تكون موزعة بانتظام. وهذا يعني أن الهواتف المحمولة المتداخلة يمكن نمذجتها تكون مستقرة بالمعنى الواسع وذات طيف مستو خلال المجال 1.2288 MHz.

الهواتف المحمولة الأكثر تداخلاً توجد في نفس المجال الترددي، ويكون التداخل كبيراً هناك، ولكن أيضاً، بما أن الإشارات المتداخلة هذه مستقلة عن بعضها، يمكننا استخدام نظرية النهاية المركزية لبيان أن هذا التداخل الكلي سيكون غوصياً تقريباً.

للحصول على فكرة عن تأثير التداخل، نفترض أن كل هواتف محمول يستقبل نفس طاقة المجال الأساسي لكل بت معلومة معطاة E_b . وبما أن هناك 9600 bit من المعلومات في الثانية تدخل إلى المرز، فإن استطاعة الموجة المتداخلة تكون عندئذ $9600 E_b$. يتم نثر هذا الضجيج بالتساوي خلال 2,457,600 بعد في ثانية، وهكذا يكون $E_b/512 = E_b(4800/2.4576 \times 10^6)$ لكل بعد. وبالتالي يزداد الضجيج في البعد من $N_0/2$ إلى $(N_0/2 + kE_b/512)$ حيث k هو عدد أجهزة التداخل. مع هذا التغيير، تصبح المعادلة (80.9):

$$(81.9) \quad \Pr(e) \leq \frac{63}{2} \exp \left[\frac{-3E_{bs}}{2N_0 + kE_b/256} \right]$$

واقعيًا، يتم استقبال الهوائيات المحمولة بمستويات استطاعة مختلفة، ولهذا السبب يُستخدم نظام متطور إلى حد ما للتحكم بالاستطاعة لمحاولة تسوية الاستطاعات المستقبلية من كل الهوائيات المحمولة المستقبلية من محطة قاعدة معينة. هذه الهوائيات المحمولة التي تستقبل إشارات من محطات أخرى يفترض أن يكون لها استطاعة أقل من محطة القاعدة المعطاة، وبالتالي تسبب تداخل أقل. ويمكن ملاحظة أنه مع مجموعة كبيرة من أجهزة التداخل، فإن افتراض أنها تشكل عملية غوسية هو أفضل من حالة جهاز تداخل واحد.

العامل 256 في (81.9) يرجع إلى نثر الموجة (حيث يتم إرسالهم خلال عرض مجال ترددي 1.2288Mhz بدلاً من عرض المجال الضيق). هذا النثر، بطبيعة الحال، هو أيضاً السبب لماذا يجب على أعداد ملموسة من الهوائيات المحمولة الأخرى أن تستخدم نفس المجال. وبما أن صوت المستخدمين يكون عادةً في حالة صمت خلال نصف المحادثة، والهاتف المحمول لا يحتاج لإرسال أي طاقة خلال فترات الصمت، فإن عدد أجهزة التداخل المحتملة يتضاعف.

تحاول الأنواع الأخرى من النظم الخلوية (GSM و tdma) الحفاظ على الهوائيات المحمولة المتداخلة في مجالات تردد مختلفة وفترات زمنية مختلفة. وفي حال نجاحها، وهذا هو، بالطبع، أفضل من CDMA، حيث إنه عندئذ لا يوجد تداخل سوى تداخل محدود في العلاقة (81.9). الصعوبة مع هذه المحطات الأخرى هي يجب إعادة استخدامها أن الحيزات الترددية والحيزات الزمنية بوساطة الهوائيات المحمولة التي تذهب إلى محطات خلوية أخرى (مع أنه يفضل الاتصال مع المحطات المجاورة ليس عن طريق الهوائيات المحمولة). تؤدي الحاجة لتجنب إعادة استخدام الحيز بين الخلايا المتجاورة إلى خوارزميات معقدة جداً لتخصيص أنماط إعادة استخدامها بين الخلايا، وهذه الخوارزميات لا يمكنها الاستفادة من العامل 2 لأن المستخدمين يكونون في حالة صمت نصف الوقت.

وبسبب كون هذا الإرسال ذا مجال ضيق، فإنه عندما يحدث التداخل لا يمكن تخميده بعامل 256 كما في العلاقة (81.9). وبالتالي فإن السؤال يتلخص فيما إذا كان من الأفضل أن يكون لدينا عدد كبير من أجهزة التداخل الصغيرة أو عدد صغير من أجهزة التداخل الكبيرة. هذا، بالطبع، إحدى مسائل الاختلاف بين نظم CDMA والنظم ضيقة المجال. على سبيل المثال، النظم ضيقة المجال لا يمكن أن تستفيد من مستقبلات راكبي، مع أنها يمكن أن تستفيد من العديد من التقنيات المتقدمة خلال سنوات إرسال المجال الضيق.

10.9 ملخص عن الاتصالات اللاسلكية

تختلف الاتصالات اللاسلكية عن الاتصالات السلكية بالدرجة الأولى في طبيعة التغير الزمني للقناة والتداخل من المستخدمين الآخرين. طبيعة التغير الزمني للقناة هي الأكثر تحدياً من الناحية التكنولوجية من الاثنين وسيتم التركيز عليها بشكل رئيس في هذا الفصل. القنوات اللاسلكية تملك غالباً مسارات كهرومغناطيسية متعددة بأطوال مختلفة من المرسل والمستقبل وبالتالي يحصل المستقبل على نسخ متعددة من الموجة المرسله بتأخيرات زمنية مختلفة قليلاً. وإذا كانت هذه هي المشكلة الوحيدة، فإنه يمكن تمثيل القناة بمرشح خطي ذي ثوابت غير متغيرة مع الزمن (LTI) مع إضافة الضجيج، وهذا يمكن معاملته كامتداد بسيط نسبياً لقنوات عديمة الترشيح مع ضجيج تمت دراستها في فصول سابقة.

المشكلة التي تجعل الاتصالات اللاسلكية مختلفة فعلاً هي حقيقة أن المسارات الكهرومغناطيسية المختلفة أيضاً تتحرك بالنسبة لبعضها بعضاً، مما يؤدي بالتالي إلى انزياحات دوبلر مختلفة في مسارات مختلفة.

يبين المقطع 3.9 أن هذه المسارات المتعددة ذات انزياحات دوبلر مختلفة تؤدي إلى نموذج دخل/خرج الذي في حال عدم وجود الضجيج، تتم نمذجته كمرشح خطي ذي ثوابت متغيرة زمنياً (LTV) وذو استجابة $h(\tau, t)$ ، التي هي الاستجابة عند الزمن t للنبضة τ ثانية في وقت سابق. وهذا له تابع نظام متغير زمنياً $\hat{h}(f, t)$ الذي يشكل لكل قيمة t ثابتة، تحويل فورييه للتابع $h(\tau, t)$. تتصرف المرشحات LTV بطريقة تشبه إلى حد ما مرشحات LTI المألوفة. وبشكل خاص، دخل القناة $x(t)$ وخرجها الحالي من الضجيج $y(t)$ يرتبطان بعلاقة طي، $y(t) = \int h(\tau, t) x(t-\tau) d\tau$ ، أيضاً، $y(t)$ من أجل كل قيمة t ثابتة، هي تحويل فورييه العكسي $\hat{x}(f)\hat{h}(f, t)$. والفرق الرئيس هو أن $\hat{y}(f)$ لا تساوي $\hat{x}(f)\hat{h}(f, t)$ إلا إذا كان $\hat{h}(f, t)$ غير متغير مع t .

والعوامل الرئيسة للقناة اللاسلكية (عند تردد حامل معطى f_c) هي نثر دوبلر D وزمن النثر L . نثر دوبلر هو الفرق بين أكبر وأصغر انزياح دوبلر ملموس في القناة (عند f_c). وقد تبين أن ضعف عرض المجال الترددي للتابع $|\hat{h}(f_c, t)|$ ينظر إليه على أنه تابع لـ t . وبالمثل، L هو زمن النثر بين أطول وأقصر تأخير للمسارات المتعددة (عند زمن خرج ثابت t_0). وقد تبين أن ضعف عرض المجال الترددي

$|h(f, t_0)|$ ينظر إليه كتابع للتردد f .

تمّ تحديد زمن التماسك T_{coh} وتردد التماسك F_{coh} الشكل $F_{\text{coh}} = \frac{1}{2L}$ و $T_{\text{coh}} = \frac{1}{2B}$ نوعياً، هذه العوامل تمثل مدة الخفوت متعدد المسارات ومدة التردد على التوالي. تحدث الخفوتات، كما يشير اسمها، تدريجياً سواء في الزمن أو التردد، لذلك تمثل هذه العوامل المدة فقط من حيث معنى درجة المقدار.

كما هو مبين في المقطع 4.9، نماذج تمرير المجال هذه من القنوات اللاسلكية يمكن تحويلها إلى نماذج المجال الأساسي ومن ثم تحويلها إلى نماذج متقطعة زمنياً. العلاقة بين نموذج مجال التمرير ونموذج المجال الأساسي مشابهة تماماً لنماذج تلك القنوات عديمة الخفوت. يعتمد النموذج المتقطع زمنياً على نظرية أخذ العينات، وبالرغم من أنها صحيحة رياضياً، يمكن إلى حد ما أن يتشوه شكل القناة مع عدد قليل من المسارات، يعود في بعض الأحيان لفرع واحد، وأحياناً يعود للعديد من فروع المسارات. مع ذلك فإن هذا النموذج مناسب جداً لإعطاء فكرة عن القنوات اللاسلكية التي تستخدم على نطاق واسع، ولا سيما للذين لا يحبون النماذج المستمرة زمنياً.

وبعد ذلك المقطع 5.9 يقطع الصلة مع النماذج الكهرومغناطيسية ويظهر استغلال نموذج خط تأخير المجال الأساسي احتمالياً. وبنفس الوقت يتم إضافة WGN. يتوافق نموذج المجال الأساسي مع الحالات التي يكون خلالها عرض المجال الترددي ضيقاً بالنسبة لتردد التماسك F_{coh} وتتوافق النماذج متعددة الفروع مع الحالة المعاكسة. نحن بشكل عام نمذج الفروع الإفرادية على أنها ذات خفوت رايلي، المقابل لعدد كبير من المسارات الصغيرة المستقلة ضمن مجال التأخير الموافق. تم تحليل العديد من النماذج الأخرى، بما في ذلك نموذج ريسان Rician ونموذج المحدد غير التماسك، لكن القنوات الفيزيائية لديها مثل هذا التنوع أن هذه النماذج لا توفر سوى نظرة ثاقبة على أنواع من السلوك المتوقع. المشاكل المنمذجة هنا معقدة تماماً، وكانت وجهة نظرنا لتحليل النتائج المترتبة على بعض نماذج بسيطة جداً.

تمشياً مع فلسفة المناقشة أعلاه، يحلل المقطع 6.9 نموذج الفرع الواحد ذي خفوت رايلي. احتمال خطأ خفوت رايلي الكلاسيكي، عند استخدام إشارات متعامدة ثنائية وعند عدم معرفة مطال القناة أو طورها، يتم حسابه ليكون $1/[2 + E_b/N_0]$ احتمال الخطأ الكلاسيكي للكشف غير التماسك، في حال أن المستقبل يعرف مطال القناة لكن لا يعرف طورها، تم حسابه أيضاً ومقارنته مع نتيجة الكشف التماسك على النحو المستمد للقنوات عديمة الخفوت. تكون النتائج متشابهة تماماً من أجل قيم كبيرة للقيم E_b/N_0 ، باعتبار أن معرفة الطور غير مهمة في هذه الحالة. ومع ذلك، فإن الكاشف غير التماسك لا يستخدم مقدار القناة في الكشف، مبيناً أن الكشف مع خفوت رايلي لن يتحسن بمعرفة مقدار القناة.

الاستنتاج من هذه الدراسة هو أن الاتصال المعقول والموثوق بالقنوات اللاسلكية يحتاج إلى التنوع أو الترميز أو يحتاج التغذية العكسية مع معدل أو التحكم بالاستطاعة مع تنوع ذو مرتبة L في خفوت رايلي، تم تبين أن احتمال الخطأ يقترب من الصفر حيث $(E_b/4N_0)^{-L}$ من أجل E_b/N_0 كبيرة. إذا كان مقدار مختلف مسارات التنوع معلوم، فإن احتمال الخطأ يمكن أن يكون أصغر.

يمكن أن تكون معرفة القناة وتغيراتها مفيدة بطريقتين، الأولى هي إنقاص احتمال الخطأ عندما يستخدم الترميز و/أو التنوع، والأخرى هي في ممارسة التحكم بالمعدل أو التحكم باستطاعة الإرسال. يحلل المقطع 7.9 تقنيات قياس مختلفة للقناة، تتضمن القياس المباشر بواسطة إرسال تتابعات اختبار معروفة والقياس باستخدام مستقبلات راكي. هذه هي الأدوات الفعالة والمستخدم على نطاق واسع.

وأخيراً، كل من التحليلات أعلاه عن القنوات اللاسلكية تمّ أخذها من المقطع 9.9، الذي يصف النظام الخلوي IS95. في الواقع يوضح هذا المقطع معظم المواضيع الرئيسة في جميع أنحاء هذا النص.

A.9 الملحق: احتمال خطأ الكشف غير المتماثل

خلال الفرضية $U = (a, 0)$ فإن $|V_0|$ هو متحول عشوائي ريسيانى R ذو كثافة¹⁶⁷.

$$(82.9) \quad f_R = \frac{r}{WN_0/2} \exp\left\{-\frac{r^2+a^2g^2}{WN_0}\right\} I_0\left(\frac{rag}{WN_0/2}\right), \quad r \geq 0$$

حيث I_0 هو تابع ببسل المعدل من المرتبة صفر. باشتراط أن $U = (a, 0)$ ولهما الكثافة نفسها، وبالتالي تكون نسبة الاحتمال:

$$(83.9) \quad \frac{f[|v_0|, |v_1| | U = (a, 0)]}{f[|v_0|, |v_1| | U = (0, a)]} = \frac{I_0(2|v_0|ag/WN_0)}{I_0(2|v_1|ag/WN_0)}$$

من المعلوم أن I_0 يكون متزايداً باطراد بدليله، الذي يحقق أن قاعدة اتخاذ قرار الاحتمال الأعظمي هو أن تختار $U = (a, 0)$ إذا كان $|v_0| > |v_1|$ وتختار $U = (0, a)$ خلاف ذلك. وبالتماثل يكون احتمال الخطأ هو نفسه للفرضيات الأخرى، ويعطى بواسطة:

$$(84.9) \quad \Pr(e) = \Pr\{|V_0|^2 \leq |V_1|^2 | U = (a, 0)\} = \Pr\{|V_0|^2 \leq |V_1|^2 | U = (0, a)\}$$

وهذا يمكن حسابه مباشرة دون الإشارة لمتحولات ريسيان العشوائية أو توابع ببسل. نحسب احتمال الخطأ مشروطاً بالفرضية $U = (a, 0)$ ، وذلك بواسطة العودة للإحداثيات المستطيلة. وحيث إن النتائج تكون مستقلة عن الطور ϕ_i من أجل G_i من أجل $i = 0$ أو 1 ، وسوف نسط ذلك بافتراض أن $\phi_0 = \phi_1 = 0$.

باشتراط أن $U = (a, 0)$ ، ببساطة هو $|Z_1|^2$. وحيث إن الأجزاء الحقيقية والتخيلية للمتحول Z_1 غوصية مستقلة وموزعة بشكل متماثل وذات تباين $WN_0/2$ لكل منهما، فإن $|Z_1|^2$ هو أسى وله متوسط WN_0 . وبالتالي، من أجل $x \geq 0$ ،

$$(85.9) \quad \Pr(|V_1|^2 \geq x | U = (a, 0)) = \exp\left(-\frac{x}{WN_0}\right)$$

بعد ذلك، اعتماداً على الفرضية $U = (a, 0)$ و $\phi_0 = 0$ نرى من العلاقة (57.9) أن $V_0 = ag + Z_0$. افترض أن $V_{0,im}$ و $V_{0,re}$ هي الأجزاء الحقيقية والتخيلية من V_0 ، تكون الكثافة الاحتمالية لكل من $V_{0,im}$ و $V_{0,re}$ عند الفرضية المعينة $U = (a, 0)$ و $\phi_0 = 0$ هي:

$$(86.9) \quad f(v_{0,re}, v_{0,im} | U = (a, 0)) = \frac{1}{2\pi WN_0/2} \exp\left(-\frac{[v_{0,re}-ag]^2 + v_{0,im}^2}{WN_0}\right)$$

ندمج الآن (85.9) و (86.9). كل الاحتمالات أدناه مشروطة ضمناً على فرضية، $U = (a, 0)$ و $\phi_0 = 0$. من أجل الزوج الملحوظ $V_{0,im}$ و $V_{0,re}$ سيحصل خطأ إذا كان $|V_1|^2 \geq v_{0,re}^2 + v_{0,im}^2$ ، وبالتالي:

$$\begin{aligned} \Pr(e) &= \iint (v_{0,re}, v_{0,im} | U = (a, 0)) \Pr(|V_1|^2 \geq v_{0,re}^2 + v_{0,im}^2) dv_{0,re} dv_{0,im} \\ &= \iint \frac{1}{2\pi WN_0/2} \exp\left(-\frac{(v_{0,re}-ag)^2 + v_{0,im}^2}{WN_0}\right) \exp\left(-\frac{v_{0,re}^2 + v_{0,im}^2}{WN_0}\right) dv_{0,re} dv_{0,im} \end{aligned}$$

المعادلات التالية تدمج كل هذه التوابع الأسية "إكمال إلى المربع الكامل" وتُعرف النتيجة كتكاملات غوصية بسيطة:

$$\begin{aligned} \Pr(e) &= \iint \frac{1}{2\pi WN_0/2} \exp\left(-\frac{2v_{0,re}^2 - 2agv_{0,re} + a^2g^2 + 2v_{0,im}^2}{WN_0}\right) dv_{0,re} dv_{0,im} \\ &= \frac{1}{2} \iint \frac{1}{2\pi WN_0/4} \exp\left(-\frac{(v_{0,re} - \frac{1}{2}ag)^2 + v_{0,im}^2 + \frac{1}{4}a^2g^2}{WN_0/2}\right) dv_{0,re} dv_{0,im} \\ &= \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{a^2g^2}{2WN_0}\right) \iint \frac{1}{2\pi WN_0/4} \exp\left(-\frac{(v_{0,re} - \frac{1}{2}ag)^2 + v_{0,im}^2}{WN_0/2}\right) dv_{0,re} dv_{0,im} \end{aligned}$$

بدمج تكاملات غوص

¹⁶⁷ انظر، على سبيل المثال بروكس (21)، صفحة 304.

$$(87.9) \quad \Pr(e) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{a^2 g^2}{2WN_0}\right)$$

9.E تمارين

1.9 (a) تم اشتقاق المعادلة (6.9) بافتراض أن الحركة هي باتجاه خط النظر بين هوائي الإرسال وهوائي الاستقبال. أوجد هذا المجال بافتراض أن هناك زاوية اعتباطية ϕ بين خط النظر والحركة من المستقبل. افترض أن المدى الزمني المفيد صغير بما فيه الكفاية بحيث يمكن إهمال تغيرات (ϕ, ψ) .

(b) وضح لماذا، وتحت أي شروط، من الممكن تجاهل التغير في (ϕ, ψ) خلال فترات صغيرة من الزمن.

2.9 المعادلة (10.9) هي تقريب للمعادلة (9.9). اشتق العبارة الدقيقة للموجة المستقبلية $y_f(t)$ مبتدئاً من (9.9). تلميح: عبّر عن كل تعبير في (9.9) كمجموع تعبيرين، واحد هو التقريب المستخدم في (10.9) والآخر هو المصطلح المصحح. فسّر نتائجك.

3.9 (a) افترض أن r_1 هو طول المسار المباشر في الشكل (4.9). وأن r_2 مسار المنعكس (مجموع طول المسار من المرسل إلى سطح الأرض وطول المسار من سطح الأرض إلى المستقبل). بيّن أن كلما ازداد r ، فإن $r_2 - r_1$ تكون مساوية تقريباً b/r من أجل قيمة ثابتة للمسافة r . أوجد قيمة b . تلميح: تذكر أنه من أجل x صغيرة، فإن $\sqrt{1+x} \approx (1+x/2)$ بمعنى أن $[\sqrt{1+x} - 1]/x \rightarrow 1/2$ عندما $x \rightarrow 0$.

(b) افترض أن الموجة المستقبلية عند هوائي الاستقبال تعطى بوساطة:

$$E_r(f, t) = \frac{\Re[\alpha \exp\{2\pi i [ft - fr_1/c]\}]}{r_1} - \frac{\Re[\alpha \exp\{2\pi i [ft - fr_2/c]\}]}{r_2} \quad (a)$$

بتقريب المقام r_2 من r_1 في العلاقة (a) بين أن $E_r \approx \beta/r^2$ من أجل r^{-1} أصغر بكثير من c/f . أوجد قيمة β .

(c) اشرح لماذا يبقى هذا التعبير مقارب صحيح دون تقارب أولي للمقام r_2 في العلاقة (a) مع r_1 .

4.9 قدّر خرج القناة $y(t)$ من أجل دخل اعتباطي $x(t)$ عندما تتم نمذجة القناة بنموذج متعدد المسارات في (14.9). تلميح: البرهان والجواب مشابهاً جداً لما هو في (20.9)، لكن يجب التفكير في الآثار المحتملة للتخميد المتغير زمنياً $\beta_j(t)$.

5.9 (a) افترض قناة لاسلكية ذات مسار واحد ولها انزياح دوبلر D_1 . افترض أن الاستجابة للدخل: $\exp(2\pi i f t)$ هي

$$y_f(t) = \exp\{2\pi i t(f + D_1)\} \quad (a)$$

قيم انزياح دوبلر D ونقطة الوسط بين الانزياح الأعظمي والانزياح الأصغري لدوبلر Δ . قيم $|\hat{\psi}(f, t)|$ ، $\hat{\psi}(f, t)$ ، $\hat{h}(f, t)$ ، $\hat{\psi}(f, t)$ ومن أجل $\hat{\psi}$ في (24.9). أوجد غلاف الخرج عندما يكون الدخل هو $\cos(2\pi f t)$.

$$y_f(t) = \exp\{2\pi i t(f + D_1)\} + \exp\{2\pi i t f\} \quad (b)$$

أعد الطلب عندما

6.9 (a) أغلفة تمرير الحزمة: ليكن التابع $y_f(t) = e^{2\pi i f t} \hat{h}(f, t)$ هو الاستجابة لقناة متعددة المسارات لدخل $e^{2\pi i f t}$ ، وافترض أن f

$$\Re[y_f(t)] = |y_f(t)| \quad (a)$$

أكبر بكثير من أي انزياح دوبلر للقناة. بيّن أن الغلاف

(b) أوجد الطاقة $(\Re[y_f(t)])^2$ وادرس نتيجة ترشيح التمرير المنخفض لموجة هذه الطاقة. فسّر هذه الموجة المرشحة على أنها متوسط زمني قصير المدى للطاقة واربط الجذر التربيعي لهذا المتوسط الزمني مع غلاف $\Re[y_f(t)]$.

7.9 تعطى المعادلات (34.9) و(35.9) تابع نظام المجال القاعدي والاستجابة النبضية لنموذج المسارات المتعددة المبسط. أعد استخراج هذه المعادلات باستخدام النموذج الأكثر شمولاً للمسارات المتعددة الوارد في المعادلة (14.9) حيث كل تخامد β_j يمكن أن يعتمد على t ولكن ليس f .

8.9 من الشائع تحديد انتشار دوبلر لاتصالات تمرير الحزمة على أنه انتشار دوبلر عند التردد الحامل وإهمال التغير في انتشار دوبلر على الحزمة. إذا كان f_c يساوي 1 GHz و W هو 1 mH، أوجد النسبة المئوية للخطأ عبر المجال في هذا التقريب.

9.9 توضح هذه المسألة لماذا لا يكون بالضرورة ربح الوصلة الذي يتعلق بمجموع عدد كبير محتمل من المسارات المستقلة، تقريب جيد باستخدام توزيع غاوس. افترض أن هناك N مسار ممكن، وبحيث يبدو كل واحد منها مستقلاً مع احتمال $2/N$. لجعل الحالة بسيطة قدر الإمكان، تكون مساهمة المسار n لأي ربح وصلة عشوائي ولتكن $G_{0,0}$ ذات احتمال متساو قدره ± 1 ، مع الاستقلال بين

المسارات. أي أن:

$$G_{0,0} = \sum_{n=1}^N \theta_n \phi_n$$

حيث $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ هي iid متحول عشوائي تأخذ القيمة 1 مع احتمال $2/N$ والقيمة صفر فيما عدا ذلك، والمتحولات $\theta_1, \dots, \theta_N$ هي iid واحتمال متساو قدره ± 1 .

(a) أوجد متوسط وتباين $G_{0,0}$ من أجل أي $N \geq 1$ وبحيث تكون النهاية $N \rightarrow \infty$.
 (b) أعط تفسيراً منطقياً حول عدم كون المتحول العشوائي المحدد ليس غوصياً. وضح لماذا لا يمكن تطبيق نظرية الحد المركزي central limiting theorem.

(c) أعط تفسيراً كميّاً حول كيف يبدو حد التوزيع للتابع $G_{0,0}$. إذا كان ذلك مسلياً، فليس صعباً إيجاد التوزيع الدقيق.

10.9 ليكن $\hat{g}(f, t)$ تابع الحزمة القاعدية المكافئ لتابع نظام مرشح خطي متغير زمنياً، وأن دخل الحزمة القاعدية $u(t)$ محدد بالجال الترددي $(-W/2, W/2)$. أوجد الاستجابة الترددية $g(\tau, t)$ المحددة بالحزمة القاعدية من قبل:

$$g(\tau, t) = \int_{-W/2}^{W/2} \hat{g}(f, t) \exp \{2\pi i f \tau\} df$$

(a) بيّن أن الخرج $v(t)$ من أجل الدخل $u(t)$ هو:

$$v(t) = \int_{\tau} u(t - \tau) g(\tau, t) d\tau$$

(b) أوجد العلاقة بين $g_{k,m}$ و $g(k/W, m/W)$ ، من نموذج الحزمة القاعدية غير المستمر زمنياً المحدد بالعلاقة (41.9). تلميح: العلاقة المطلوبة علاقة سهلة.

(c) ليكن $G(\tau, t)$ متحولاً عشوائياً ذا قيم عينات $g(\tau, t)$ ، حدد:

$$\mathcal{R}(\tau, t') = \frac{1}{W} E\{G(\tau, t) G^*(\tau, t + t')\}$$

ما هي العلاقة بين $\mathcal{R}(k, n)$ و $\mathcal{R}(\tau, t')$ في العلاقة (46.9)؟

(d) أعط تفسيراً $\int_{\tau} \mathcal{R}(\tau, 0) d\tau$ وأشار إلى كيفية تغيرها مع W . هل يمكن تفسير من ذلك لماذا عرف $\mathcal{R}(\tau, t)$ باستخدام معامل التقييس W .

11.9 (a) أوجد متوسط الريح في نتيجة الكشف عدم التماسك المبينة بالمعادلة (59.9) وذلك من أجل إعادة استخراج خطأ خفوت رايلي الاحتمالي.

(b) افترض خفوت حزمة ضيقة مع وصلة واحدة G_m . افترض أن قيمة العينة لمطال الوصلة $|g_m|$ ، قد جرى قياسها بدقة كاملة وغذيت بشكل راجع إلى المرسل. افترض أيضاً أن المرسل يستخدم تعديل موضع النبضة PPM، اختر مطال الدخل بشكل ديناميكي بحيث تحافظ على نسبة إشارة مستقبلية إلى الضجيج ثابتة. إن ذلك يعني إرسال $a/|g_m|$ عوضاً عن a . أوجد طاقة الإرسال المتوقعة لكل بت.

12.9 ليكن لدينا قناة خفوت رايلي التي يمكن وصفها بمرشح وصلة واحد عقدية غير مستمرة ذات ربح G_m . اعتبر وجود اتصال إثنائي حيث لكل زوج من عينات من الزمن، نرسل أحد زوجين متساويي الاحتمال، إما (a, a) أو $(a, -a)$. يعطى الخرج في الأزمن المنفصلة 0 و 1 بالعلاقة:

$$V_m = U_m G + Z_m \quad ; \quad m = 0, 1$$

إن للمطال G كثافة، $f(|g|) = 2|g| \exp\{-|g|^2\}$ ؛ حيث $|g| \geq 0$. كما أن G هي نفسها من أجل $m = 0, 1$ وهي مستقلة عن كل من Z_0 و Z_1 ، والتي بدورها iid غوصية متناظرة دائرياً ذات تباين $N_0/2$ لكل من الجزأين الحقيقي والتخيلي. اشرح إجاباتك في كل جزء.

(a) ليكن لدينا معادلات التحويل الضجيج:

$$Z'_0 = \frac{Z_1 + Z_0}{\sqrt{2}} \quad ; \quad Z'_1 = \frac{Z_1 - Z_0}{\sqrt{2}}$$

بين أن Z'_0 و Z'_1 مستقلة إحصائياً وأعطِ وصفاً احتمالياً لكل منهما.
(b) ليكن لدينا:

$$V'_0 = \frac{V_1 + V_0}{\sqrt{2}} \quad ; \quad Z'_1 = \frac{V_1 + V_0}{\sqrt{2}}$$

أعطِ وصفاً احتمالياً لكل من V'_0 و V'_1 عندما $U = (a, a)$ وعندما $U = (a, -a)$.

(c) أوجد نسبة احتمال $\Lambda(v'_0, v'_1)$ وأوجد قاعدة قرار MAP من أجل استخدام v'_0, v'_1 لاختيار $\bar{U} = (a, a)$ or $(a, -a)$.

(d) أوجد احتمال الخطأ عند استخدام قاعدة القرار هذه.

(e) هل الزوج V_0, V_1 تابعين لكل من V'_0 و V'_1 ? لماذا يعد هذا السؤال وثيق الصلة بالموضوع؟

13.9 ندرس قناة خفوت رايلي ذات الوصلتين موضوع المثال (1.8.9). إن الدخل $U = U_0, U_1, \dots$ هو واحد من اثنين من الفرضيات الممكنة، إما $\mathbf{u}^0 = (\sqrt{E_b}, 0, 0, 0)$ أو $\mathbf{u}^1 = (0, 0, \sqrt{E_b}, 0)$ حيث $U_\ell = 0$ من أجل $4 \leq \ell$ لكل من الفرضيتين. يعطى الخرج وهو عبارة عن سلسلة عقدية متقطعة زمنياً، $V = V_0, V_1, \dots$ بالعلاقة:

$$V_m = G_{0,m}U_m + G_{1,m}U_{m-1} + Z_m$$

إن $m, G_{0,m}, G_{1,m}$ هي متحولات عقدية عشوائية مستقلة وموزعة بشكل متطابق independently Identically Distributed Random variables (iid) وغوصية متناظرة دائرياً يكون فيها $G_{0,m} \sim \mathcal{CN}(0, 1/2)$ من أجل m تساوي كل من 0 و 1. ارتباط $G_{1,m}$ و $G_{0,m}$ مع m قليل الأهمية، ويمكن افتراضهما غير مترابطين. افترض أن السلسلة $Z_m \sim \mathcal{CN}(0, N_0)$ هي سلسلة iid من المتحولات العشوائية المتناظرة دائرياً؛ كما أن الإشارة والضجيج والوصلات مستقلة بعضها عن بعض. شعاع الطاقة $\mathbf{X} = (X_0, X_1, X_2, X_3)^T$ ، كما هو موضح في المثال حيث $X_m = |V_m|^2$ كاف إحصائياً من أجل الفرضية \mathbf{u}^0 و \mathbf{u}^1 . أيضاً، كما شرحنا سابقاً متحولات الطاقة هذه هي مستقلة وأسية في ضوء الفرضية. وبشكل أكثر تحديداً، نعرف $\alpha = \frac{1}{E_b/2 + N_0}$ و $\beta = \frac{1}{N_0}$ ، ونظراً لأن $U = \mathbf{u}^0$ ، فإن كثافة كل من المتحولين X_0 و X_1 تساوي $\alpha e^{-\alpha x}$ ، وكثافة كل من المتحولين X_2 و X_3 تساوي $\beta e^{-\beta x}$ من أجل $x \geq 0$. وعندما $U = \mathbf{u}^1$ فإن هذه الكثافات تكون معكوسة.

(a) أوجد كثافة الاحتمال للمتحول X مشروطاً بالمتحول \mathbf{u}^0 .

(b) بين أن لوغاريتم نسبة الاحتمال تعطى بالعلاقة:

$$\text{LLR}(x) = (\beta - \alpha)(x_0 + x_1 - x_2 - x_3)$$

(c) لتكن $Y_0 = X_0 + X_1$ و $Y_1 = X_2 + X_3$. أوجد كثافة الاحتمال وتابع التوزيع من أجل Y_0 و Y_1 مشروطاً بالمتحول \mathbf{u}^0 .

(d) لاحظ أن احتمال الخطأ هو احتمال Y_1 تزيد عن Y_0 مشروطاً بالمتحول $U = \mathbf{u}^0$. بين أن احتمال الخطأ يعطى بالعلاقة:

$$\text{Pr}(e) = \frac{3\alpha^2\beta + \alpha^3}{(\alpha + \beta)^3} = \frac{4 + \frac{3E_b}{2N_0}}{(2 + \frac{E_b}{2N_0})^3}$$

تلميح: لاستخراج التعبير الثاني في العلاقة السابقة، ينبغي القيام أولاً بتحويل التعبير الأول كتابع للكسر β/α . تذكر أيضاً أن:

$$\int_0^\infty y^2 e^{-y} dy = 2 \text{ وأن } \int_0^\infty e^{-y} dy = \int_0^\infty ye^{-y} dy = 1$$

(e) اشرح لماذا لم نحتاج لافتراض الذي نص على أن $G_{k,i}$ و $G_{k,j}$ ليسا مترابطين من أجل $i \neq j$.

14.9 (التنوع من الدرجة L) يستخرج هذا التمرين احتمال الخطأ في التنوع من الدرجة L على قناة خفوت رايلي. يتوافر في النموذج

الذي درسناه بنهاية الفقرة (8.9)، L وصلة في خط التأخير ذي الوصلات الذي استخدم كنموذج للقناة. تُضاعف كل وصلة الدخل

حيث $G_{k,m} \sim \mathcal{CN}(0, 1/L)$ من أجل $0 \leq k \leq L-1$. المدخل الثنائية هي $\mathbf{u}^0 = (\sqrt{E_b}, 0, \dots, 0)$ و $\mathbf{u}^1 = (0, \dots, 0, \sqrt{E_b}, 0, \dots, 0)$ ، حيث

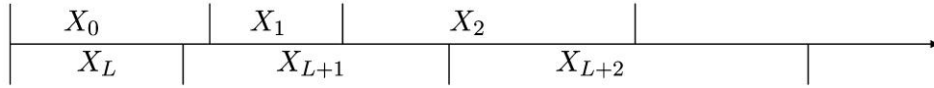
\mathbf{u}^0 و \mathbf{u}^1 تحتوي على الإشارة في الأزمنة 0 و L على التوالي.

إن الإشارة العقدية المستقبلية عند الزمن m هي $V_m = \sum_{k=0}^{L-1} G_{k,m}U_{m-k} + Z_m$ حيث $0 \leq m \leq 2L-1$ ، حيث $Z_m \sim \mathcal{CN}(0, N_0)$

مستقل عن الزمن وعن الدخل وعن ربح وصلات القناة. كما بيّنا في الفقرة (8.9)، مجموعة الطاقات $X_m = |V_m|^2$ من أجل $0 \leq$

$m \leq 2L-1$ مستقلة شرطياً على ضوء وجود إما u^0 أو u^1 وبحيث تشكل إحصاء كافياً بغرض الكشف؛ كما تنص قاعدة ML للكشف على اختيار u^0 إذا كان $\sum_{m=L}^{2L-1} X_m \geq \sum_{m=1}^{L-1} X_m$ أو اختيار u^1 خلاف ذلك. أخيراً، فإن X_0, \dots, X_{L-1} هي أسية مع متوسط قدره $N_0 + \sqrt{E_b}/L$ مشروطاً بالمتحول u^0 . وهكذا فإن X_m من أجل $0 \leq m < L$ له كثافة قدرها $\alpha \exp(-\alpha X_m)$ حيث $\alpha = \frac{1}{E_b/L + N_0}$. وبشكل مشابه، ومن أجل $L \leq m < 2L$ فإن كثافة X_m هي $\beta \exp(-\beta X_m)$ حيث $\beta = \frac{1}{N_0}$.

(a) تعرض الأجزاء التالية من هذا التمرين تقنية بسيطة لحساب احتمال الخطأ مشروطاً بأي من الفرضيتين. وهذا هو احتمال أن يكون مجموع L متحول IID أسى ذات معدل α هو أقل من مجموع L متحول IID أسى ذات معدل $\beta = N_0$. ننظر للمجموع الأول (أي $\sum_{m=1}^{L-1} X_m$ بوجود u_0) على أنه زمن الورد L th في سيرورة بواسون بمعدل α ، وننظر للمجموع الثاني (أي $\sum_{m=L}^{2L-1} X_m$ بوجود u_1) على أنه زمن الورد L th في سيرورة (عملية) بواسون بمعدل β (انظر الشكل 18.9). لاحظ أن مفهوم الوقت هنا لا علاقة له مع مشكلة الكشف الفعلية وهو على سبيل الخُصْر حيلة رياضية لعرض المسألة من حيث سيرورات بواسون. بيّن أن $\Pr(e)$ هو احتمال L ورود من العملية الأولى على الأقل، من بين $2L-1$ ورود من مجموع عمليات بواسون أعلاه.



الشكل 18.9: سيرورة بواسون بأوقات وصول متداخل $\{X_k; 0 \leq k \leq L\}$ وأخرى بأوقات ورود $\{X_{L+\ell}; 0 \leq \ell \leq L\}$. يمكن بيان أن مجمل السيرورتين هو سيرورة بواسون ذات معدل $\alpha + \beta$.

يوجد سطران ناقصان ترجمة تحت الشكل ص 364

(b) كل ورود من مجمل عمليات بواسون يمكن استخلاصه بشكل مستقل من العملية الأولى باحتمال $p = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$ ومن العملية الثانية باحتمال $1 - p = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$ ، بين أن:

$$\Pr(e) = \sum_{\ell=L}^{2L-1} \binom{2L-1}{\ell} p^\ell (1-p)^{2L-1-\ell}$$

(c) عبّر عن هذه النتيجة من خلال α و β ومن ثم من خلال $\frac{E_b}{LN_0}$

(d) استخدم النتيجة أعلاه لإعادة حساب $\Pr(e)$ من أجل خفوت رايلي دون التنوع (أي من أجل $L=1$). استخدم ذلك مع $L=2$ من أجل التحقق من جواب المسألة (13.9).

(e) بيّن أن $\Pr(e)$ من أجل E_b/N_0 كبيرة جداً تتناقص بازدياد L لتصبح $[E_b/(4N_0)]^L$.

(f) بيّن أن $\Pr(e)$ من أجل درجة الورد L th (باستخدام قاعدة الغالبية العظمى ML للكشف) هي مماثلة لاحتمال الخطأ باستخدام درجة تنوع $(2L-1)$ ، وأخذ قرار حاسم قائم على كل خرج تنوع، ومن ثم استخدم قاعدة ML لأخذ القرار النهائي.

15.9 لتكن لدينا قناة لاسلكية ذات مسارين، يتمتعان بالقوة نفسها، ويعملان عند تردد حامل f_c . افترض أن تابع نظام الحزمة القاعدية المكافئ يعطى بالعلاقة:

$$(88.9) \quad \hat{g}(f, t) = 1 + \exp\{i\phi\} \exp[-2\pi i(f + f_c) \tau_2(t)]$$

(a) افترض أن طول المسار 1 له قيمة ثابتة r_0 وطول المسار 2 هو $r_0 + \Delta r + vt$. بين باستخدام العلاقة (88.9) أن:

$$(89.9) \quad \hat{g}(f, t) \approx 1 + \exp\{i\psi\} \exp\left[-2\pi i\left(\frac{f\Delta r}{c} + \frac{f_c vt}{c}\right)\right]$$

(b) فسّر المعامل ψ في العلاقة (89.9)؛ وفسر أيضاً طبيعة التقريب المتعلق بالقيم النسبية لكل من f و f_c .

(c) ناقش لماذا كان منطقياً تعريف الانتشار متعدد المسارات L هنا على أنه $\Delta r/c$ وتعريف انتشار دوبلر D على أنه vf_c/c .

(d) افترض أن $\psi = 0$ ، أي $\hat{g}(0,0) = 2$. أوجد أصغر $t > 0$ بحيث يكون $\hat{g}(0, t) = 0$. إن الإشارة إلى هذه القيمة على أنها زمن التماسك للقناة T_{coh} هي منطقية.

(e) أوجد أصغر تردد $f > 0$ بحيث يكون $\hat{g}(f, 0) = 0$. إن الإشارة إلى هذه القيمة على أنها تردد التماسك للقناة \mathcal{F}_{coh} هي منطقية.

16.9 لتكن الأحداث المستقلة E_1, E_2, \dots, E_k ذات الاحتمال p لكل منها.

$$(a) \text{ بيّن أن } \Pr(U_{j=1}^k E_j) = 1 - (1 - p)^k$$

(b) بيّن أن $pk - (pk)^2/2 \leq \Pr(U_{j=1}^k E_j) \leq pk$. تلميح: أحد المقاربات الممكنة هو إثبات المساواة في $p=0$ ، ومن ثم إثبات عدم المساواة لمشتق كل حد بالنسبة للمتحول p . إن إثبات عدم المساواة للمشتق الأول يمكن القيام به من خلال النظر إلى المشتق الثاني، وذلك من أجل عدم المساواة الأولى.

17.9 (a) لتكن u سلسلة PN مثالية، تحقق $\sum_l u_l u_{l+k}^* = 2a^2 n \delta_k$ ، وليكن $b = u * g$ من أجل ربح وصلة قناة g . بيّن أن $\|b\|^2 = \|u\|^2 \|g\|^2$. تلميح: ننحو أحد المقاربات نحو طي b مع مرشحها التوافقي b^\dagger . استخدم خاصية التبادلية في الطي مع $u * b^*$ على أنها $u * g$ وانظر إلى نتيجة تمرير b خلال مرشح متوافق مع نفسه.

(b) إذا كان u^0 و u^1 هما سلسلتا PN مثاليتان كما في الجزء (a)، بين أن $b_0 = u^0 * g$ و $b_1 = u^1 * g$ تحقق $\|b_0\|^2 = \|b_1\|^2$.

18.9 يتحرى هذا التمرين الفرق بين مستقبل rake الذي يخمن قناة الحزمة القاعدية التمثيلية وآخر يخمن نموذج متقطع زمنياً لقناة الحزمة القاعدية. نفترض أن القناة قد تخمنت بدقة في كلتا الحالتين، ولننظر في احتمال الكشف عن الإشارة الناجمة بشكل غير صحيح. نحن نقوم بذلك بطريقة غير واقعية إلى حد ما، مع معدل 2PAM يرسل إشارة $\text{sinc}(t)$ من أجل $H=0$ و $-\text{sinc}(t)$ من أجل $H=1$. نفترض قناة من مسارين ذات استجابة نبضية $\delta(t) - \delta(t - \epsilon)$ حيث $0 < \epsilon \ll 1$. تكون الإشارة المستقبلية بعد كشف التعديل من تمرير الحزمة إلى الحزمة القاعدية:

$$V(t) = \pm \text{sinc}(t) - \text{sinc}(t - \epsilon) + Z(t)$$

حيث $Z(t)$ هي WGN وكثافة طيفية $N_0/2$. افترضنا أيضاً ولأغراض التبسيط أن تغيرات الطور نتيجة حامل كشف التعديل هي معدومة.

(a) صف كاشف ML من أجل الحالة التمثيلية عندما تكون القناة معروفة بدقة لدى المستقبل.

(b) أوجد خطأ الاحتمال $\Pr(e)$ من خلال طاقة التمرير المنخفض للإشارة المستقبلية، $E = \|\text{sinc}(t) - \text{sinc}(t - \epsilon)\|^2$

(c) قرب E باستخدام التقريب $\text{sinc}(t - \epsilon) \approx \text{sinc}(t) - \epsilon \text{sinc}'(t)$. تلميح: استذكر ثنائية تحويل فورييه $2\pi i f \hat{u}(f) \rightarrow u'(t)$.

(d) ندرس تالياً النموذج المتقطع زمنياً حيث ونتيجة كون انتشار متعدد المسارات صغيراً جداً بالمقارنة مع فترة التشوير (signaling)، فإن القناة المتقطعة قد جرى نمذجتها بوصلة واحدة g . إن إشارة الخرج (أي عينات الخرج) عند الفترة 0 هي $\pm g[1 - \text{sinc}(\epsilon)] + Z(0)$. نفترض أن $Z(t)$ قد جرى ترشيحها لعرض المجال القاعدي $W=1/2$. أوجد احتمال الخطأ باستخدام هذا الخرج ومفترضاً أن g معروفة.

(e) يقترب خطأ الاحتمال للنتائج الواردة في (b) و (c) و (d) من 1/2 عندما تنتهي ϵ إلى الصفر. قارن الطرائق التي من خلالها تنتهي النتائج إلى الصفر.

(f) حاول أن تشرح سبب كون نهج التقطع (discrete) أدنى منزلة من النهج التمثيلي. تلميح: ما هو تأثير استخدام تقريب الوصلة الواحدة على نموذج عينات التمرير المنخفض للقناة.

المراجع

- [1] D. Bertsekas and R. G. Gallager, Data Networks , 2nd ed, Prentice Hall 1992.
- [2] D. Bertsekas and J. Tsitsiklis, An Introduction to Probability Theory, Athena.
- [3] L. Carleson, "On Convergence and Growth of Partial Sums of Fourier Series," Acta Mathematica 116, pp. 135-157, 1966.
- [4] T.M. Cover and J.A. Thomas, Elements of Information Theory, 2nd ed. Wiley, 2006. A modern text on information theory.
- [5] W. Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications, Wiley, NY, vol 1, 1968; vol 2, 1971.
- [6] G.D. Forney, Principles of Digital Communication II, M.I.T. Open Course Ware,
- [7] R.G. Gallager, Information Theory and Reliable Communication, Wiley, 1968. A Classic treatment of Information Theory.
- [8] R.G. Gallager, Discrete Stochastic Processes, Kluwer 1996.
- [9] A. Goldsmith, Wireless Communications, Cambridge Press, 2005.
- [10] R. M. Gray, Source Coding Theory, Kluwer Academic Publishers, 1990
- [11] R. V. L. Hartley, "Transmission of information," Bell System Technical Journal, July 1928, p. 535.
- [12] S. Haykin, Communication Systems, Wiley, New York, 2002.
- [13] D. A. Huffman, "A method for the construction of minimum redundancy codes," Proc. IRE, 40, 1098-1101, 1952.
- [14] W. C. Jakes, Microwave Mobile Communications, Wiley, 1974
- [15] S. Lin and D.J. Costello, Error Control Coding, 2nd ed. Prentice Hall, 2004
- [16] S. P. Lloyd, "Least squares quantization in PCM," IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-28, #2, 129-136, 1982.
- [17] L. G. Kraft, "A device for quantizing, grouping, and coding amplitude modulated pulses," M.S. Thesis, Dept. of E.E., MIT, Cambridge, MA.
- [18] J. Max, "Quantization for minimum distortion," IRE Trans. Inform. Theory, vol IT-6, #2, 7-12, March 1960.
- [19] H. Nyquist, "Certain Topics in Telegraph Transmission theory," Trans. AIEE 47: pp. 627644, 1928.
- [20] R.E.A.C. Paley and N. Wiener, "Fourier transforms in the complex domain," American Math. Soc. Colloquium Publ., 19, New York, 1934.
- [21] J.G. Proakis, Digital Communications, 4th ed., McGraw-Hill, 2000. This covers a larger variety of systems than the text, but in less depth.
- [22] J.G. Proakis and M. Salehi, Communication Systems Engineering, Prentice Hall, 1994. This is an undergraduate version of the above text.
- [23] M. Pursley, Intorduction to Digital Communications, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2005.
- [24] S. Ross, A First Course in Probability, 4th Ed., McMillan & Co., 1994.
- [25] S. Ross, Stochastic Processes, 2nd ed., Wiley and sons, 1996.
- [26] W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw Hill, NY 1966.
- [27] C. E. Shannon, "A mathematical theory of communication," Bell System Technical Journal, 27, 1948, 379-423 and 623-656.
- [28] C. E. Shannon, "The zero-error capacity of a noisy channel," IRE Trans. Inform. Theory, vol. IT-2; 8-19, 1956.
- [29] D. Slepian and H. O. Pollak, , "Prolate Spheroidal Waveforms, Fourier Analysis, and Uncertainty-I," Bell Syst. Tech. J. 40, 43-64. 1961.
- [30] M. Steiner, "The strong simplex conjecture is false," IEEE Trans. IT, May 1994, pp. 721 731.
- [31] G. Strang, Linear Algebra and its Applications, Academic Press, NY, 1976.
- [32] D. Tse and P. Viswanath, Fundamentals of Wireless Communication, Cambridge Press, 2005. An excellent treatment of the Principles and modern practice of wireless communication.
- [33] A. J. Viterbi, CDMA: Principles of Spread Spectrum Communications, Addison-Wesley, Reading MA, 1995.

- [34] S.G. Wilson, Digital Modulation and Coding, Prentice-Hall, 1996. A general text covering mostly the material of the last two thirds of this text.
- [35] J.M. Wozencraft and I.M. Jacobs, Principles of Communication Engineering, Wiley, 1965. This text first developed the signal space view of communication.
- [36] A. Wyner and J. Ziv, "The sliding window Lempel-Ziv algorithm is asymptotically optimal," Proc. IEEE, June 1994, pp. 872-877.
- [37] J. Ziv and A. Lempel, "A universal algorithm for sequential data compression," IEEETrans. IT, May 1977, pp. 337-343.
- [38] J. Ziv and A. Lempel, "Compression of individual sequences via variable-rate coding," IEEE Trans. IT, Sept. 1978, pp. 530-536.



العنوان : شارع محمد علي عقيد - المركز العمراني الشمالي
1003 تونس - الجمهورية التونسية
الهاتف : 70 013 900 (+216)
تليفاكسميلي : 71 948 668 (+216)
إنترنت : www.alecso.org.tn
البريد الإلكتروني : alecso@alecso.org.tn
facebook : <https://www.facebook.com/alecso.org.tn>
flicker : <https://www.flickr.com/photos/tags/alecso>
twitter : @followalecso

I.S.B.N. : 978-9973-15-3-375